2. FUNCŢII

Ţîcău Vitalie,
Lector superior universitar

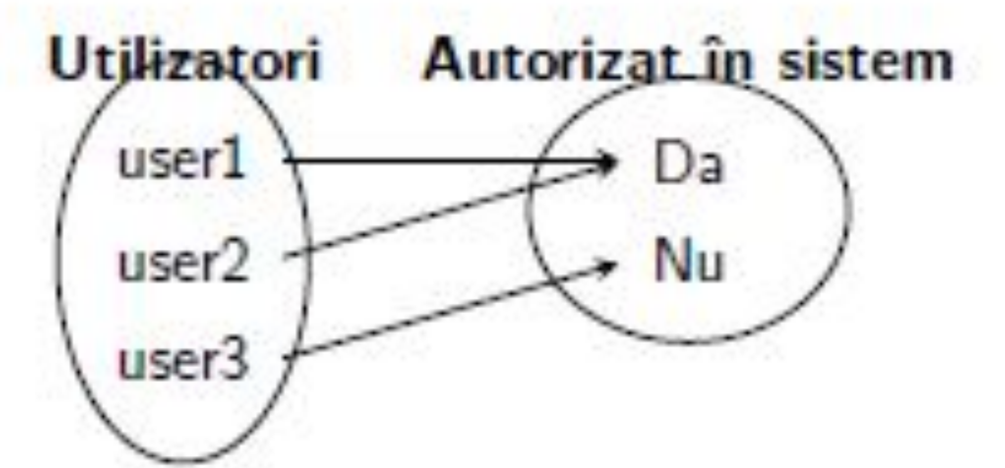
CORESPONDENŢE (SAU LEGI DE CORESPONDENŢĂ)

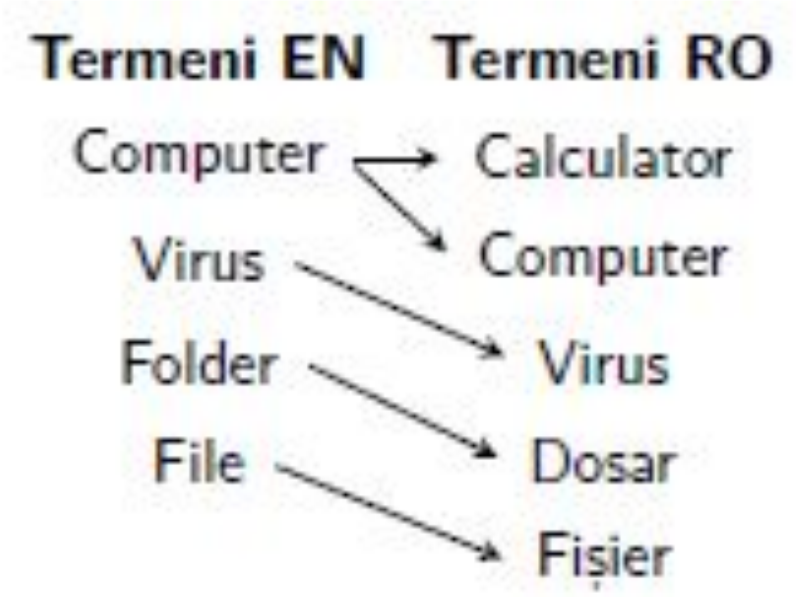
Utilizatori **Conturi în sistem de e-mail**

(”nume utilizator”1 şi parolă1) $\rightarrow$ user1@example.com

(”nume utilizator”2 şi parolă2) $\rightarrow$ user2@example.com

(”nume utilizator”3 şi parolă3) $\rightarrow$ $\varnothing$





DEFINIŢIA FUNCŢIEI

O funcţie este determinată de trei elementeaaa *X* , *Y* şi *f*, având următoarele semnificaţii: *X* și *Y* sunt mulțimi, iar *f* este o lege de corespondență de la *X* la *Y* care face ca:

fiecărui element $x \in X$ să-i corespundă un element și numai unul $y \in Y$. (2.1)

Astfel o funcţie este un triplet (*X*, *Y*, *f*). Acest triplet se notează în mod frecvent prin $f: X \rightarrow Y$. Elementele constitutive ale funcţiei se numesc:

X – ***domeniu*** (sau ***domeniu de definiție***);

Y – ***codomeniu*** (sau ***domeniu de valori***);

f – ***lege de corespondenţă***..

