**Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ**

**Институт права и национальной безопасности**
**Факультет национальной безопасности**

***Тема № 7***

# «ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

## Лекция № 1

**профессор Резниченко Александр Васильевич**

**Москва – 2022**

Зачатки методов математического анализа были у древнегреческих математиков (**Архимед**, **Евдокс Книдский**).

Систематическое же развитие эти методы получили в **XVII** веке.

На рубеже **XVII** и **XVIII** веков ***И. Ньютон*** и ***Г.В. Лейбниц*** в общем и целом завершили создание ***дифференциального*** и ***интегрального*** исчисления, а также положили основу учения о ***рядах*** и ***дифференциальных уравнениях***.

***Леонард Эйлер*** в **XVIII** веке разработал два последних раздела и заложил основу других дисциплин математического анализа.

Дальнейшее развитие анализа связывают с именами таких ученых **XIX и XX** веков, как ***О.Л. Коши*** и ***М.Э.К Жордан*** во Франции,

***Н.И. Лобачевский*** в России и

***С.П. Новиков*** в СССР,

***Н.Х. Абель*** в Норвегии,

***Г.Ф.Б. Риман*** и

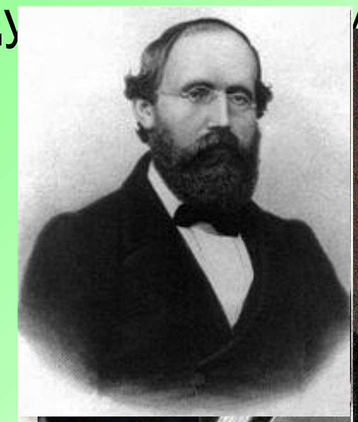
***Г.Ф.Л.Ф. Кантор*** в Германии и др.

***Математическим анализом*** называют систему дисциплин, которые объединены следующими характерными чертами.

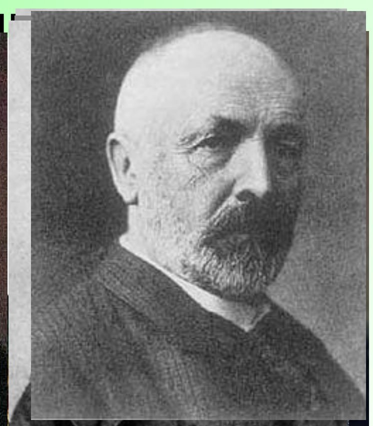
Предметом их изучения являются ***количественные соотноше-ния*** действительного мира (в отличие от геометрических дисциплин, занимающихся ***пространственными его свойствами***).

Эти соотношения выражаются с помощью ***числовых величин***, но в отличие от арифметики и алгебры, где рассматриваются преимущест-венно ***постоянные величины*** (они характеризуют ***состояния***), в анализе - это ***переменные величины***, характеризующие процессы.

В основу изучения зависимости между ... кладутся понятия ***функции*** и ***предела***.



**Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор**



**Георг Фридрих Бернхард Риман**

## УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Понятие функции. Основные свойства и классификация
2. Предел функции. Основные теоремы о пределах
3. Непрерывность функции

# Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2016.
2. Ахтямов М.А. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Попов А.М. Сотников В. Н. Высшая математика для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – М.: Изд. "Юрайт", 2014.
4. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум / Под ред. проф. Кремера Н.Ш. – М.: Изд. "Юрайт", 2016.

## ПЕРВЫЙ ВОПРОС

# Понятие функции. Основные свойства и классификация

**Определение.**

**Функция** – математическое понятие, отражающее связь между элементами различных множеств; «**закон**», по которому каждому элементу одного множества $X$ ставится в соответствие один и только один элемент другого множества $Y$ ($X$ отображается в $Y$):

$$f : X \to Y$$

**Определение.**

Множество $X$ называется ***областью определения*** (***задания***) ***функции*** $y = f(x)$, а множество $Y$ – ***областью значений*** (***изменения***) ***функции*** .

При этом переменная $x$ называется ***аргументом функции*** или ***независимой переменной***, а элемент $y$, соответствующий конкретному элементу $x$ – ***значением функции*** $y = f(x)$ в точке $x$.

