ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

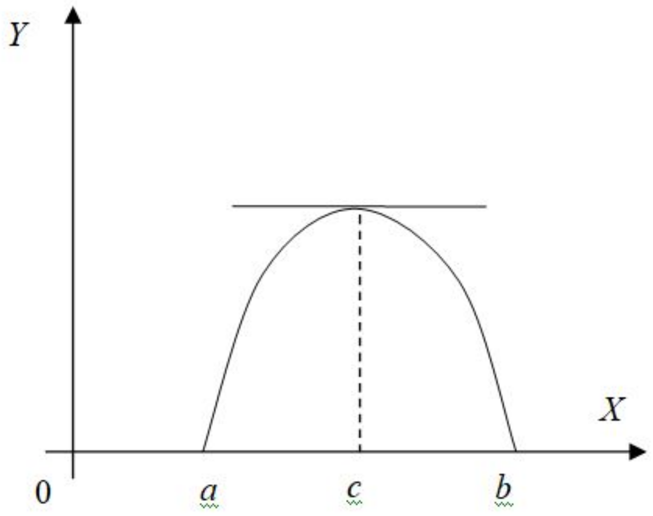
2) дифференцируема на интервале $(a;b)$;

3) $f(a)=f(b)=0$;

то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a;b)$, для которой $f'(c)=0$.

Геометрическая иллюстрация.

Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось Ox в точках $x=a$ и $x=b$, то на этой кривой найдётся, по крайней мере, одна точка $c\in(a;b)$, в которой касательная параллельна оси Ox.

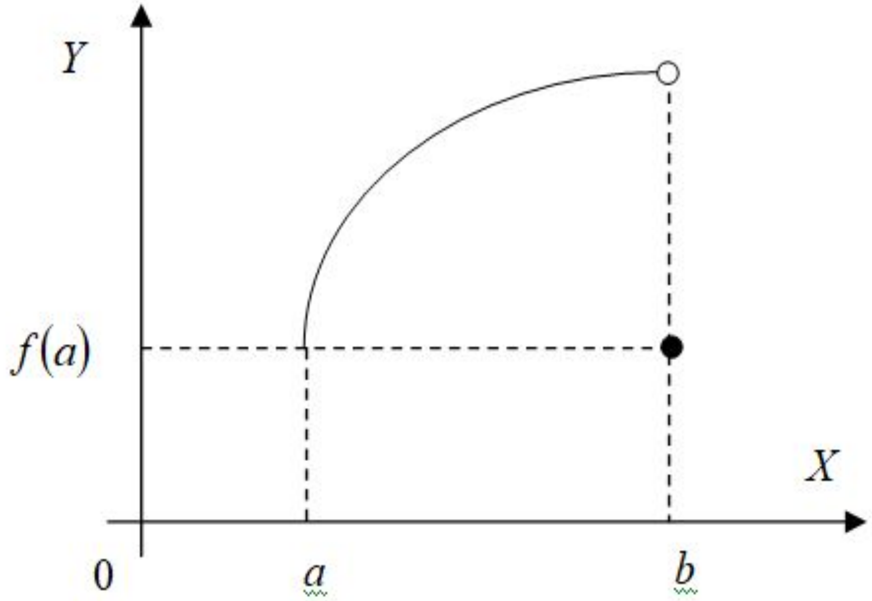


Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a;b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a)=f(b)$.

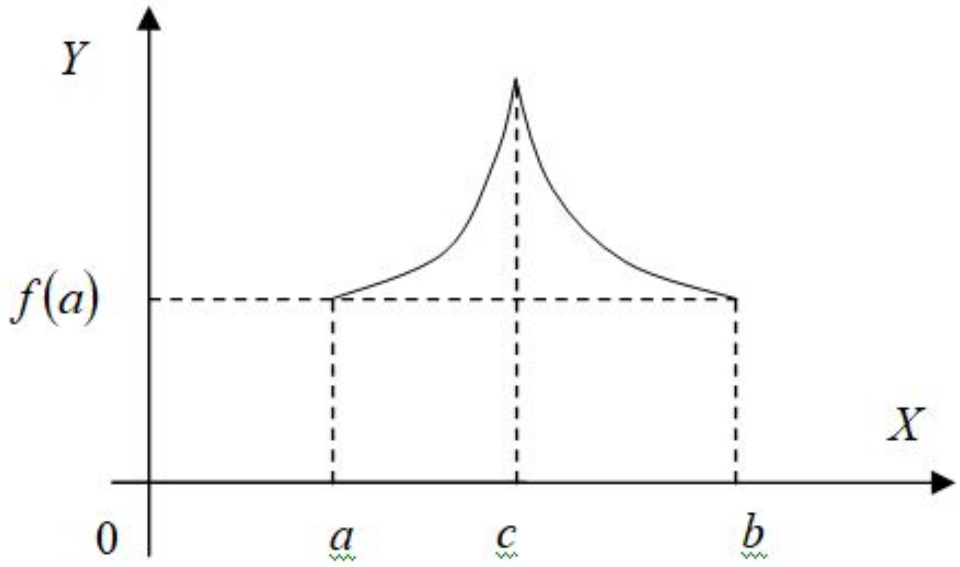
Замечание 2. Все три условия теоремы необходимы.