IMAGINE ȘI PREIMAGINE

Fie $f\colon X \to Y$ și $f(x) = y \in Y$ unde $x \in X$, atunci:

y se numește ***imaginea*** lui x prin f;

x se numește ***preimaginea*** (sau ***imaginea inversă***) lui y prin f.

Este posibiliă notația $f^{-1}(y) = x$.

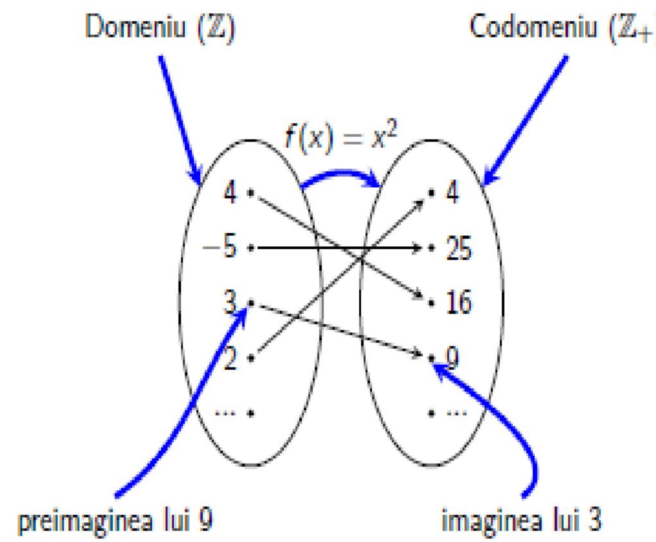
Fie corespondența:

Șiruri: “q”, “qw”, “qwerty”, “qwertz”;

Lungimea: 1, 2, 6.

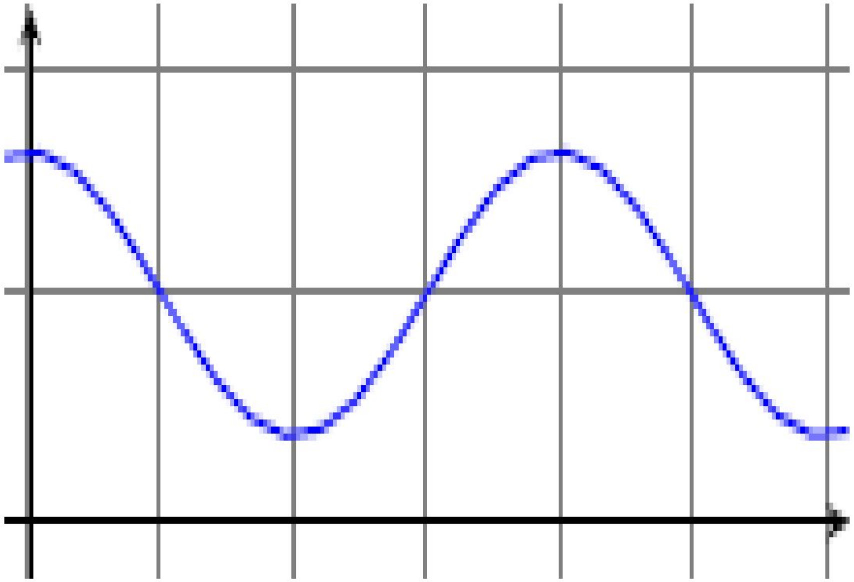
Dacă notăm funcția prin L atunci:

$L^{-1}(1) = q$; $L^{-1}(6) = \{qwerty, qwertz\}$;



