

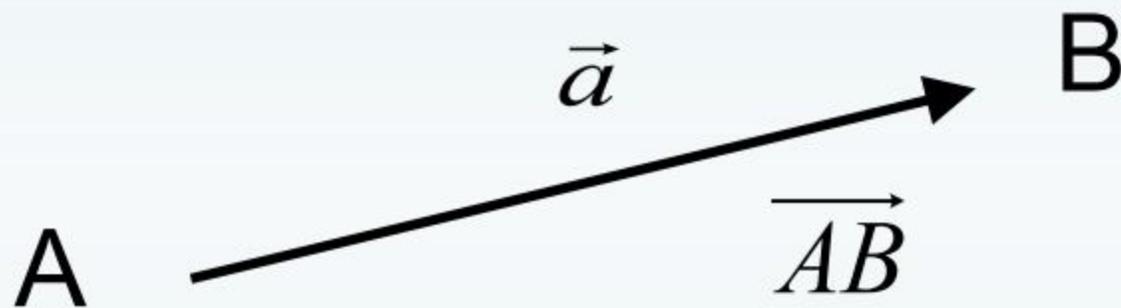
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Основные понятия

Вектор: направленный отрезок, с началом в точке A , а концом – в точке B .



Вектор: направленный отрезок,
с началом в точке А, а концом – в точке В.



Длина (модуль) вектора \overrightarrow{AB} : длина отрезка АВ

$$|\overrightarrow{AB}| \quad |\vec{a}|$$

Коллинеарные:

векторы, параллельные одной и той же прямой

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

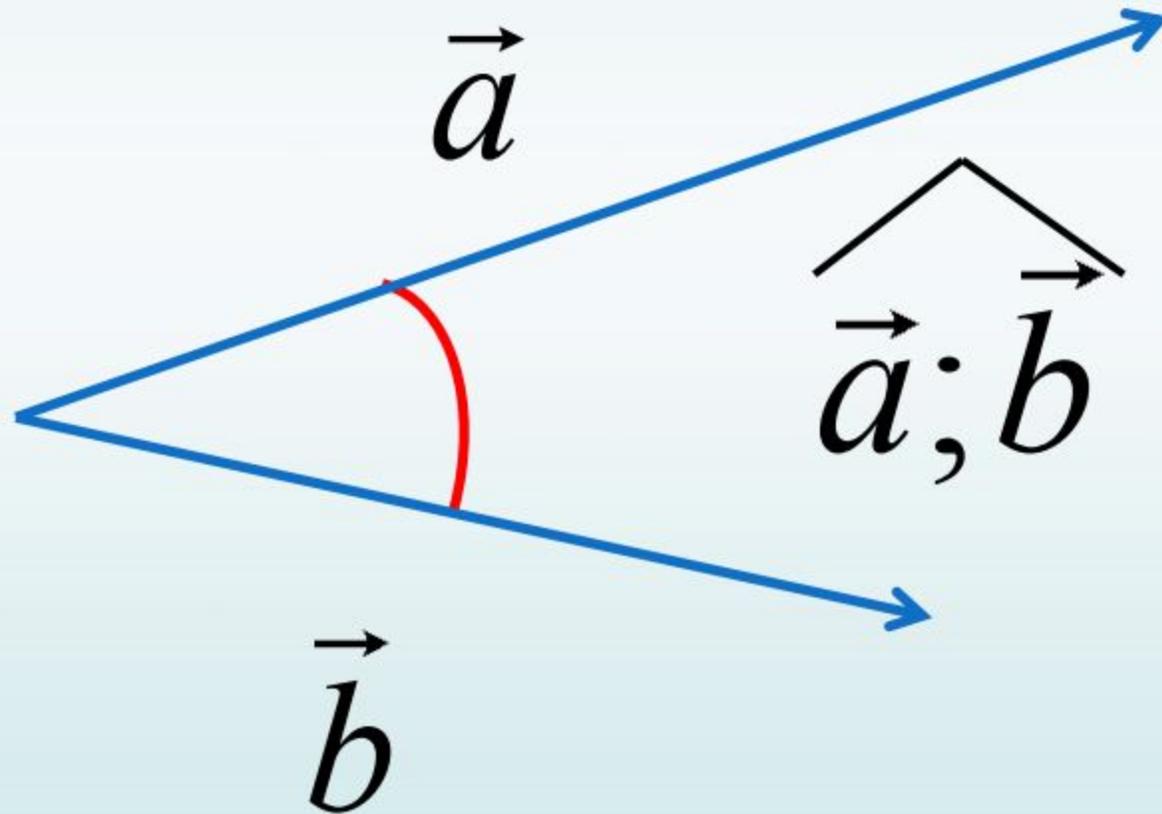
Компланарные:

