

2. FUNCȚII

Țicău Vitalie,
Lector superior universitar

CORESPONDENȚE (SAU LEGI DE CORESPONDENȚĂ)

Utilizatori

("nume utilizator"1 și parolă1)

("nume utilizator"2 și parolă2)

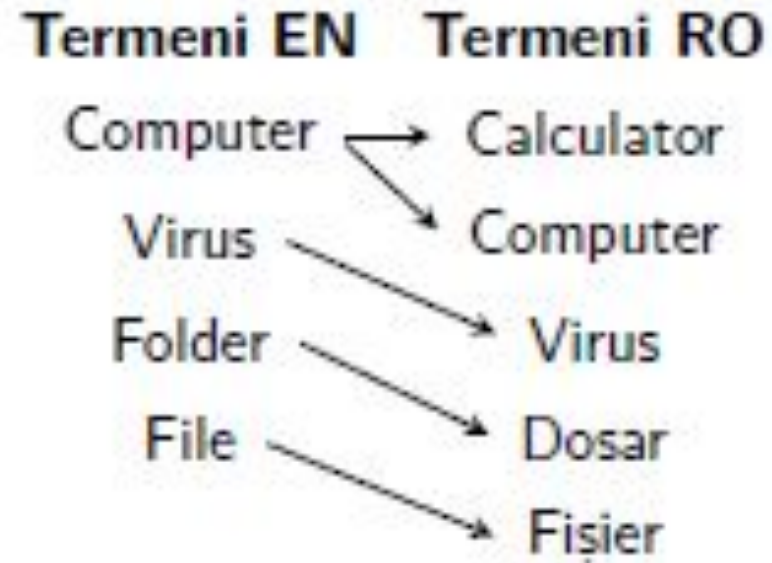
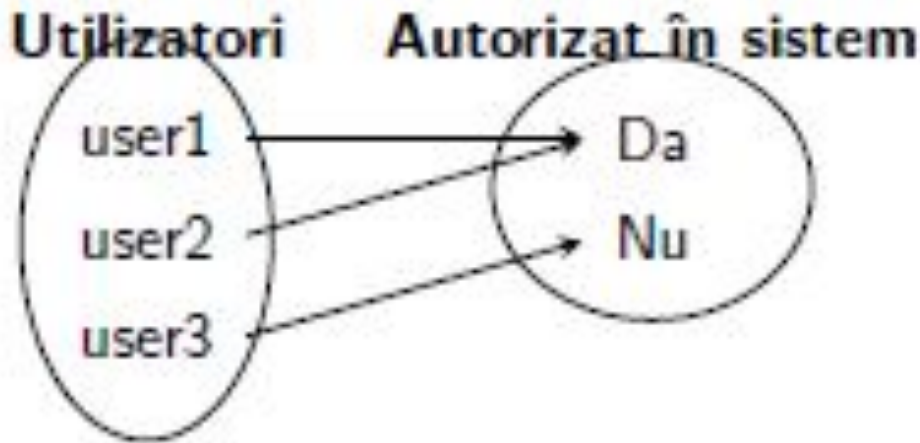
("nume utilizator"3 și parolă3)

Conturi în sistem de e-mail

→ user1@example.com

→ user2@example.com

→ ∅



DEFINIȚIA FUNCȚIEI

O funcție este determinată de trei elemente X , Y și f , având următoarele semnificații: X și Y sunt mulțimi, iar f este o lege de corespondență de la X la Y care face ca:

fiecărui element $x \in X$ să-i corespundă un element și numai unul $y \in Y$. (2.1)

Astfel o funcție este un triplet (X, Y, f) . Acest triplet se notează în mod frecvent prin $f: X \rightarrow Y$. Elementele constitutive ale funcției se numesc:

X – **domeniu** (sau **domeniu de definiție**);

Y – **codomeniu** (sau **domeniu de valori**);

f – **lege de corespondență**..

IMAGINE ȘI PREIMAGINE

Fie $f: X \rightarrow Y$ și $f(x) = y \in Y$ unde $x \in X$, atunci:

y se numește **imagea** lui x prin f ;

x se numește **preimagea** (sau **imagea inversă**) lui y prin f .