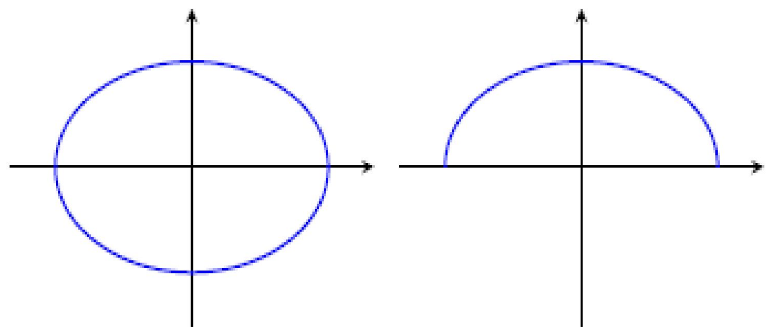
GRAFICUL FUNCŢIEI

Graficul funcţiei $f: X \to Y$ este o mulțime de puncte:
$Gr(f) = \{(x\ ,\ f(x)): x \in X\}$.



GRAFICUL FUNCŢIEI

Nu orice grafic este grafic de funcţie.



Condiţia (2.1) este formată din două subcondiții:

- fiecărui element x din domeniu îi corespunde un element în codomeniu, adică

$$\forall x \in X\,,\ \exists y \in Y \text{ încît } y = f(x). \qquad (2.2)$$

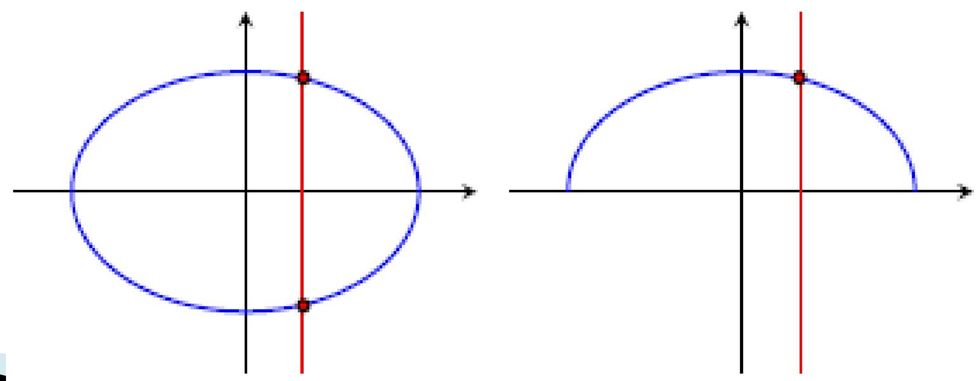
- elementul din codomeniu ce corespunde unui x este unic, adică

$$\forall x_1, x^2 \in X,\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2). \ (2.3)$$

GRAFICUL FUNCŢIEI

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaştem îndeplinirea condițiilor (2.2) și (2.3) astfel:

- Un grafic satisface condiţia (2.2) dacă și numai dacă orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul în cel puțin un punct;
- Un grafic satisface condiţia (2.3) dacă și numai dacă orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul în cel mult un punct.



PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR

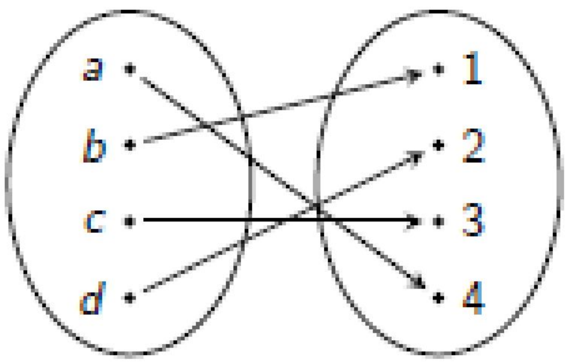
- Periodice – funcţiile trigonometrice;
- Pare;
- Monotone;
- Injective;
- Surjective;
- Bijective.