векторы параллельные одной и той же плоскости

Ортогональные:
векторы, направления которых
взаимно перпендикулярны

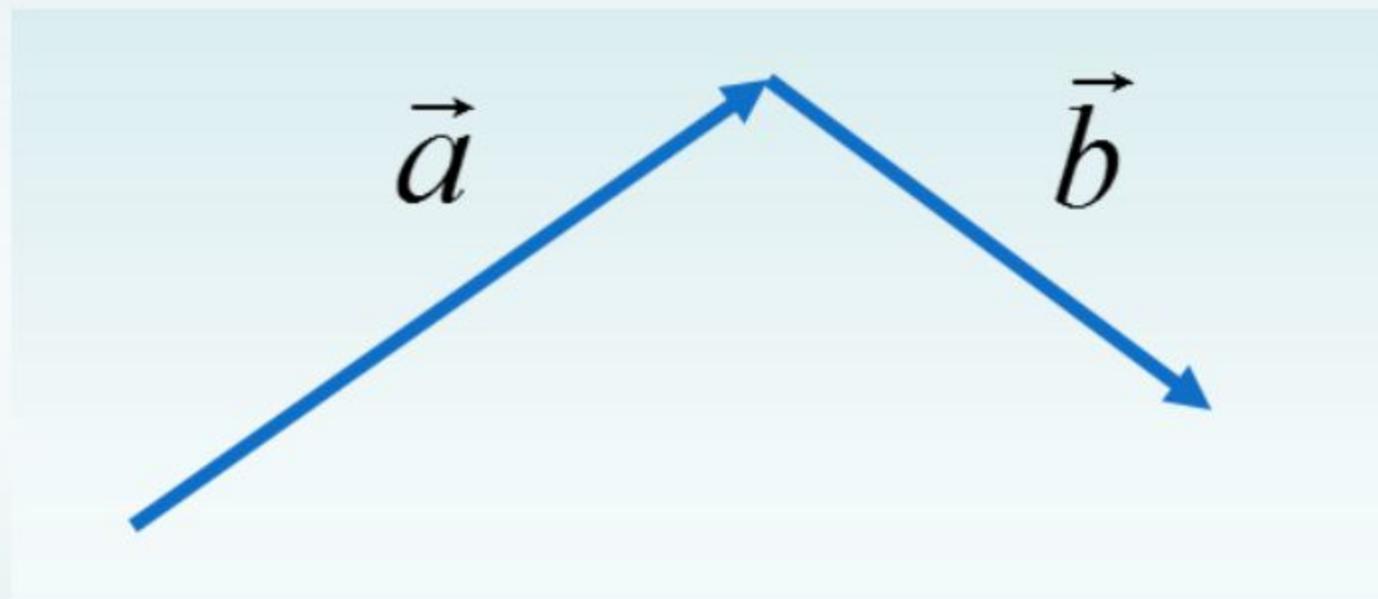
$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Угол между векторами:
наименьший угол между
лучами, на которых они лежат