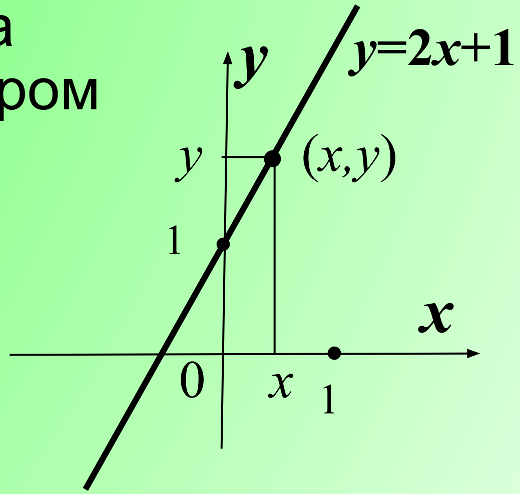
**Пример.**

Область определения функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ есть полуинтервал $(-\infty, 10]$, так как $10 - x \geq 0$. Если же переменная $x$, например, обозначает время, то областью определения функции будет отрезок $[0,10]$.

# Способы задания функции

1. ***Аналитически*** – формулой, связывающей элементы $x$ и $y$:
   а) *в явном виде*; б) *в неявном виде*; в) *параметрически*;
   г) *в виде обратной функции*; д) *в виде сложной функции.*

2. ***Графически*** – в виде изображения графика функции на координатной плоскости, в котором аргументу $x$ соответствует ось *абсцисс*, а значению функции $y$ - ось *ординат*.




3. ***Таблицей***:

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

4. ***Алгоритмом*** ее ***вычисления*** или ***составления*** (в том числе ***вербально***), например, функция ***Дирихле***.

5. ***Рекурсивно*** – когда одни значения функции определяются через другие ее значения, например: $n! = (n-1)!\cdot n$.

**Определение.**

Функция называется ***явной***, если она задается формулой $y = f(x)$, в которой правая часть не содержит зависимой переменной, например, $y = 2x + 1$.

**Определение.**

Функция $y$ аргумента $x$ называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной, например, $y - 2x - 1 = 0$, $y + \sin y - 2x + 7 = 0$.

**Определение.**

***Параметрическим представлением функции*** называется разновидность представления переменных, когда их зависимость выражается через дополнительную величину – ***параметр***.

**Пример.**

***Параметрическое представление*** верхней полуокружности $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ имеет вид при $t \in [0, \pi]$.

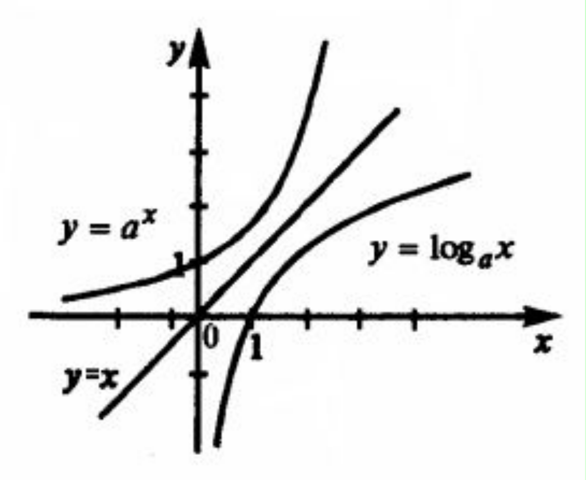
$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

**Определение.**

Пусть $y = f(x)$ есть функция независимой переменной $x$, определенной на множестве $X$ с областью значений $Y$. При этом каждому $y \in Y$ соответствует ***единственное*** значение $x \in X$ такое, что $f(x) = y$.

Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве $Y$ с областью значений $X$, называется ***обратной***.

Обозначение: $y = f^{-1}(x)$.




*Графики* ***взаимно обратных функций*** *симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов*

**Определение.**

Если функция $y = f(u)$ есть функция переменной $u$ (определенной на множестве $U$ с областью значений $Y$), а переменная $u$, в свою очередь, также является функцией $u = \varphi(x)$ (определенной на множестве $X$ с областью значений $U$), то заданная на множестве $X$ функция $y = f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией.***

**Определение.** ***Графиком функции*** $y = f(x)$ $(F(x, y) = 0)$ называется множество точек $(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют этой формуле (уравнению).

**Замечание.** *Не всякая линия является графиком какой-либо функции.*

Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждое $x$ из отрезка [-1,1] входит не в одну, а в две пары чисел $(x, y)$ этого множества с разными значениями $y$: $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, что *противоречит требованию однозначности* в определении функции.

Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является *графиком функции* $y = -\sqrt{1 - x^2}$, а ее часть, лежащая в верхней полуплоскости – *графиком функции* $y = \sqrt{1 - x^2}$.

**Определение.** Уравнение $F(x,y) = 0$ называется ***уравнением линии L на плоскости*** (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты $x$ и $y$ любой точки, лежащей на линии $L$, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

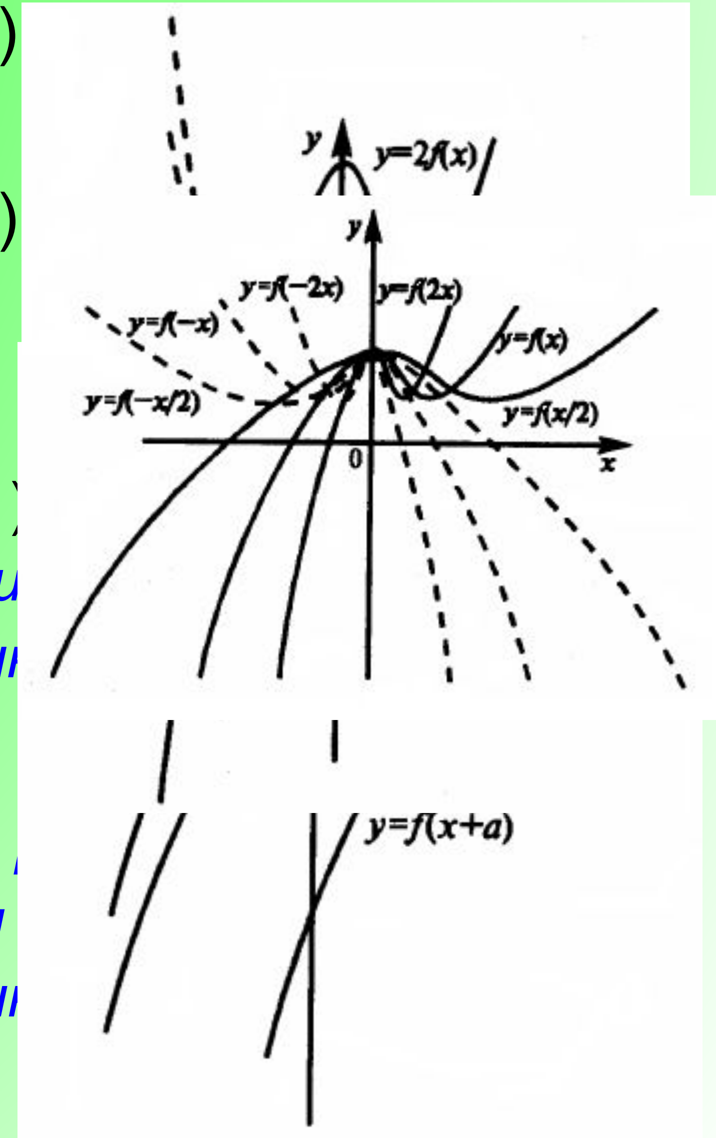
## **ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ**:

1. $y = f(x + a)$ – *сдвигает график* $y = f(x)$
$|a|$ единиц ($a > 0$ – *влево*, $a < 0$ – *вправо*).

2. $y = f(x) + b$ – *сдвигает график* $y = f(x)$
$|b|$ единиц ($b > 0$ – *вверх*, $b < 0$ – *вниз*).

3. $y = mf(x)$ $(m \neq 0)$ – *растягивает* $(m > 1$
*в* $m$ *раз* график $y = f(x)$ *относительно оси*
При $m < 0$, *кроме того, симметрич*
*относительно оси* $Ox$.

4. $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ – *сжимает* $(k > 1)$ или
*в* $k$ *раз* график $y = f(x)$ *относительно оси*
При $k < 0$, *кроме того, симметрич*
*относительно оси* $Oy$.



## Основные свойства функций

**Определения.**

1. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любых значений $x$ из области определения функции $f(-x) = f(x)$, и ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$.

В противном случае $y = f(x)$ – ***функция общего вида***.

2*. Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на некотором промежутке $X$, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ таких, что } x_1 > x_2 \; (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \; (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Неубывающие или невозрастающие функции называются ***монотонными***.

3. Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) на промежутке $X$, если

$$\exists M \; (m) \text{ такие, что } \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M \; (f(x) \geq m).$$

4. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если $f(x + T) = f(x)$ для любых $x \in X$.

