

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

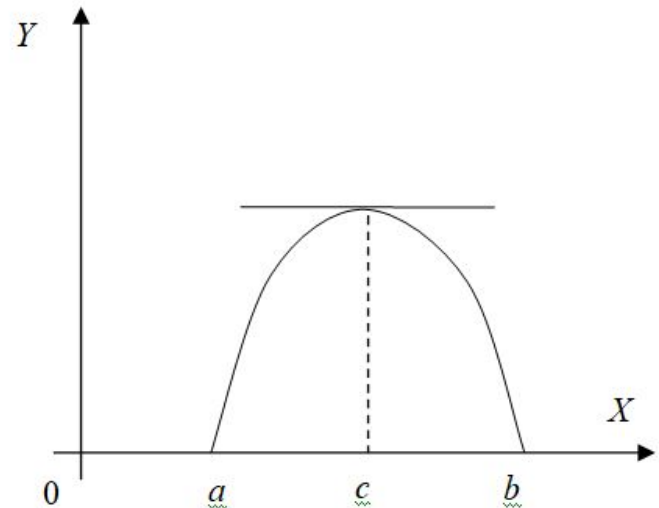
Теорема Ролля. Если функция $f(x)$:

- 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- 2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;
- 3) $f(a) = f(b) = 0$;

то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, для которой $f'(c) = 0$.

Геометрическая иллюстрация.

Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось Ox в точках $x = a$ и $x = b$, то на этой кривой найдётся, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, в которой касательная параллельна оси Ox .

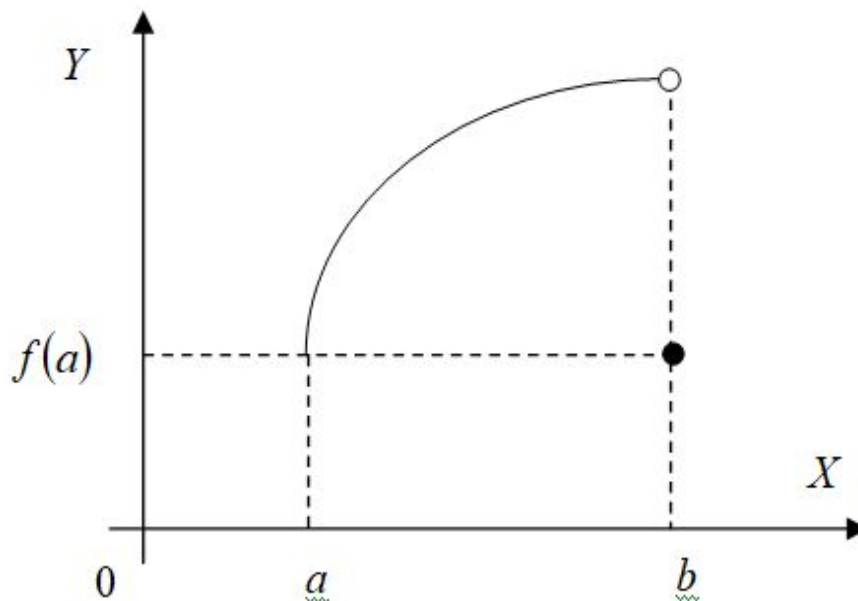


Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a, b]$ не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

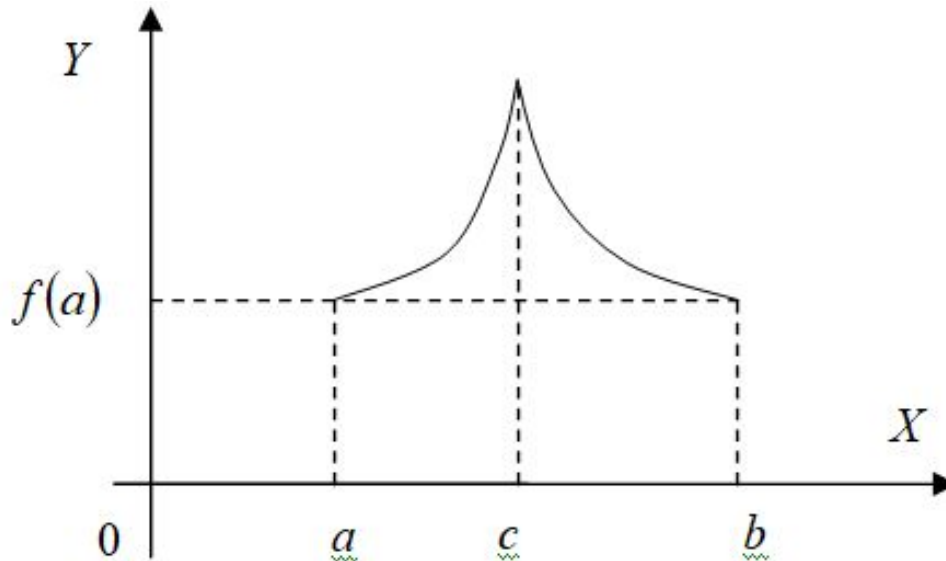
Замечание 2. Все три условия теоремы необходимы.