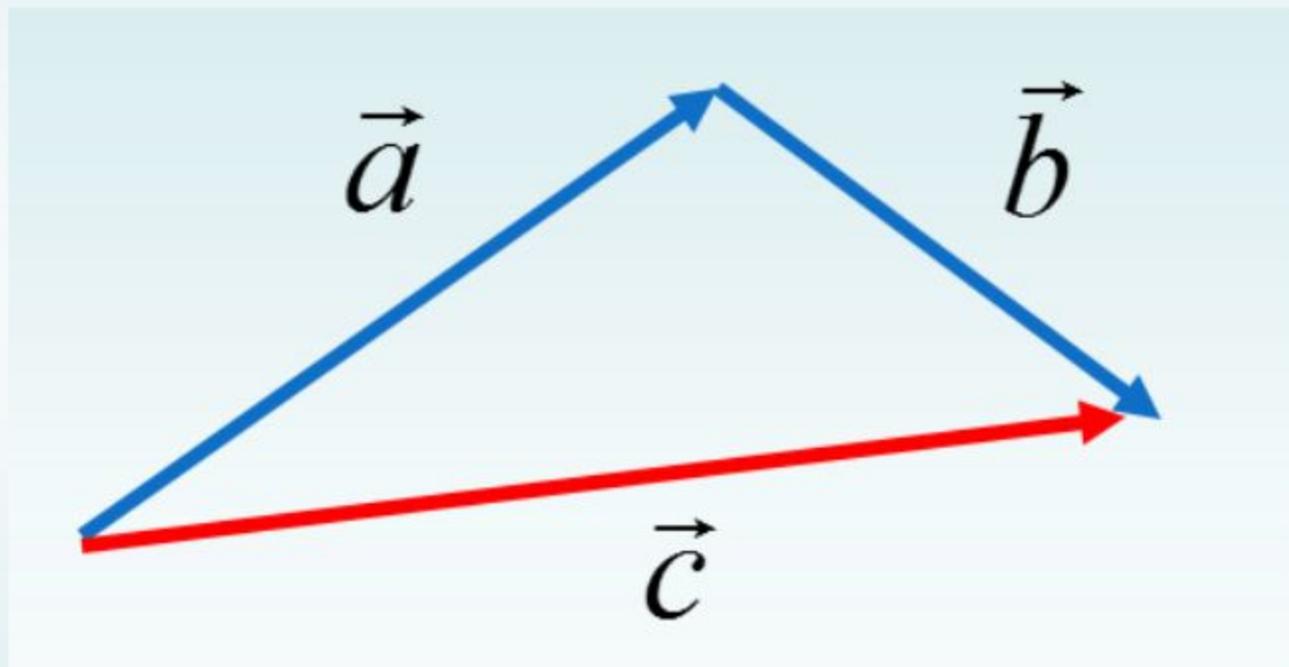


2.2. Линейные операции с векторами

1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

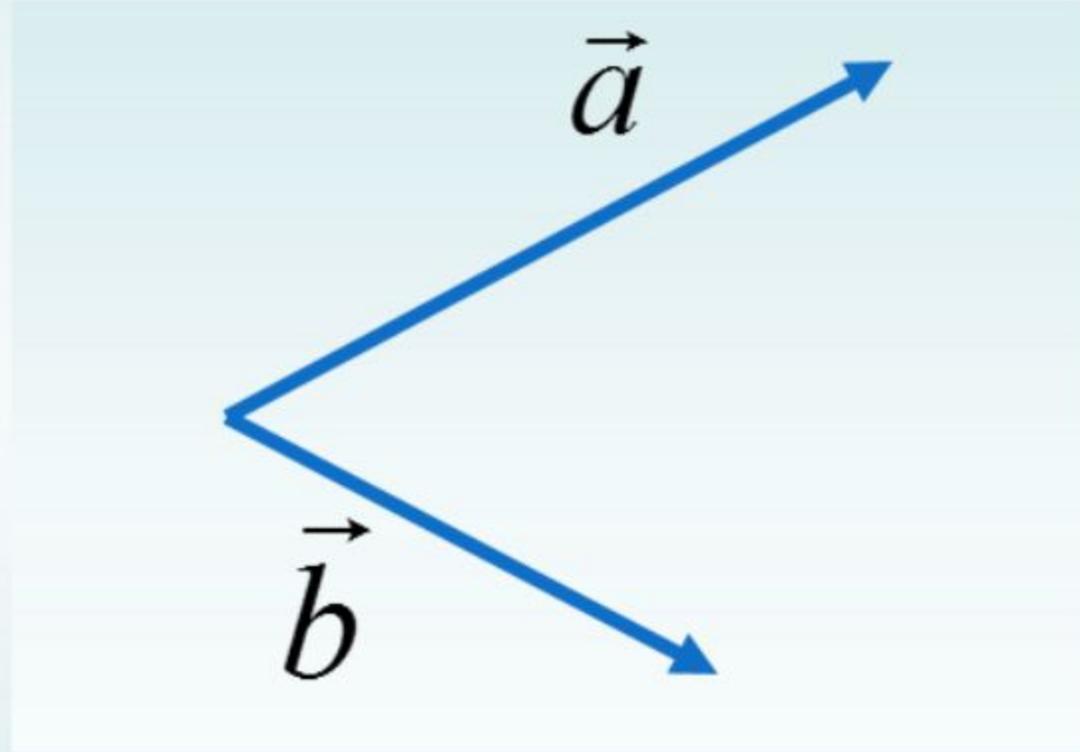


1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

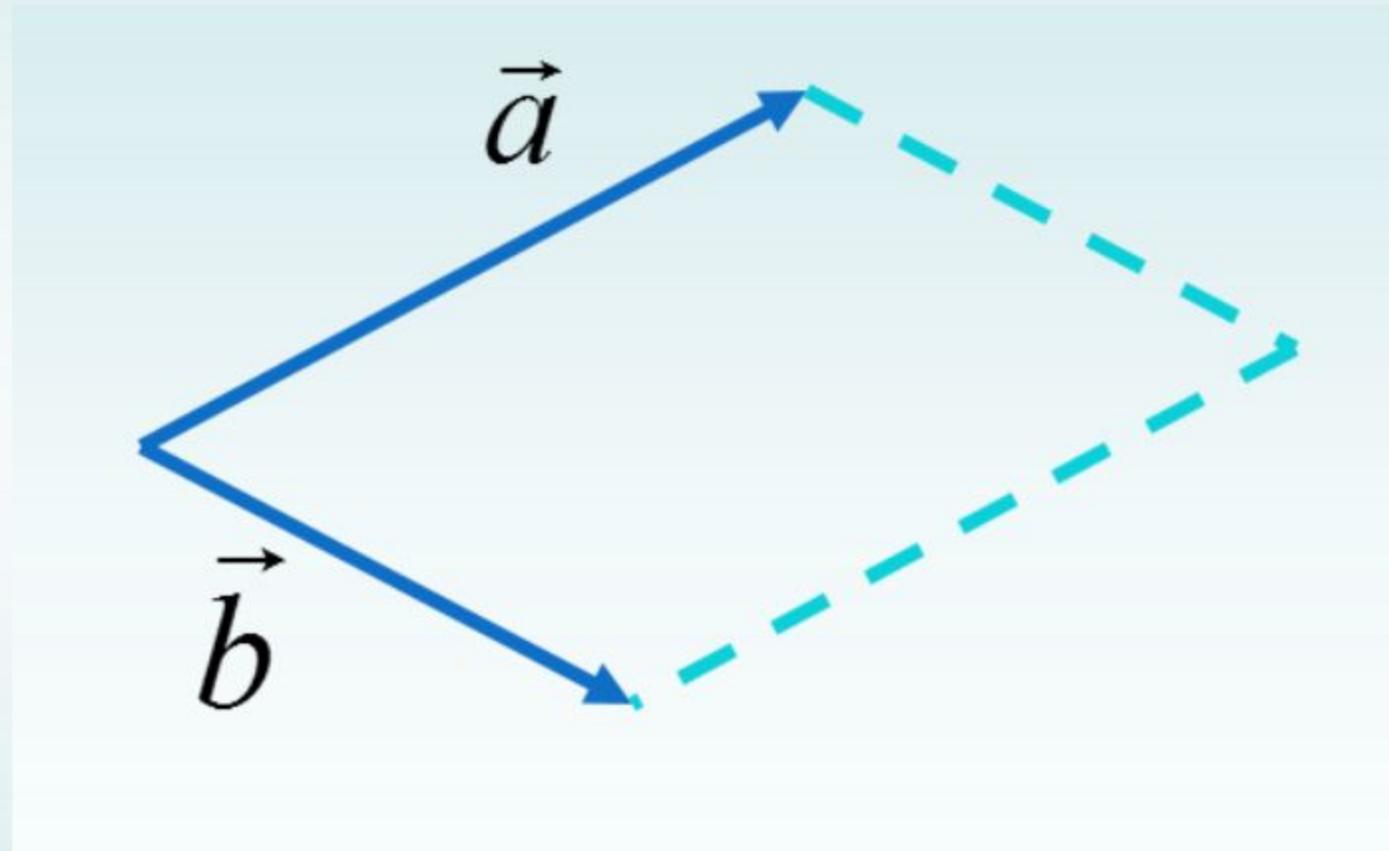


1. Сложение