## Основные элементарные функции:

а) ***степенная функция*** $y = x^n$;

б) ***показательная функция*** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
($X = (-\infty; +\infty)$; $Y = (0; +\infty)$);

в) ***логарифмическая функция*** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
($X = (0; +\infty)$; $Y = (-\infty; +\infty)$);

г) ***тригонометрические функции***

$y = \sin x$, $y = \cos x$,
$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) ***обратные тригонометрические функции***

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
$y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

***Определение.***

**Элементарными** называются **функции**, построенные из основных элементарных функций при помощи конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ**

**Алгебраические функции**

- *целая рациональная функция* (многочлен или полином);
- *дробно-рациональная функция*;
- *иррациональная функция*.

**Трансцендентные функции (неалгебраические)**

- *показательная функция*;
- *логарифмическая функция*;
- *тригонометрические функции*;
- *обратные тригонометрические функции* и т.д.

## ВТОРОЙ ВОПРОС

# Предел функции. Основные теоремы о пределах

**Определение.**

Если каждому числу из натурального ряда чисел 1, 2, ..., $n$, ... поставлено в соответствие вещественное число $x_n$, то множество вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называется ***числовой последовательностью***.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$, ... называются ***элементами*** или ***членами последовательности***, $x_n$ – ***общим членом последовательности***, а число $n$ – его ***номером***.

Обозначение последовательности $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Определение*.** ***Последовательностью*** элементов числового множества $R$ называется отображение $f$, определенное на множестве натуральных чисел $N$ и принимающее значения в множестве $R$: $f : N \to R$.

***Элементом*** или ***членом последовательности*** $f$ называется упорядоченная пара $(n, x)$, $x = f(n)$, $n \in N$, $x \in R$.

Натуральное число $n$ называется ***номером элемента последовательности***, а число $x \in R$ – его ***значением***.

**Примеры.**

а) $x_n = const$

б) $x_n = n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{1, 2, 3, ...\}$ – натуральные числа;

в) $x_n = 1/n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{1, 1/2, 1/3, ...\}$;

г) $x_n = n \cdot (-1)^n$ т.е. $\{x_n\}$ равна $\{-1, 2, -3, 4, ...\}$.

**Определение.**

Число $A$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N$, что при всех $n \ge N$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \ge N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

**Определение.**

Правило $f$, сопоставляющее каждому числу $x \in X \subseteq R$ единственное число $y \in Y \subseteq R$, называется ***функцией*** $y = f(x)$, заданной на множестве $X$ и принимающей значения в множестве $Y$.

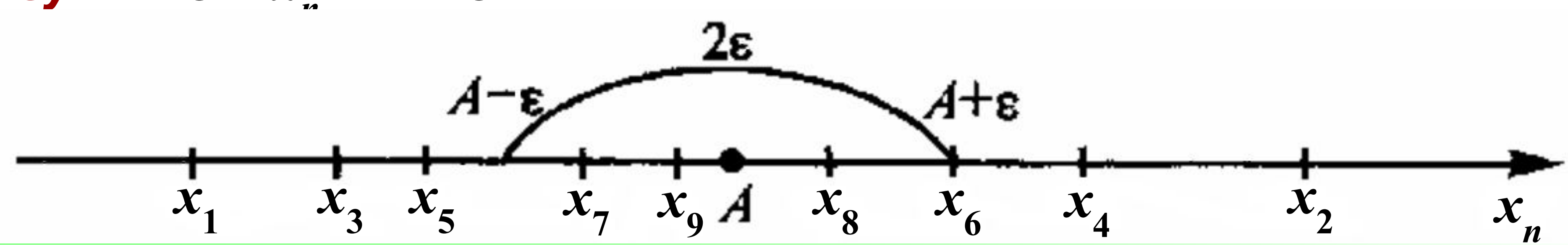
**Определение.**

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число $A$, то символически это записывается так:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

**Геометрический смысл предела числовой последовательности**

***Неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$.***



**Определение** (*предел функции по Гейне*).

Число $A$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в т*** … и для любой последовательности точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящ … о не содержащей $x_0$ в качестве одного из своих элем … в проколотой окрестности $x_0$), последовательность зна … к-ции $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $A$:


Огюстен Луи Коши

$$\lim_{x\to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} (\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \ldots A$$

**Теорема.**

***Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны***.

**Определение** (*предел функции по Коши*).


Генрих Эдуард Гейне

Число $A$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в т*** … и для любого наперед взятого числа $\varepsilon > 0$ найдется отве … у число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и удов … условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