Este posibilă notația $f^{-1}(y) = x$.

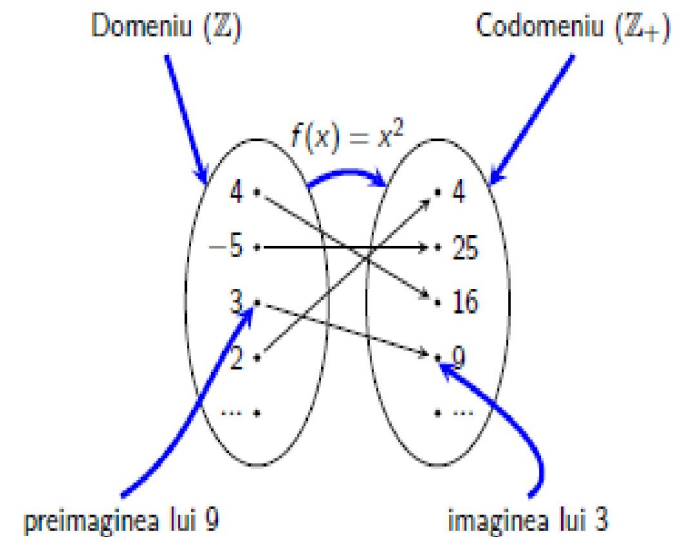
Fie corespondența:

Șiruri: “q”, “qw”, “qwerty”,
“qwertz”;

Lungimea: 1, 2, 6.

Dacă notăm funcția prin L atunci:

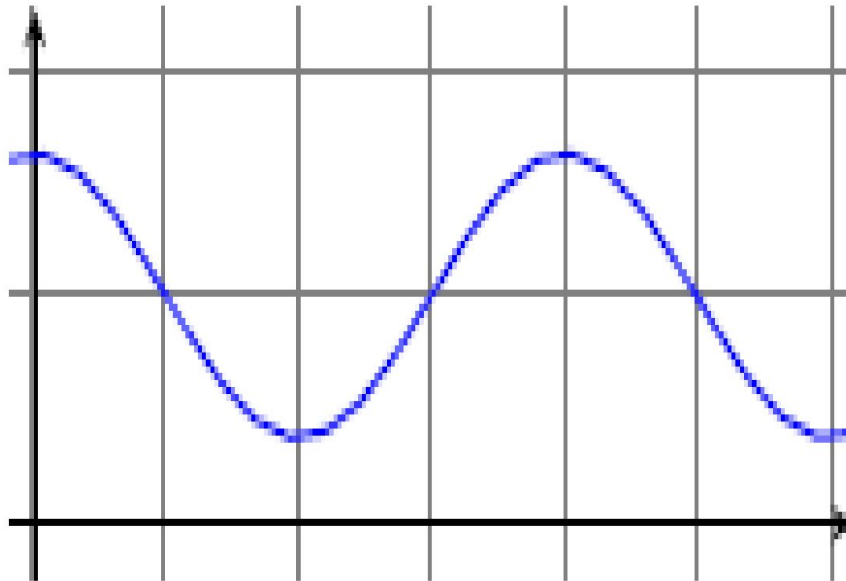
$L^{-1}(1) = q$; $L^{-1}(6) = \{qwerty, qwertz\}$;



GRAFICUL FUNCȚIEI

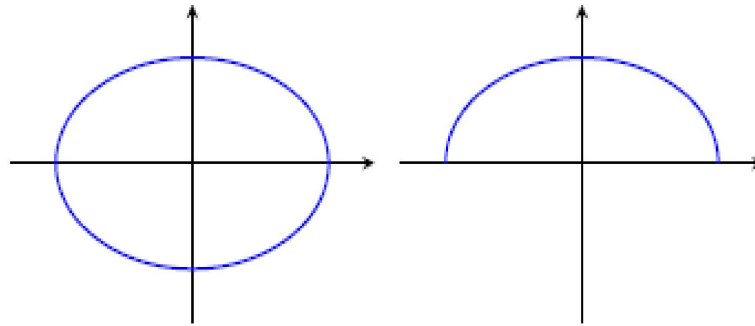
Graficul funcției $f: X \rightarrow Y$ este o mulțime de puncte:

$$Gr(f) = \{(x, f(x)): x \in X\}.$$



GRAFICUL FUNCȚIEI

Nu orice grafic este grafic de funcție.