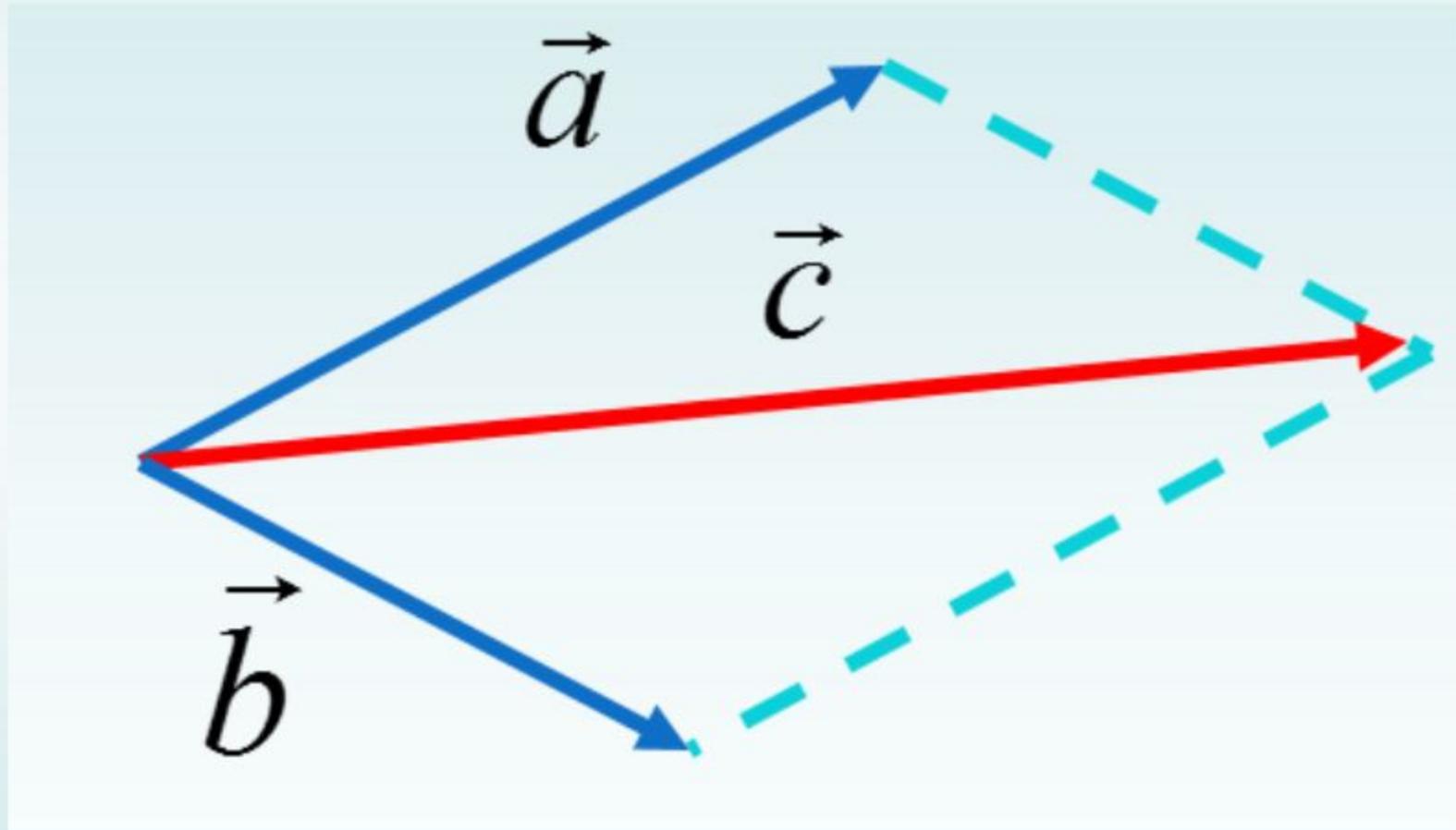
$$c = \vec{a} + b$$



1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

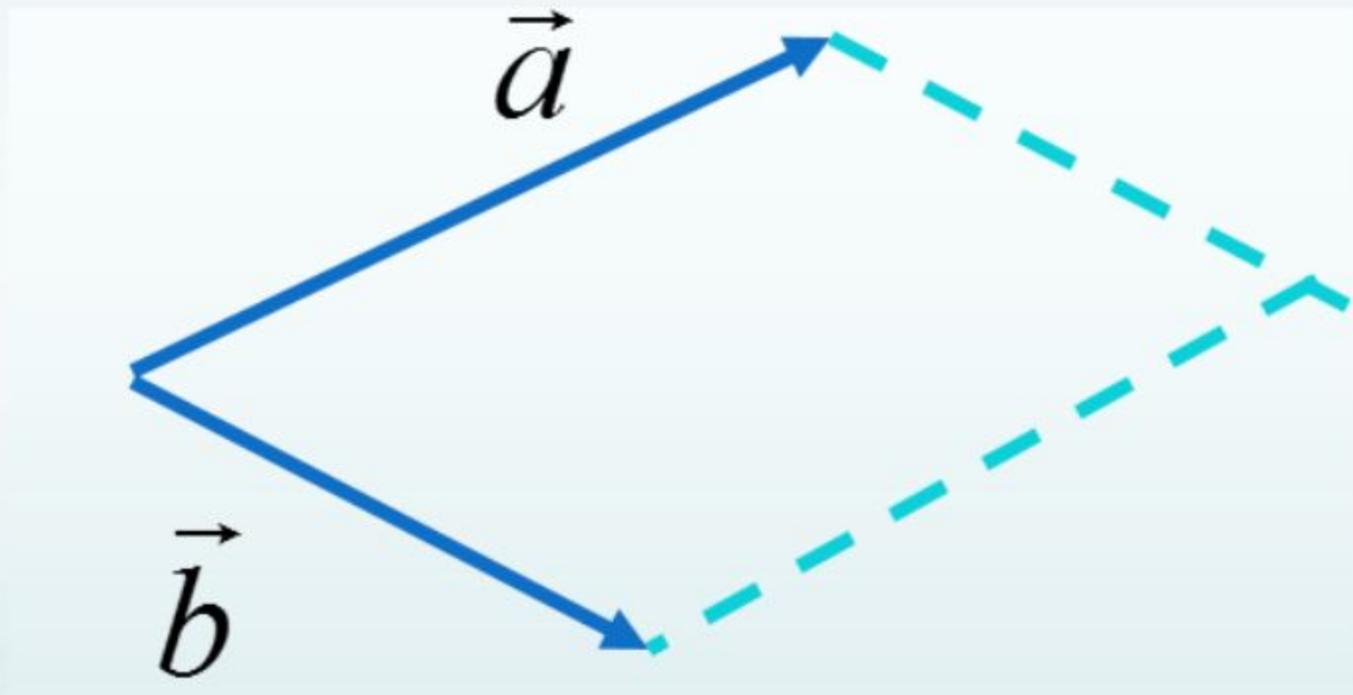


1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



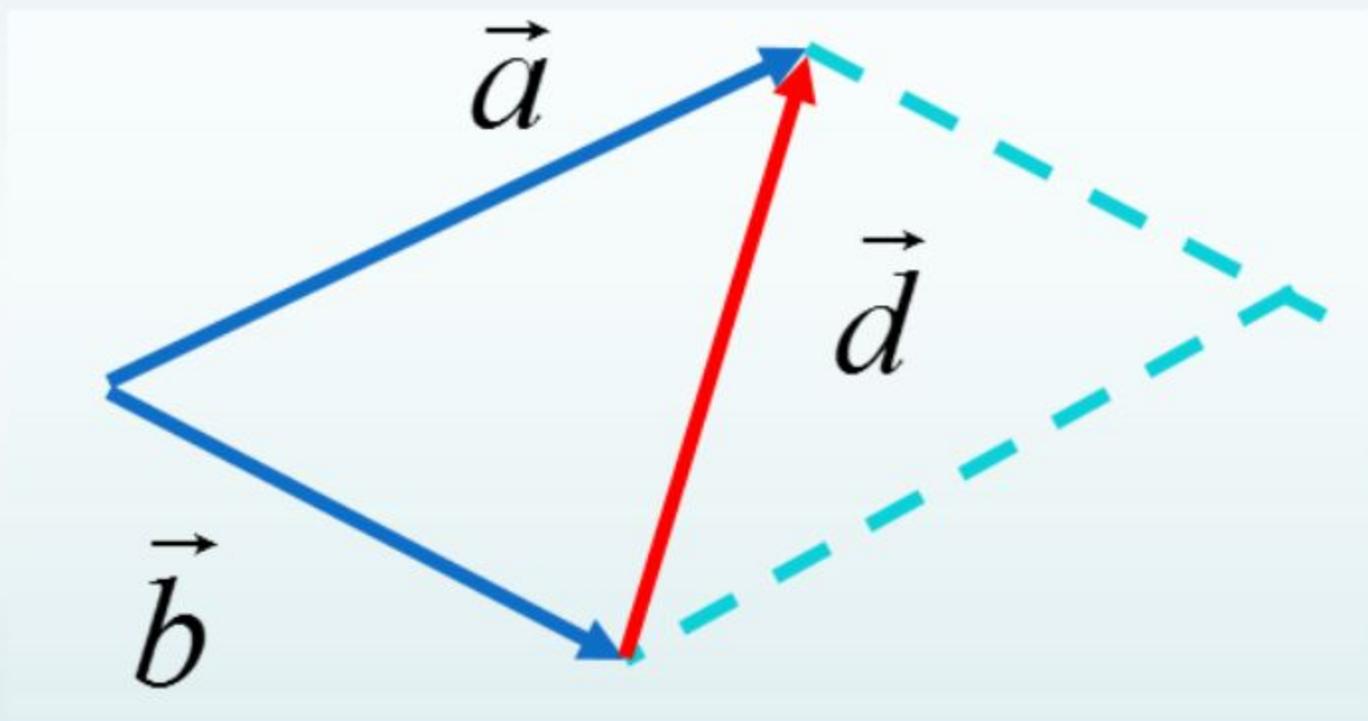
2. Вычитание

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