**Определение.**

Число $A$ называется ***левым*** (***правым***) ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** $x_0$, если для любого наперед взятого числа $\varepsilon > 0$ найдется отвечающее ему число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$ ($x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Пример.**

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x_0 = 0$ правый и левый пределы.

$$\lim_{x\to x_0-0} sign\, x = -1; \quad \lim_{x\to x_0+0} sign\, x = 1.$$

**Определение.**

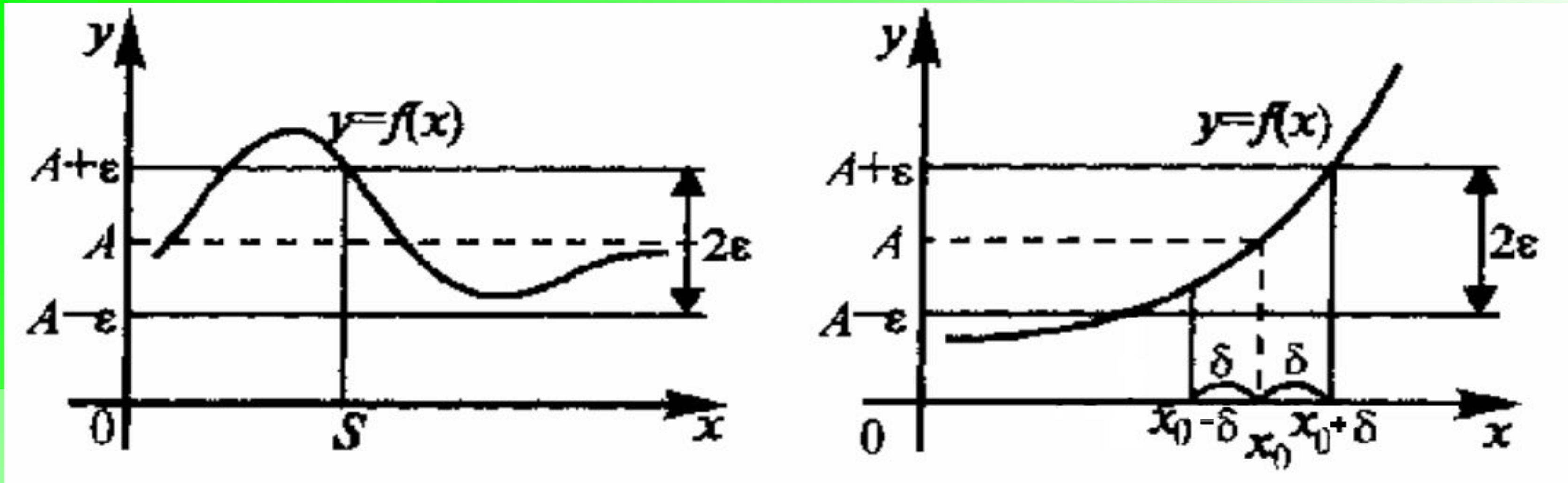
Число $A$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x$ ***стремящемся к бесконечности*** ($x \to \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $S > 0$, зависящее от $\varepsilon$, что для всех $x$, т.ч. $|x| > S$, будет верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists S(\varepsilon) > 0\ \forall x : |x| > S \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

**Пример.**

Функция $f(x) = 1/x$ имеет предел при $x \to \infty$ равный нулю.

**Геометрический смысл предела**



# Свойства бесконечно малых величин

**Определение.** Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой величиной** при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists S(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x| > S \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **бесконечно малые величины** при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то будут **бесконечно малыми величинами**:

**1.** $\alpha(x) \pm \beta(x)$; **2.** $c \cdot \alpha(x)$, $c$ – постоянная; **3.** $\alpha(x) \cdot \beta(x)$;

**4.** $f(x) \cdot \alpha(x)$, $f(x)$ – ограниченная функция;

**5.** $\alpha(x)/f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) \neq 0$.

# Сравнение порядков бесконечно малых.

**Теорема.** *Функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ предел, равный $A$, тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы этого числа $A$ и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$:*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0.$$

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **бесконечно малые величины** при $x \to x_0$ или $x \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x)/\beta(x) = k$, то

- при $k = 0$ бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка малости**, чем $\beta(x)$;
- при $k = \infty$ – **более низкого порядка малости**, чем $\beta(x)$;
- при $0 < k < \infty$ – **одного порядка малости**;
- при $k = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, например, при $x \to 0$ $\sin x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x \sim 1 + x$.