FUNCȚII INJECTIVE

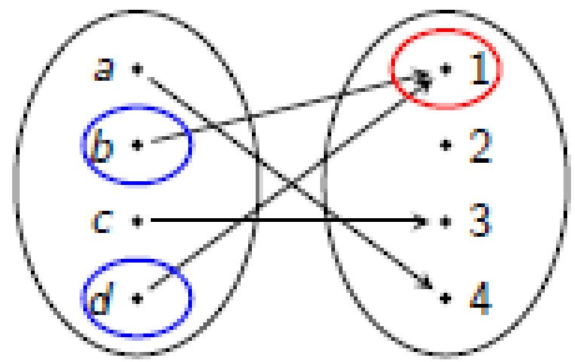
O ***funcţie*** este ***injectivă*** dacă orice element din codomeniu are preimagine unică.

Nu există două elemente din domeniu care să aibă aceeași imagine.

- $f\colon Z \to Z,\ f(x) = x^2$ nu este injectivă.
- $f\colon Z+ \to Z,\ f(x) = x^2$ este injectivă.



O funcție injectivă

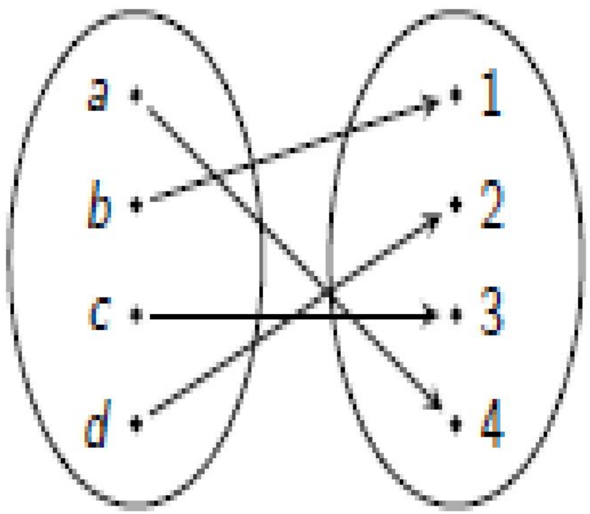


O funcție care nu este injectivă

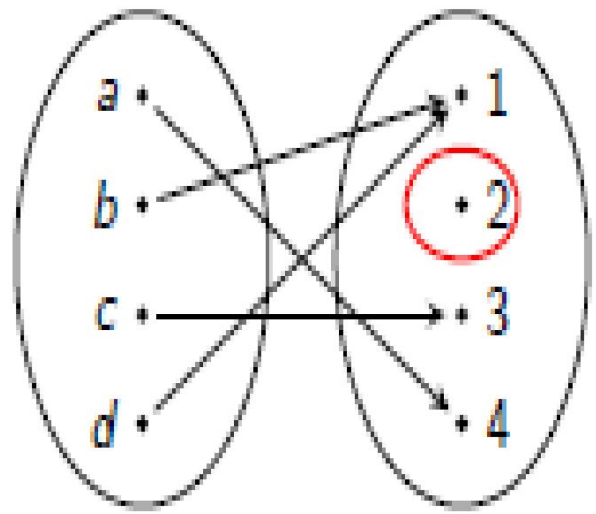
FUNCȚII SURJECTIVE

O ***funcţie*** este ***surjectivă*** dacă orice element din codomeniu are preimagine nevidă.

- $f: Z \to Z$, $f(x) = x^2$ nu este surjectivă.
- $f: Z \to Z+$, $f(x) = x^2$ este surjectivă.



O functie surjectivă



O functie care nu este surjectivă

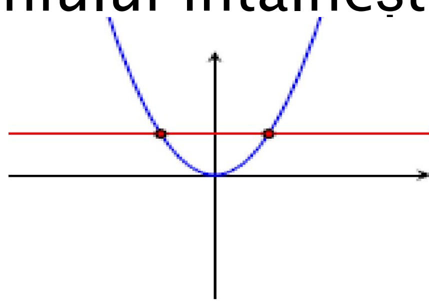
FUNCȚII BIJECTIVE

O ***funcţie bijectivă*** = injectivă și surjectivă.