2. ВЫЧИТАНИЕ

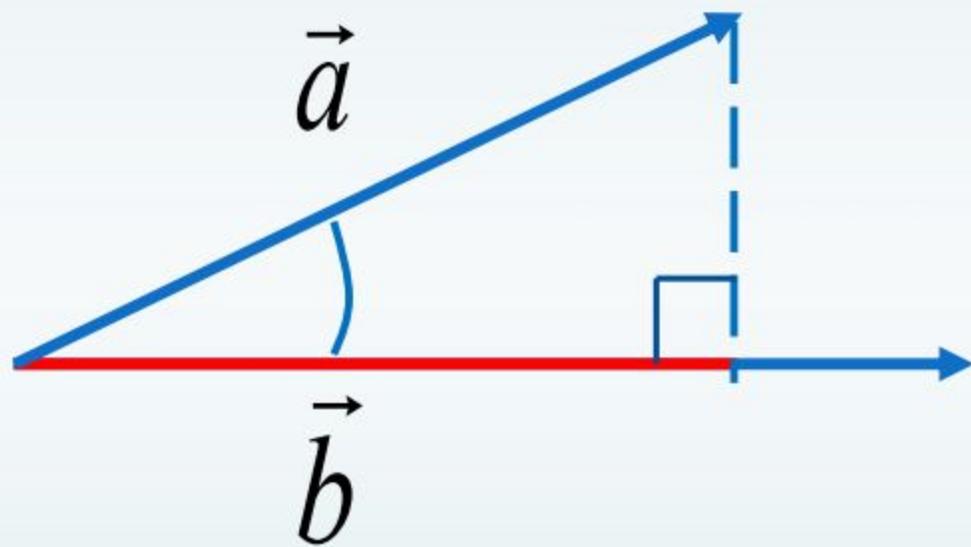
$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



3. При **умножении вектора на число** его длина умножается на это число, а направление:

- сохраняется (если число положительное),
- меняется на противоположное (если число отрицательное).