Condiția (2.1) este formată din două subcondiții:

- ❑ fiecărui element x din domeniu îi corespunde un element în codomeniu, adică

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \text{ încît } y = f(x). \quad (2.2)$$

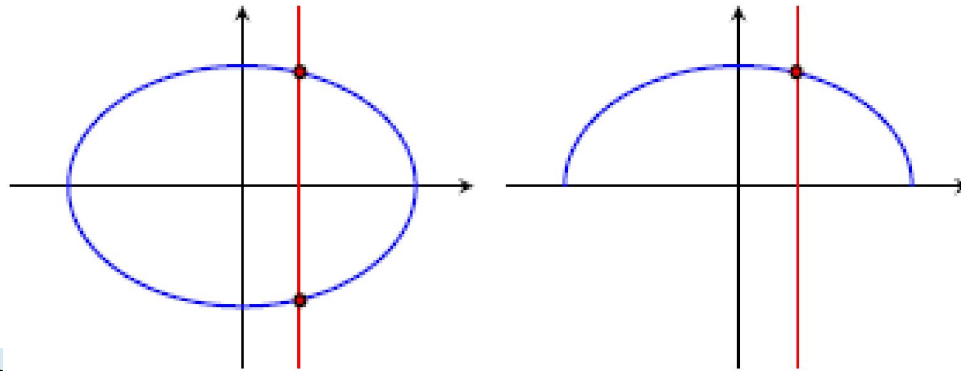
- ❑ elementul din codomeniu ce corespunde unui x este unic, adică

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2). \quad (2.3)$$

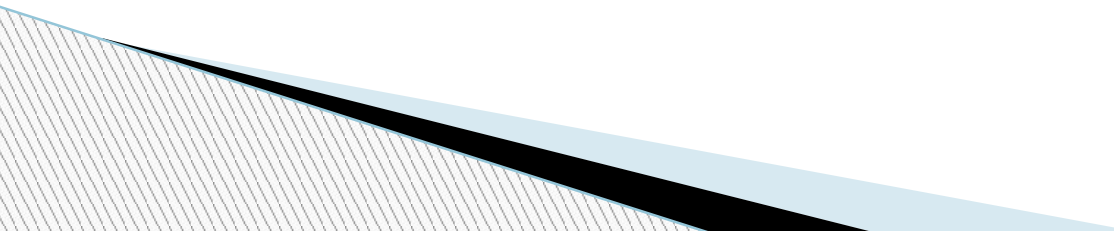
GRAFICUL FUNCȚIEI

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaștem îndeplinirea condițiilor (2.2) și (2.3) astfel:

- Un grafic satisface condiția (2.2) dacă și numai dacă orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul în cel puțin un punct;
- Un grafic satisface condiția (2.3) dacă și numai dacă orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul în cel mult un punct.



PROPRIETĂȚI ALE FUNCTIILOR

- Periodice – funcțiile trigonometrice;
 - Pare;
 - Monotone;
 - Injective;
 - Surjective;
 - Bijective.
- 

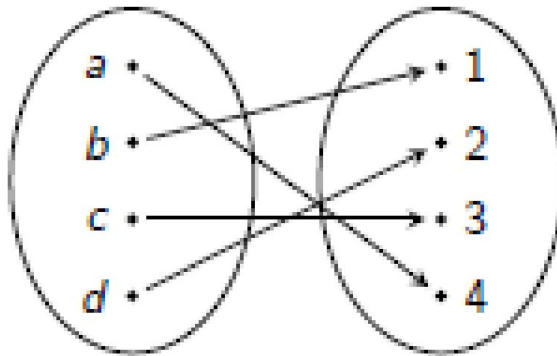
FUNȚII INJECTIVE

O **funcție** este **injectivă** dacă orice element din codomeniu are preimagine unică.