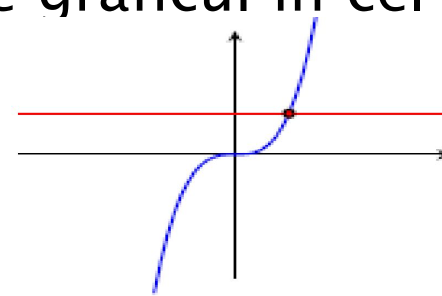
RECUNOAȘTEREA FUNCȚIILOR INJECTIVE, SURJECTIVE

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaștem dacă un grafic este graficul unei funcții injective sau surjective, astfel:

- *Un grafic este graficul unei funcţii injective* dacă și numai dacă orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele codomeniului întâlnește graficul în cel mult un punct;
- *Un grafic este graficul unei funcţii surjective* dacă și numai dacă orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele codomeniului întâlnește graficul în cel puțin un punct.



O funcție care nu este injectivă



O funcție care este injectivă

OPERAŢII CU FUNCȚII: COMPUNEREA FUNCȚIILOR

Funcția compusă $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Operaţia se numește: ***compunerea funcțiilor (operații în lanț)***.

Fie $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ și $g(x) = 3x + 1$ atunci $f \circ g = f(g(x)) = 2(3x + 1)^2 - 3(3x + 1) + 1$.

OPERAŢII CU FUNCȚII: OPERAȚII ALGEBRICE, INVERSA UNEI FUNCȚII

Fie $f: X \to Y$, $g: X \to Y$.

Adunarea f + g = f(x) + g(x).

Înmulţirea $f \cdot g = f(x) \cdot g(x)$.

Inversând legea de corespondență (inversând sensul săgeților) pentru o funcție oarecare $f: X \to Y$ nu se obține totdeauna o funcție.

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.3) este necesar și suficient ca prin funcția directă puncte diferite să aiba imagini diferite, adică:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.2) este necesar și suficient ca prin funcția directă să se consume toate punctele din codomeniu, adică:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y.$$

NUMĂRAREA CU AJUTORUL FUNCȚIILOR (CARDINAL)

Un actuar și un agricultor călătoresc cu trenul. Când au trecut pe lângă o pajiște pe care se afla o turmă de oi, actuarul a spus, ”Nu există 1248 de oi acolo”. Agricultorul a răspuns, ”Extraordinar. Din întâmplare, eu îl cunosc pe proprietarul oilor, iar cifra este absolut corectă. Cum de le-ai numărat atât de repede?”. Actuarul a răspuns, ”Foarte simplu, am numărat doar numărul de picioare și am împărțit la patru”.

Cu ajutorul funcţiilor bijective putem număra elementele unei mulţimi numărând altă mulțime.

Dacă $f: X \to Y$ este o bijecție atunci numărând elementele mulţimii X de fapt numărăm și elementele mulțimii Y; şi invers.

FUNCȚII DE ECHIVALENȚE. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

Două ***mulțimi*** se numesc ***echivalente*** dacă putem găsi o funcție bijectivă definită pe una din mulțimi și cu valori în cealaltă mulțime.

Principiul cutiilor lui Dirichlet:

O funcție $f: X \to Y$ unde X și Y sunt mulțimi finite cu $|X| > |Y|$ nu poate fi injectivă; trebuie să existe cel puțin două elemente din X care să aibă aceeași imagine în Y.

1. Dacă într-un auditoriu sunt 367 de oameni atunci, cel puțin 2 din ei s-au născut în aceeași zi (pentru că avem mai mulți oameni decât zile în an).

2. Într-o pădure de conifere creșteau 800 000 de brazi, astfel încât nici unul din ei nu avea mai mult de 500 000 de ace; să se demonstreze că cel puțin doi brazi posedă același număr de ace.

NUMĂRAREA CU AJUTORUL FUNCȚIILOR

Fie $f: X \to Y$ și $|X| = m$, $|Y| = n$.

Câte funcții f diferite există?

- Pentru fiecare x din X avem n posibilități de asociere cu un element din Y.
- În total $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (de m ori) posibilități, adică n^m.
- Câte funcții f injective diferite există?

În primul rând este necesar ca $m \leq n$.

- Pentru primul x din X avem n posibilități, pentru al doilea $n-1$ ș.a.m.d.
- În total $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$ (de m ori) posibilități, adică $\frac{n!}{(n-m)!}$.