**Определение.**

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ называется ***бесконечно большой величиной*** ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$), если

$$\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\ \ \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M;$$

$$\forall M > 0\ \exists S(M) > 0\ \ \forall x : |x| > S \Rightarrow |f(x)| > M.$$

**Замечание.**

***Бесконечно большая величина*** есть функция ***неограниченная*** при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, однако ***неограниченная функция*** не обязательно является ***бесконечно большой величиной***.

**Пример.**

Функция $y = x \cdot \sin x$ является ***неограниченной***, но ***не бесконечно большой***.

$(x \to \infty)$, то функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ является ***бесконечно большой***, и обратно, если $f(x)$ – ***бесконечно большая функция*** при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то $\alpha(x) = 1/f(x)$ является ***бесконечно малой величиной***.

## Основные теоремы о пределах

**1.** Если предел существует, то он единственный.

**2.** Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

**3.** Если $\forall x \; f(x)=c \;\Rightarrow \forall x_0 \,(x\to\infty)\; \lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=c.$

**4.** $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[\lambda\cdot f(x)]=\lambda\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x).$ *Однородность*

**5.** $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$ *Аддитивность*

**6.** $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$

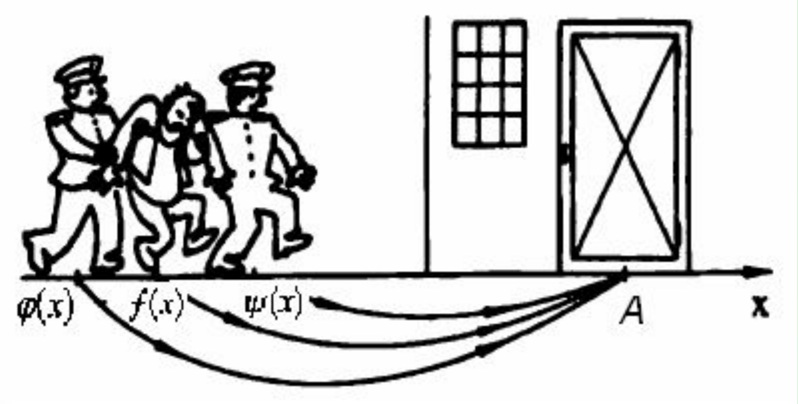
**7.** $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)},$ если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\neq 0.$

**8.** Если $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=A.$

**9.** Если $\forall x\in O(x_0,\varepsilon)\,(x\to\infty)\; f(x)<g(x)\;\Rightarrow\;\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x).$

**Замечание.**

В ***теоремах о пределах*** пред… пределов функций $f(x)$ и $g(x)$, из ч… пределах суммы, произведения частн… Обратного может и не быть.




**Примеры.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1=1,$ но $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x$ не существует.

**Первый замечательный предел**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

**Второй замечательный предел** (число **е**): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

## Признаки существования предела

1. Монотонная ограниченная в $O(x_0,\varepsilon)$ функция имеет предел в точке $x_0$.

2. Если $\forall x\in O(x_0,\varepsilon)\ (x\to\infty)\ \varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\psi(x)=A,$

то $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)=A.$

## ТРЕТИЙ ВОПРОС

# Непрерывность функции

**Определение.**

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0$, если она определена в этой точке $x_0$ и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

**Определение.** (односторонняя непрерывность функции в точке)

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0$ ***слева*** (***справа***), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) определена в точке $x_0$ (существует $f(x_0)$);
2) имеет конечный предел при $x \to x_0 - 0$ ($x \to x_0 + 0$);
3) этот предел равен значению функции в точке $x_0$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left( \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Функция $f(x)$ ***непрерывна в точке*** $x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

**Определение.**

Точка $x_0$ называется ***точкой разрыва функции*** $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной.

**Определение.**

Функция $f(x)$ имеет ***разрыв первого рода*** в точке $x_0$, если в ней существуют конечные левый и правый пределы, но они не совп… …е.