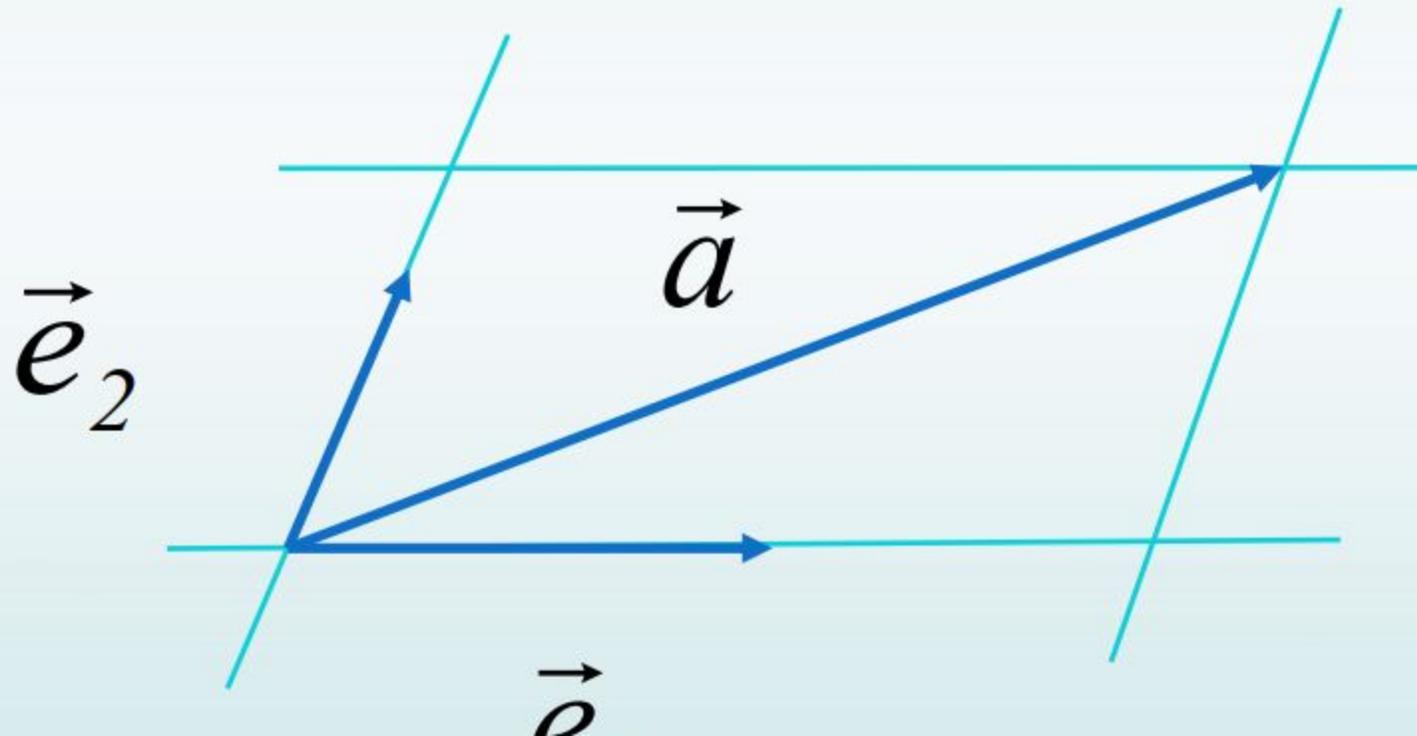
4. Проекция вектора \vec{a} на ненулевой вектор \vec{b} :



$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

2.3. Координаты вектора

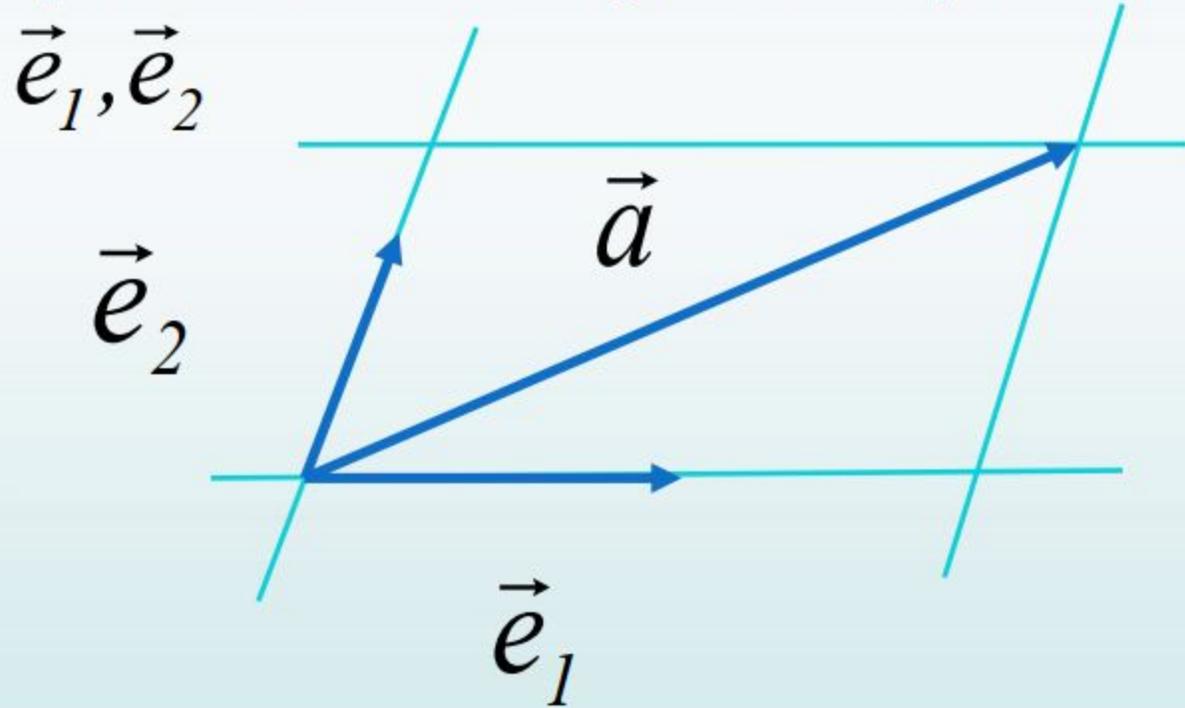
Базис на плоскости: упорядоченная пара неколлинеарных векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 , отложенных от одной точки