1) Нарушено первое условие, функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке $x = b$, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.



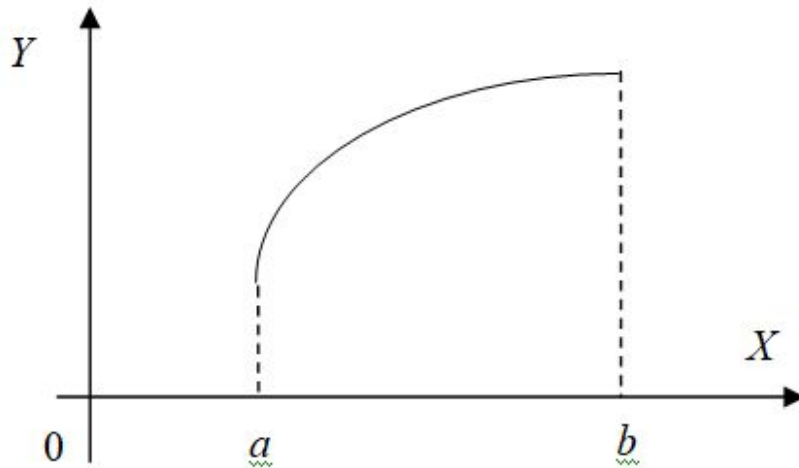
Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

2) Нарушено второе условие теоремы, $f'(c)$ не существует, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.



3) Нарушено третье условие теоремы, $f(a) \neq f(b)$, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема о корнях производной (теорема Ролля)



Пример: Проверим, применима ли теорема Ролля к функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Найдём точку c , в которой $y'(c) = 0$.

Функция $y = \sin x$:

- 1) непрерывна на отрезке $[0; 2\pi]$;
- 2) дифференцируема на интервале $(0; 2\pi)$, $y' = \cos x$;
- 3) $y(0) = y(2\pi) = 0$.

Тогда существует точка $c = \frac{\pi}{2}$, такая, что $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$:

- 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- 2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;

то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, такая, что

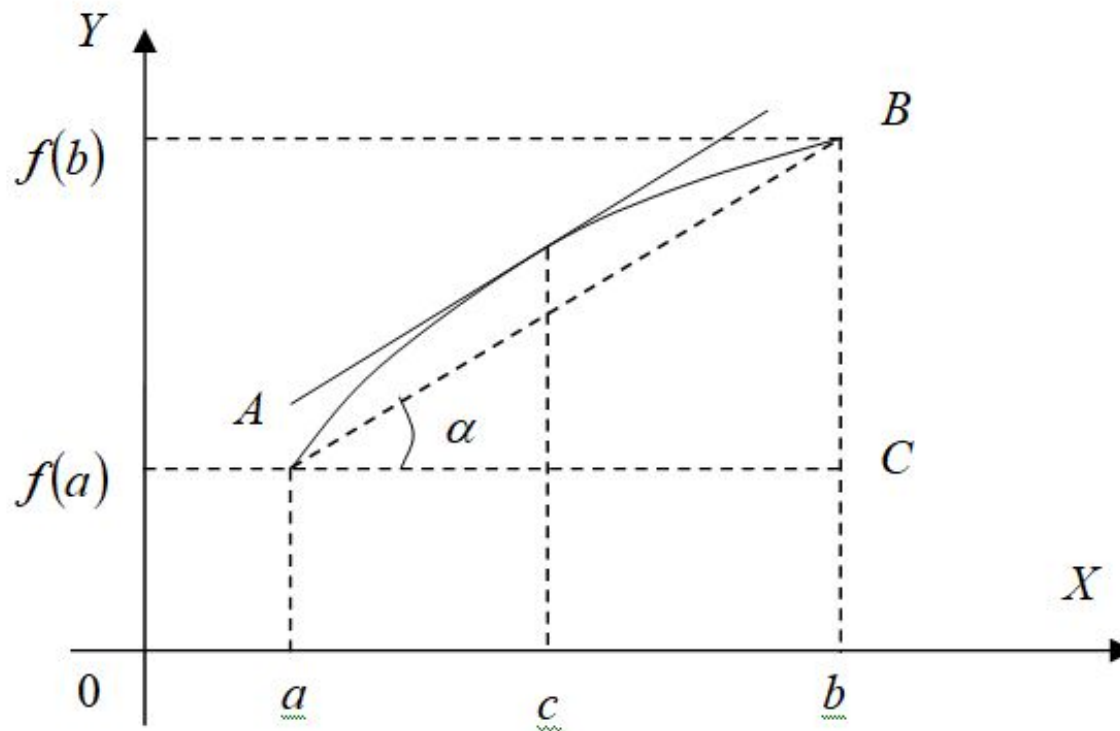
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Геометрическая иллюстрация.