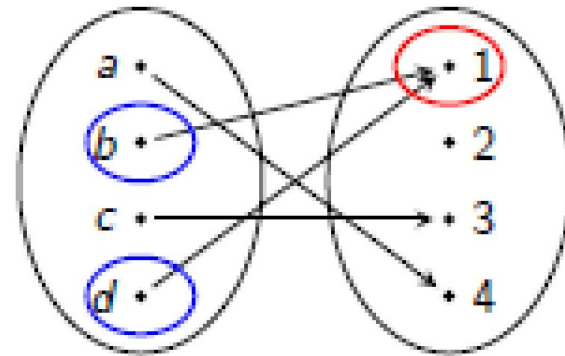
Nu există două elemente din domeniu care să aibă aceeași imagine.

▣ $f: Z \rightarrow Z, f(x) = x^2$ nu este injectivă.

▣ $f: Z^+ \rightarrow Z, f(x) = x^2$ este injectivă.



O funcție injectivă

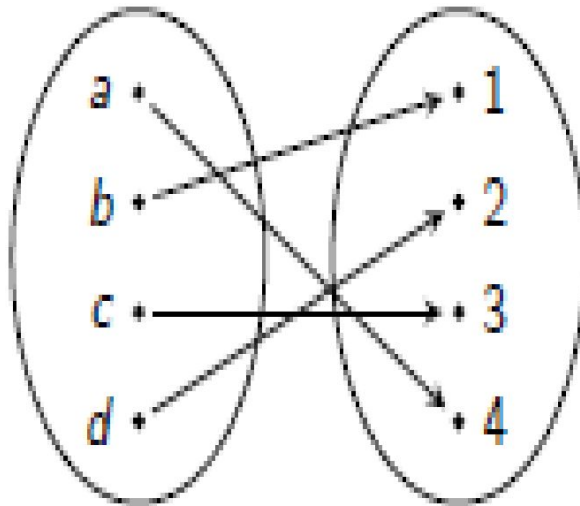


O funcție care nu este injectivă

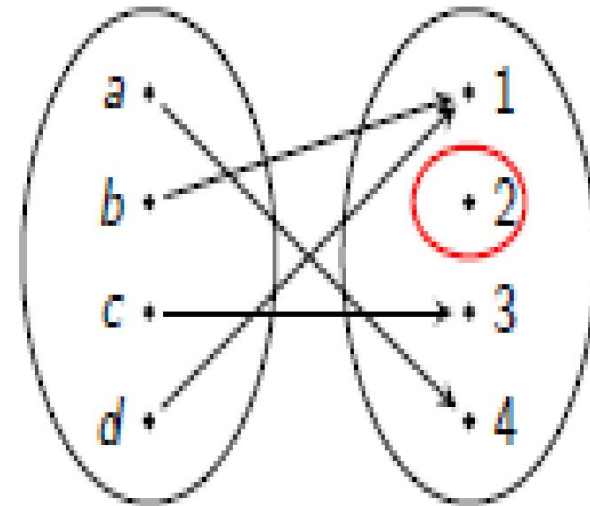
FUNȚII SURJECTIVE

O **funcție** este **surjectivă** dacă orice element din codomeniu are preimagine nevidă.

- ▣ $f: Z \rightarrow Z, f(x) = x^2$ nu este surjectivă.
- ▣ $f: Z \rightarrow Z+, f(x) = x^2$ este surjectivă.



O funcție surjectivă



O funcție care nu este surjectivă

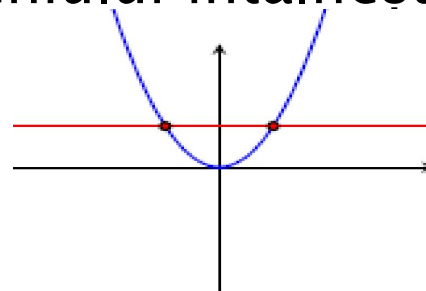
FUNȚII BIJECTIVE

O **funcție bijectivă** = injectivă și surjectivă.