1) Нарушено первое условие, функция $y=f(x)$ имеет разрыв в точке $x=b$, $f'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$.



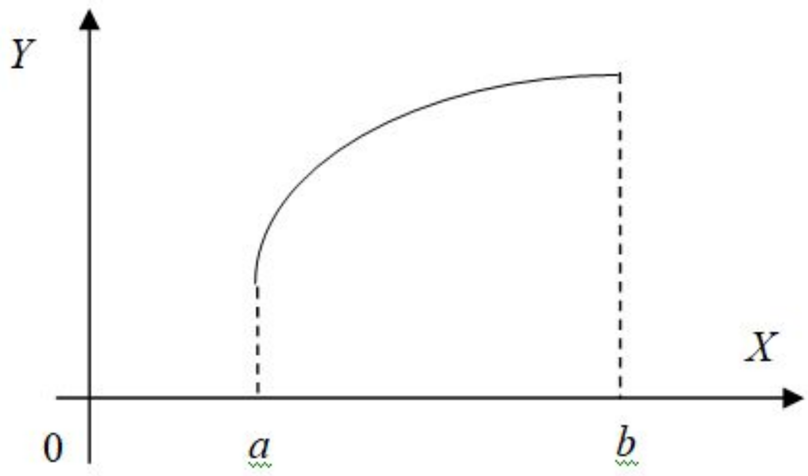
Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

2) Нарушено второе условие теоремы, $f'(c)$ не существует, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$.



3) Нарушено третье условие теоремы, $f(a) \neq f(b)$, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$.

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)



Пример: Проверим, применима ли теорема Ролля к функции $y = \sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$. Найдём точку c, в которой $y'(c) = 0$.

Функция $y = \sin x$:

1) непрерывна на отрезке $[0;2\pi]$;

2) дифференцируема на интервале $(0;2\pi)$, $y' = \cos x$;

3) $y(0) = y(2\pi) = 0$.

Тогда существует точка $c = \dfrac{\pi}{2}$, такая, что $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a;b)$;

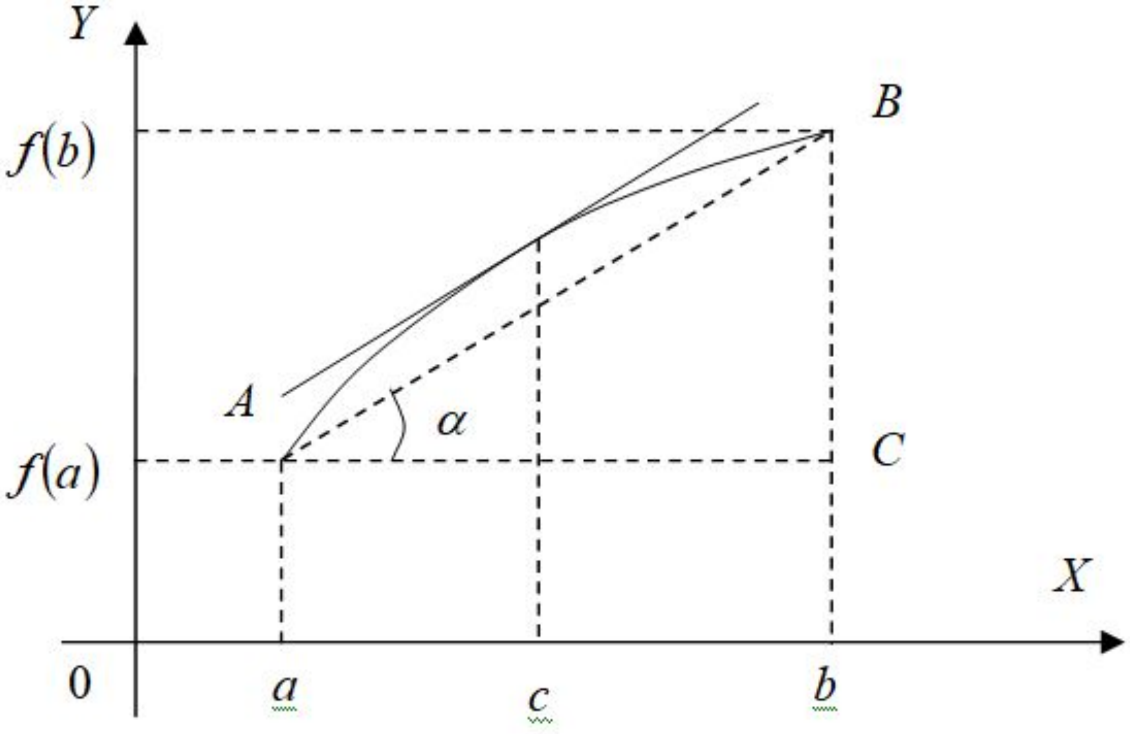
то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (1)$$

