Матрицы

Прямоугольная таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

Матрицы

Указанная матрица содержит m строк и n столбцов и может обозначаться $A_{m\times n}$.

Для обозначения элементов матрицы используют двойную индексацию a_{ij}, где i - номер строки, а j - номер столбца.

Виды матриц

Если матрица состоит из одной строки или из одного столбца, то она называется **матрицей-строкой** или **матрицей-столбцом** соответственно.

Виды матриц

Если количество строк матрицы совпадает с количеством её столбцов, то матрица называется **квадратной**.

При этом количество строк (столбцов) определяет порядок квадратной матрицы.

Виды матриц

Например, матрица $\begin{pmatrix} b_{11} b_{22} b_{33} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{pmatrix}$

является **квадратной матрицей третьего порядка.**

Виды матриц

Элементы матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца образуют **главную диагональ матрицы**.

Виды матриц

Матрица, у которой все элементы, находящиеся под главной диагональю (i>j) равны нулю, называется **ступенчатой (или треугольной).**

Виды матриц

Матрица, у которой все элементы, находящиеся не на главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

Виды матриц

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали равны единице, называется **единичной**.
Обозначается такая матрица буквой Е.

Виды матриц

Матрица, у которой все элементы равны нулю называется **нулевой** или **нуль-матрицей**.

Обозначается такая матрица 0.

Операции над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц. Осуществляется следующим образом:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

Операции над матрицами

2. Умножение (деление) матрицы на число. Для получения результата все элементы исходной матрицы умножаются (делятся) на данное число.

Операции над матрицами

3. Умножение матриц.

Осуществляется следующим образом:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$$

$$a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=c_{ij}$$

Операции над матрицами

4. Возведение матрицы в степень. Осуществляется как умножение. Например:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

Операции над матрицами

5. Транспонирование матрицы. В результате этого действия все элементы каждой строки исходной матрицы в том же порядке станут элементами соответствующего столбца новой матрицы.

Операции над матрицами

Например:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \\ a_{12} a_{22} \\ a_{13} a_{23} \end{pmatrix}$$

Задача

Пример №1. Найти матрицу C, если $C = A' \cdot B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача

Решение. Найдём сначала $A^{'}$, транспонируя матрицу A :

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём произведение матриц $A^{'} \cdot B =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача

Найдём теперь элементы матрицы $C = A' \cdot B.$

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0$

$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$

$c_{13} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 6$

$c_{14} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 3$

$c_{21} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2$

$c_{22} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$

$c_{23} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -1$

$c_{24} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -1$

Задача

Таким образом получили ответ:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6 & 3\\ 2 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Определитель матрицы

Одной из важнейших числовых характеристик квадратной матрицы является её определитель.

Обозначения: $|A|, \Delta, \det A$

Определитель матрицы

Определитель второго порядка вычисляется по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Для каждой квадратной матрицы существуют миноры. **Минором** элемента матрицы называется определитель, полученный из определителя исходной матрицы вычёркиванием одной любой его строки и одного любого столбца.

Минор

Например: M_{ij} - минор элемента a_{ij}

матрицы A, который получен из

определителя $|A|$ вычёркиванием i-ой

Строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение

Алгебраическое дополнение элементу матрицы вычисляется следующим образом:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений всех элементов любой его строки (или столбца) на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения.

Задача

Пример №2. Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Задача

Решение. Согласно Теореме Лапласа возьмём, например, вторую строку и по ней произведём вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 1\cdot(-1\cdot(-1) - 1\cdot 2) + 1\cdot(-1)\cdot(-1\cdot(-2) - 1\cdot 1) =$$

$$= 3\cdot(1-2) - 1\cdot(2-1) = 3\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -4$$

Свойства определителей

1. Определитель матрицы не меняется при её транспонировании.
2. Если хотя бы одна из строк полностью состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если все элементы какой-либо строки умножить на постоянное число, то определитель умножится на это число.
4. При перемене местами двух строк матрицы определитель меняет знак на противоположный.
5. Если соответствующие элементы двух строк матрицы пропорциональны, то определитель равен нулю.

Квадратная матрица называется **вырожденной** (или **особенной**) если её определитель равен нулю.

Если её определитель отличен от нуля, то матрица является **невырожденной**.

Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементам транспонированной матрицы A' называется **присоединённой** к матрице A и обозначается $\overline{A}$.

Для любой невырожденной матрицы *A* существует **обратная матрица** A^{-1}, которая получается путём деления присоединённой матрицы на определитель матрицы ***A***.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если справедливо следующее равенство:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где E - единичная матрица.