Из $\triangle ABC$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким образом, если во всех точках дуги AB

существует касательная, то на этой дуге найдётся точка C между A и B , в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки A и B .

Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)



Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Пример: Проверьте, применима ли теорема Лагранжа к функции $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ на отрезке $[0; 2]$. Если окажется, что теорема применима, найдите точку c , в которой выполняется равенство (1).

Решение. Функция $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$:

1) непрерывна на отрезке $[0; 2]$;

2) дифференцируема на интервале $(0; 2)$.

Тогда существует точка $c \in (0; 2)$, такая, что выполняется равенство (1).

Находим значения $f(b) = f(2) = 12$, $f(a) = f(0) = -2$, $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$,
 $f'(c) = 12c^2 - 10c + 1$.

По формуле (1) получаем:

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow 12 + 2 = 2 \cdot (12c^2 - 10c + 1)$$

Находим корни квадратного уравнения $12c^2 - 10c - 6 = 0$, т.е. $6c^2 - 5c - 3 = 0$.

Получаем $c_1 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$, $c_2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}$, где $c_2 \notin (0; 2)$. Таким образом, $c = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$.

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ и $\varphi(x)$:

- 1) непрерывны на отрезке $[a; b]$;
- 2) дифференцируемы на интервале $(a; b)$;
- 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$;

то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Пример: Пусть $f(x) = x^4$, $\varphi(x) = x^3$, $a = 1$, $b = 2$. Составьте формулу Коши и найдите значение c .

Решение. Проверим условия теоремы Коши:

- 1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[1; 2]$;
- 2) $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы на интервале $(1; 2)$;
- 3) $\varphi'(x) = 3x^2 \neq 0$ для всех $x \in (1; 2)$.

Тогда существует точка $c \in (1; 2)$, такая, что $\frac{f(2) - f(1)}{\varphi(2) - \varphi(1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Находим значения $f(2) = 16$, $f(1) = 1$, $\varphi(2) = 8$, $\varphi(1) = 1$, $f'(x) = 4x^3$, $\varphi'(x) = 3x^2$,
 $f'(c) = 4c^3$, $\varphi'(c) = 3c^2$.

Получаем:

$$\frac{16 - 1}{8 - 1} = \frac{4c^3}{3c^2} \Rightarrow \frac{4c}{3} = \frac{15}{7} \Rightarrow c = \frac{45}{28}.$$

Правило Лопиталя

Теорема 1 (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль в точке $x = a$, то есть $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тогда, если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \rightarrow a$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причём

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 1 применяется для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Правило Лопиталя

Замечание 1. Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и производные удовлетворяют тем условиям теоремы 1, которые были наложены на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то приходим к формуле

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Замечание 2. Правило Лопиталя применимо и в том случае, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x \neq a$ в окрестности точки $x = a$, причём производная $\varphi'(x) \neq 0$ для точек данной окрестности, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ и существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$. Тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ и}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Теорема 2 применяется для раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Правило Лопиталя

Замечание 3. Теорема 2 распространяется на случай, когда $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{2} = 3$$

Замечание 4. Теоремы 1 и 2 справедливы, если предел отношения производных существует. Например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

Найдём предел отношения производных:

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) \text{ не существует.}$$

Теорема 2 не применима.

Правило Лопиталя

К неопределённостям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ сводятся также другие неопределённости,

такие, как $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$