базис e_1, e_2 , то каждый вектор a этой плоскости может быть однозначно представлен в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

-разложение вектора по базису векторов

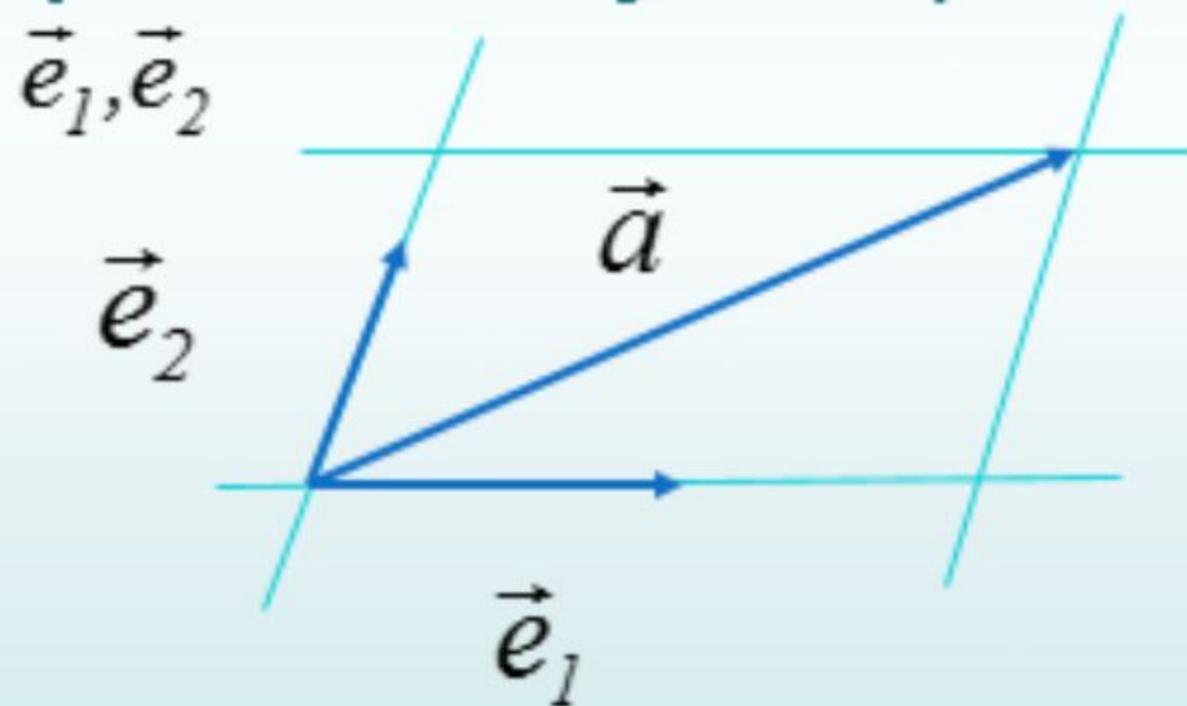


$\vec{a} = (x, y)$ -координаты вектора в данном базисе

теорема: Если на плоскости выбран некоторый базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 , то каждый вектор \vec{a} этой плоскости может быть однозначно представлен в виде:

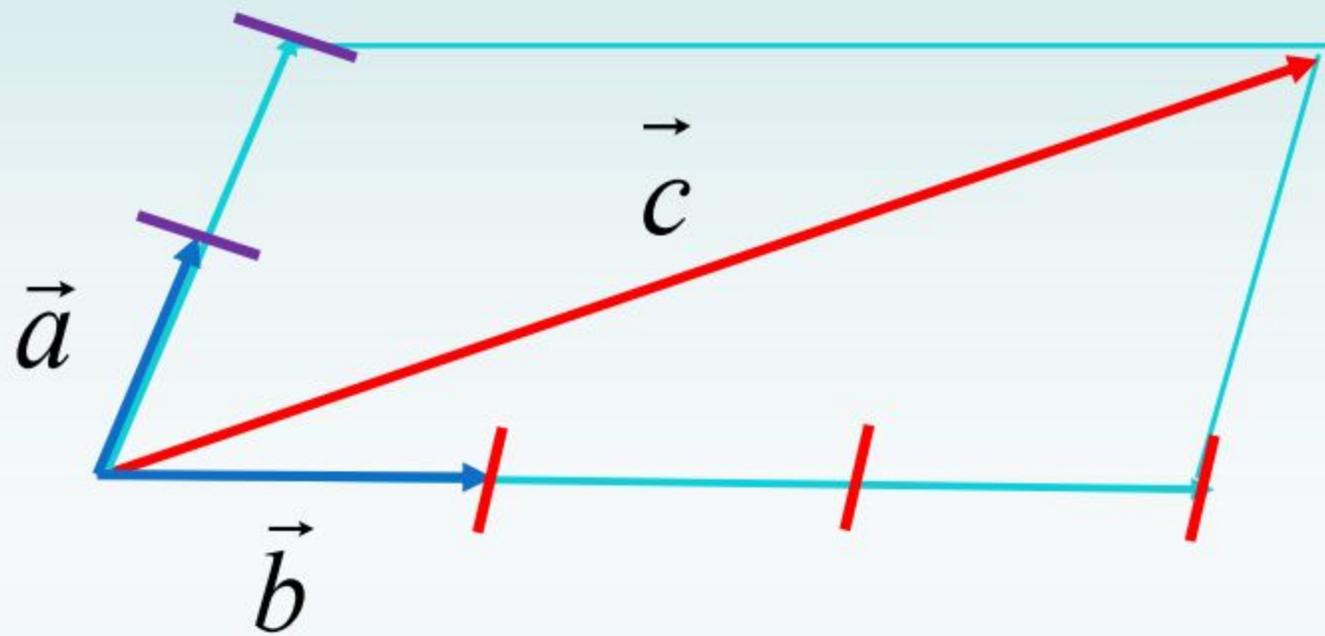
$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