Задача

Пример №3. Найти обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Вычисляем определитель матрицы A. Если $|A|=0$, то обратная матрица не существует.

$$|A| = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1$$

Задача

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Вычисляем определитель матрицы А. Если

$|A|=0$, то обратная матрица не существует.

$$|A| = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1$$

Задача

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Вычисляем определитель матрицы А. Если $|A|=0$, то обратная матрица не существует.

$$|A| = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1$$

Задача

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Вычисляем определитель матрицы А. Если |A|=0, то обратная матрица не существует.

$$|A| = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1$$

Определение. **Рангом** матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначается $rang A, r(A)$

Линейная комбинация

Матрица-столбец является линейной комбинацией других матриц столбцов, если существует равенство

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ постоянные числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля.

Свойства определителей

6. Определитель не меняется, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других строк.

7. Если хотя бы одна из строк является линейной комбинацией других строк, то определитель равен нулю (верно и обратное утверждение).

Элементарными преобразованиями матрицы являются следующие преобразования:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Перемена мест строк (столбцов).
3. Умножение всех элементов строки столбца на ненулевое число.
4. Транспонирование матрицы.
5. Прибавление к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов).

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг матрицы оказывается равным максимальному числу линейно независимых строк матрицы, при условии, что количество строк не превосходит количество столбцов.

Задача

Пример №4. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача

Решение. Найти ранг матрицы можно приведя матрицу к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований. Количество оставшихся строк, при условии, что на главной диагонали отсутствуют нули, будет равно рангу исходной матрицы.

Задача

1-й шаг. Следует сделать так, чтобы количество строк матрицы не превышало количество её столбцов. В нашем случае необходимо матрицу транспонировать.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача

2-й шаг. Удобнее начинать работу, когда элемент матрицы, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца равен 1. Для этого поменяем местами 1-ю и 3-ю строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача

3-й шаг. Обнуляем 1-й столбец. Переписываем 1-ю и 2-ю строки; из 3-ей строки вычитаем удвоенную 1-ю, а из 4-ой учетверённую 1-ю строку.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача

4-й шаг. Обнуляем 2-й столбец. Переписываем 1-ю, 2-ю и 3-ю строки; из 4-ой строки вычитаем 2-ю строку.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Задача

5-й шаг. Обнуляем 3-й столбец. Переписываем 1-ю, 2-ю и 3-ю строки; из 4-ой строки вычитаем 3-ю строку.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача

6-й шаг. Отбрасываем 4-ю строку, полностью состоящую из нулей.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой 3 строки и на главной диагонали нет нулей. Таким образом ранг исходной матрицы равен 3.

Вычисление определителя

Пример . Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Домножив первую строку на (-2), (-1), (-2) и добавляя её соответственно ко второй, третьей и четвёртой строке, получим

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя

Распишем определитель по первому столбцу:

$$D=(1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 7 & -7\\ 0 & 6 & 0\\ -6 & 7 & -1\end{vmatrix}.$$

Расписывая полученный определитель третьего порядка по второй строке,

получим

$$D=6\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -7\\ -6 & -1\end{vmatrix}=-228.$$

Система линейных уравнений

Линейным уравнением от n неизвестных $x_1,\ldots,x_n$ называется уравнением вида

$$a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,.$$

Поэтому *системой линейных уравнений (СЛУ)* называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Эта СЛУ состоит из m уравнений от n неизвестных. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной*, а если к ней приписать столбец из $b_1,\ldots,b_m$ - свободных членов СЛУ (5), то полученную матрицу называют *расширенной*. СЛУ (5) можно записать и в матричном виде

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

СЛУ называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных $(m = n)$ и основная матрица ее невырожденная.

ПРАВИЛО КРАМЕРА. *Крамеровская СЛУ имеет единственное решение* $(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$, *которое находится по формулам*

$$\overline{x_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \overline{x_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \overline{x_n} = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta -$ *определитель основной матрицы СЛУ, а* Δ_i *получается из* Δ *в результате замены в* Δ $i -$ *го столбца на столбец из свободных членов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Домножая обе части равенства (6) слева на A^{-1}, получим

$$E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Вспоминая, чему равна матрица A^{-1} и находя произведение в правой части получаем

$$\overline{x_i} = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}}{|A|}$$

Но по следствию 1 из теоремы Лапласа числитель (7) есть Δ_i, если

вычислить Δ_i, разлагая Δ_i по $i-$*му* столбцу. □

Пример . Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+3y+z=2. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. о. $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-1}{1} = -1; \quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{1} = 1; \quad z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{1} = 0.$