**Опр…**

Фу… …и в ней … …ый или …

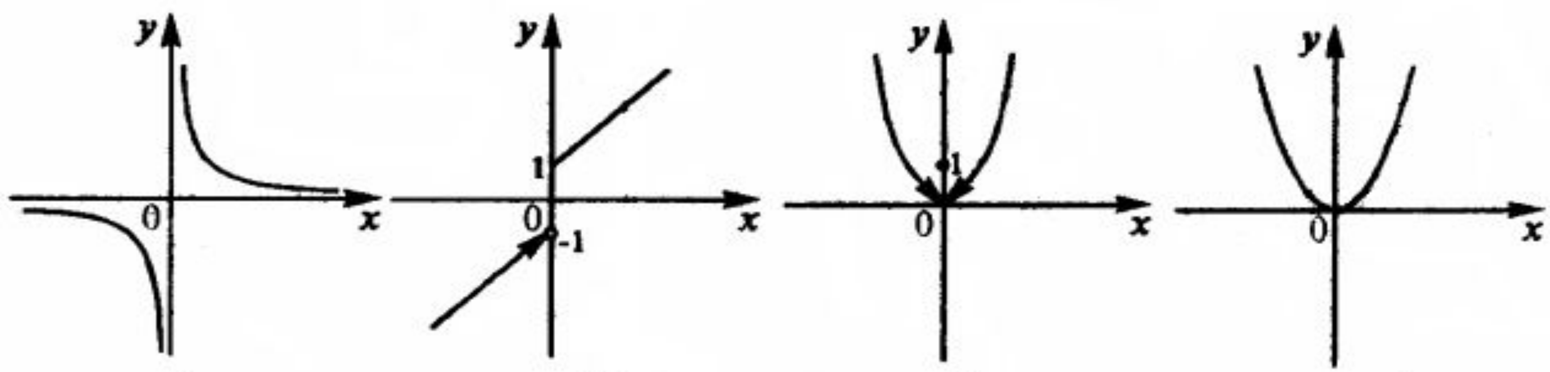
**Опр…**

То… …ии $f(x)$, … …ен знач…

**Пример.**

Исследовать точки разрыва заданных функций.

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\begin{cases}x+1 & \text{при } x\ge 0,\\ x-1 & \text{при } x<0;\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\ne 0,\\ 1 & \text{при } x=0;\end{cases}$ г) $y=x^2$.




Разрыв 2 рода

Разрыв 1 рода

Устранимый разрыв

г)

## Свойства функций, непрерывных в точке

**1.** Если $f(x)$ непрерывна точке $x_0$, то $\exists\ \varepsilon > 0$ такой, что $f(x)$ ***ограни-чена в*** $O(x_0, \varepsilon)$ ***этой точки***.

**2.** Если $f(x)$ непрерывна точке $x_0$, то $\exists\ \varepsilon > 0$ такой, что $\forall x \in O(x_0, \varepsilon)$ этой точки $f(x)$ ***имеет тот же знак***, ***что и*** $f(x_0)$.

**3.** Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны точке $x_0$, то в ней ***непрерывны*** $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $f(x)/g(x)$, если $g(x_0) \neq 0$.

**4.** Пусть функция $y = f(u)$ непрерывна в некоторой точке $u_0$, а функция $u = g(x)$ – в точке $x_0$, причем $u_0 = g(x_0)$. Тогда ***сложная функция*** $y = f(g(x))$ ***будет непрерывна в точке*** $x_0$.

***Следствие.***

Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям свойства **4**, то

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

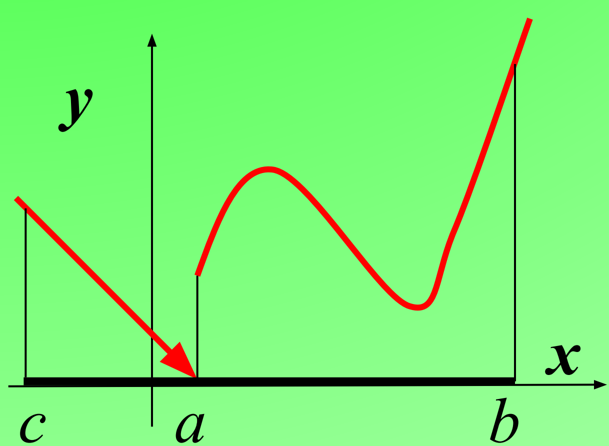
**Определение.**

Функция называется ***непрерывной на некотором промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.


**Пример.**

***Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.***

***Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены***.




**Определение.**

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна на интервале $(a,b)$, непрерывна справа в точке $a$ и непрерывна слева в точке $b$.