Геометрическая иллюстрация.

Из ΔABC: $tg\,\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Таким образом, если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдётся точка C между A и B, в которой *касательная параллельна хорде*, соединяющей точки A и B.

Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)



Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Пример: Проверьте, применима ли теорема Лагранжа к функции $y=4x^3-5x^2+x-2$ на отрезке $[0;2]$. Если окажется, что теорема применима, найдите точку c, в которой выполняется равенство (1).

Решение. Функция $y=4x^3-5x^2+x-2$:

1) непрерывна на отрезке $[0;2]$;

2) дифференцируема на интервале $(0;2)$.

Тогда существует точка $c\in(0;2)$, такая, что выполняется равенство (1).

Находим значения $f(b)=f(2)=12$, $f(a)=f(0)=-2$, $f'(x)=12x^2-10x+1$, $f'(c)=12c^2-10c+1$.

По формуле (1) получаем:

$$f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)\quad\Rightarrow\quad 12+2=2\cdot\left(12c^2-10c+1\right)$$

Находим корни квадратного уравнения $12c^2-10c-6=0$, т.е. $6c^2-5c-3=0$.

Получаем $c_1=\dfrac{5-\sqrt{97}}{12}$, $c_2=\dfrac{5+\sqrt{97}}{12}$, где $c_2\notin(0;2)$. Таким образом, $c=\dfrac{5+\sqrt{97}}{12}$.

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

3) $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$;

то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Пример: Пусть $f(x)=x^4$, $\varphi(x)=x^3$, $a=1$, $b=2$. Составьте формулу Коши и найдите значение c.

Решение. Проверим условия теоремы Коши:

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[1;2]$;

2) $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы на интервале $(1;2)$;

3) $\varphi'(x)=3x^2 \neq 0$ для всех $x\in(1;2)$.

Тогда существует точка $c\in(1;2)$, такая, что $\dfrac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Находим значения $f(2)=16$, $f(1)=1$, $\varphi(2)=8$, $\varphi(1)=1$, $f'(x)=4x^3$, $\varphi'(x)=3x^2$, $f'(x)=4c^3$, $\varphi'(x)=3c^2$.

Получаем:

$$\frac{16-1}{8-1}=\frac{4c^3}{3c^2} \Rightarrow \frac{4c}{3}=\frac{15}{7} \Rightarrow c=\frac{45}{28}.$$

Правило Лопиталя

Теорема 1 (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезк $[a;b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x=a$, то ест $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, т существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причём

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 1 применяется для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

Правило Лопиталя

Замечание 1. Если $f'(a)=\varphi'(a)=0$ и производные и удовлетворяют тем условиям теоремы 1, которые были наложены на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то приходим к формуле

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x\neq a$ в окрестности точки $x=a$, причём производная $\varphi'(x)\neq 0$ для точек данной окрестности, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.$$

Теорема 2 применяется для раскрытия неопределённости вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопиталя

Замечание 3. Теорема 2 распространяется на случай, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)=\infty$.

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{x^2-5}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2}=3$$

Замечание 4. Теоремы 1 и 2 справедливы, если предел отношения производных существует. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

Найдём предел отношения производных:

$\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=1+\cos x$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ не существует.

Теорема 2 не применима.

Правило Лопиталя

К неопределённостям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ сводятся также другие неопределённости, такие, как $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$.

Пример:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} \overset{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$