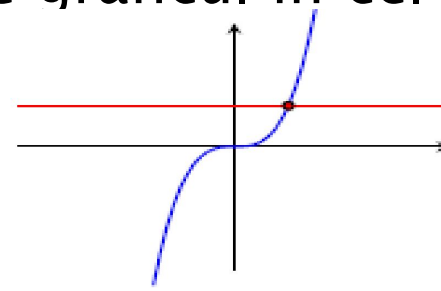
RECUNOAȘTEREA FUNCȚIILOR INJECTIVE, SURJECTIVE

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaștem dacă un grafic este graficul unei funcții injective sau surjective, astfel:

- ▣ *Un grafic este graficul unei funcții injective* dacă și numai dacă orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele codomeniului întâlnește graficul în cel mult un punct;
- ▣ *Un grafic este graficul unei funcții surjective* dacă și numai dacă orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele codomeniului întâlnește graficul în cel puțin un punct.



O funcție care nu este injectivă



O funcție care este injectivă

OPERAȚII CU FUNCȚII: COMPUNEREA FUNCȚIILOR

Funcția compusă $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Operația se numește: ***compunerea funcțiilor***
(operații în lanț).

Fie $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ și $g(x) = 3x + 1$ atunci $f \circ g = f(g(x)) = 2(3x + 1)^2 - 3(3x + 1) + 1$.

OPERAȚII CU FUNCȚII: OPERAȚII ALGEBRICE, INVERSA UNEI FUNCȚII

Fie $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$.

Adunarea $f + g = f(x) + g(x)$.

Înmulțirea $f \cdot g = f(x) \cdot g(x)$.

Inversând legea de corespondență (inversând sensul săgeților) pentru o funcție oarecare $f: X \rightarrow Y$ nu se obține totdeauna o funcție.

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.3) este necesar și suficient ca prin funcția directă puncte diferite să aiba imagini diferite, adică:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.2) este necesar și suficient ca prin funcția directă să se consume toate punctele din codomeniu, adică:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y.$$

NUMĂRAREA CU AJUTORUL FUNCȚIILOR (CARDINAL)

Un actuar și un agricultor călătoresc cu trenul. Când au trecut pe lângă o pajiște pe care se afla o turmă de oi, actuarul a spus, "Nu există 1248 de oi acolo". Agricultorul a răspuns, "Extraordinar. Din întâmplare, eu îl cunosc pe proprietarul oilor, iar cifra este absolut corectă. Cum de le-ai numărat atât de repede?". Actuarul a răspuns, "Foarte simplu, am numărat doar numărul de picioare și am împărțit la patru".

Cu ajutorul funcțiilor bijective putem număra elementele unei mulțimi numărând altă mulțime.

Dacă $f: X \rightarrow Y$ este o bijecție atunci numărând elementele mulțimii X de fapt numărăm și elementele mulțimii Y ; și invers.

FUNȚII DE ECHIVALENȚE. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

Două **mulțimi** se numesc **echivalente** dacă putem găsi o funcție bijectivă definită pe una din mulțimi și cu valori în cealaltă mulțime.

Principiul cutiilor lui Dirichlet:

O funcție $f: X \rightarrow Y$ unde X și Y sunt mulțimi finite cu $|X| > |Y|$ nu poate fi injectivă; trebuie să existe cel puțin două elemente din X care să aibă aceeași imagine în Y .

1. Dacă într-un auditoriu sunt 367 de oameni atunci, cel puțin 2 din ei s-au născut în aceeași zi (pentru că avem mai mulți oameni decât zile în an).

2. Într-o pădure de conifere creșteau 800 000 de brazi, astfel încât nici unul din ei nu avea mai mult de 500 000 de ace; să se demonstreze că cel puțin doi brazi posedă același număr de ace.

NUMĂRAREA CU AJUTORUL FUNCTIILOR

Fie $f: X \rightarrow Y$ și $|X| = m$, $|Y| = n$.

Câte funcții f diferite există?

- ▶ Pentru fiecare x din X avem n posibilități de asociere cu un element din Y .
- ▶ În total $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (de m ori) posibilități, adică n^m .
- ▶ Câte funcții f injective diferite există?

În primul rând este necesar ca $m \leq n$.

- ▶ Pentru primul x din X avem n posibilități, pentru al doilea $n-1$ ș.a.m.d.
- ▶ În total $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(m-1))$ (de m ori) posibilități, adică $\frac{n!}{(n-m)!}$.