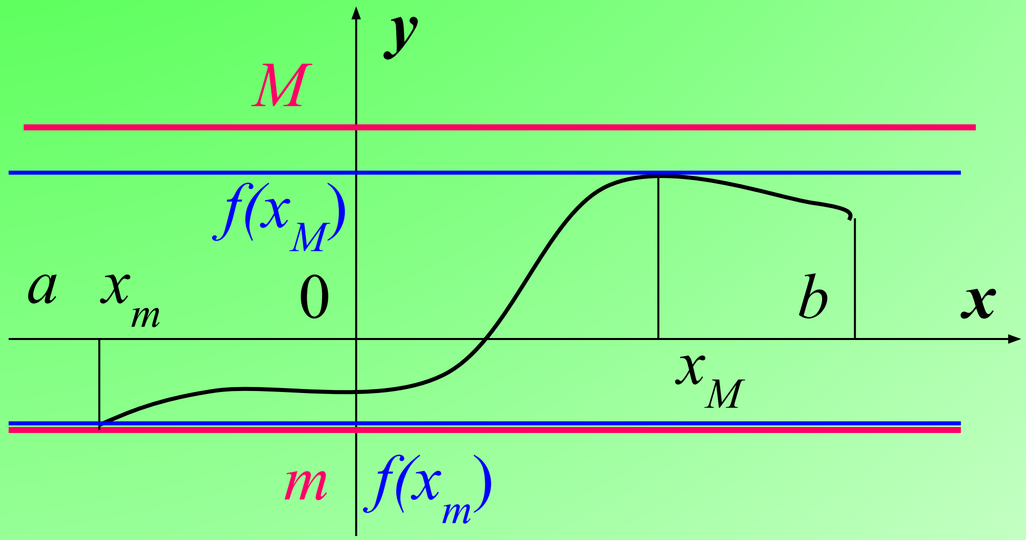
# Свойства функций, непрерывных на отрезке

**1.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ***ограничена на нем*** (***1-я теорема Вейерштрасса***)

$$\exists M, m \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow m \le f(x) \le M;$$

**2.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ***принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения*** (***2-я теорема Вейерштрасса***)

$$\exists x_M, x_m \in [a,b] \ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow \ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$




Карл Вейерштрасс

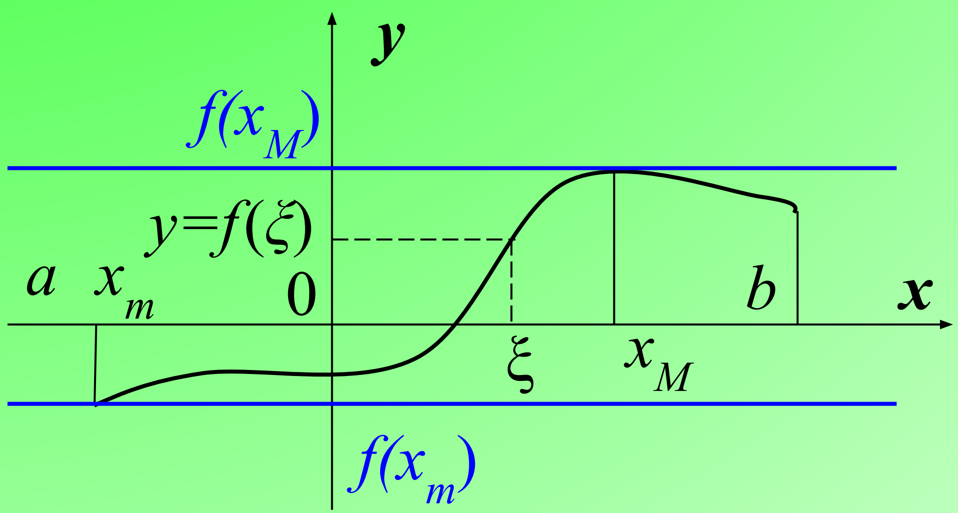
## Свойства функций, непрерывных на отрезке

**3.** Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то она ***равна нулю в некоторой точке интервала*** $(a, b)$ (***1-я теорема Больцано-Коши***)

$$f(a)\cdot f(b) < 0 \;\Rightarrow\; \exists \xi \in (a,b)\;\; f(\xi) = 0;$$

**4.** Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ***принимает на нем любое значение между своими наибольшим и наименьшим значениями*** (***2-я теорема Больцано-Коши***)

$$\forall y \in [f(x_m), f(x_M)] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]\;\; f(\xi) = y.$$




Бернард Больцано

Огюстен Луи Коши

# Благодарю за внимание, лекция окончена!