-разложение вектора по базису векторов



$\vec{a} = (x, y)$ -координаты вектора в данном базисе

Например:



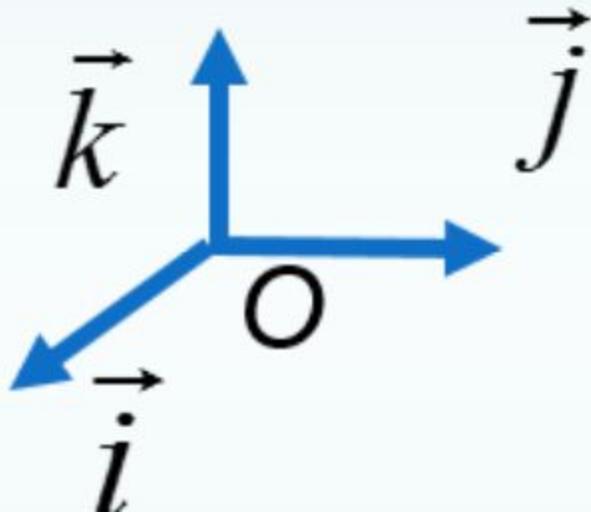
$$2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

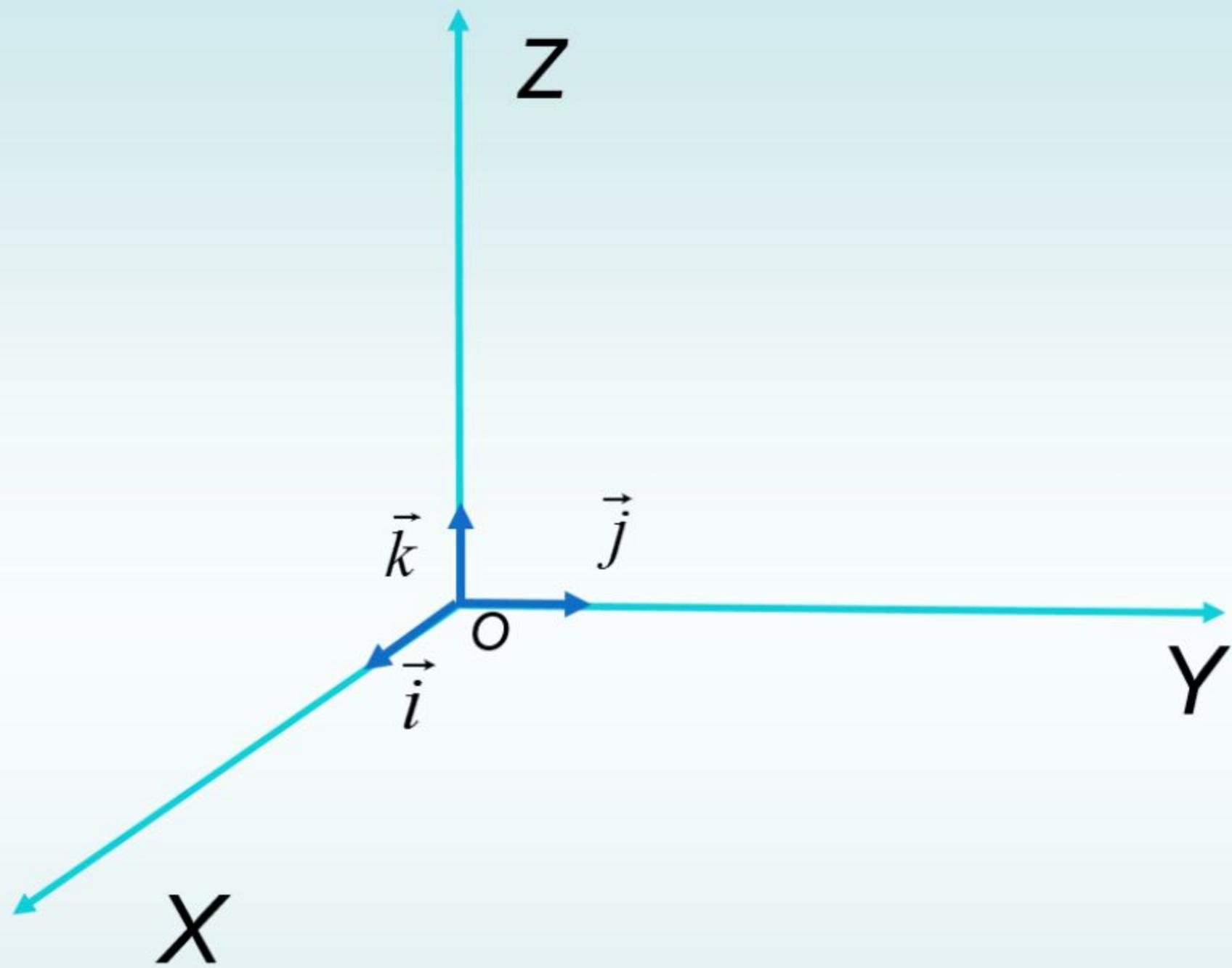
$$\vec{c} \quad (2; 3)$$

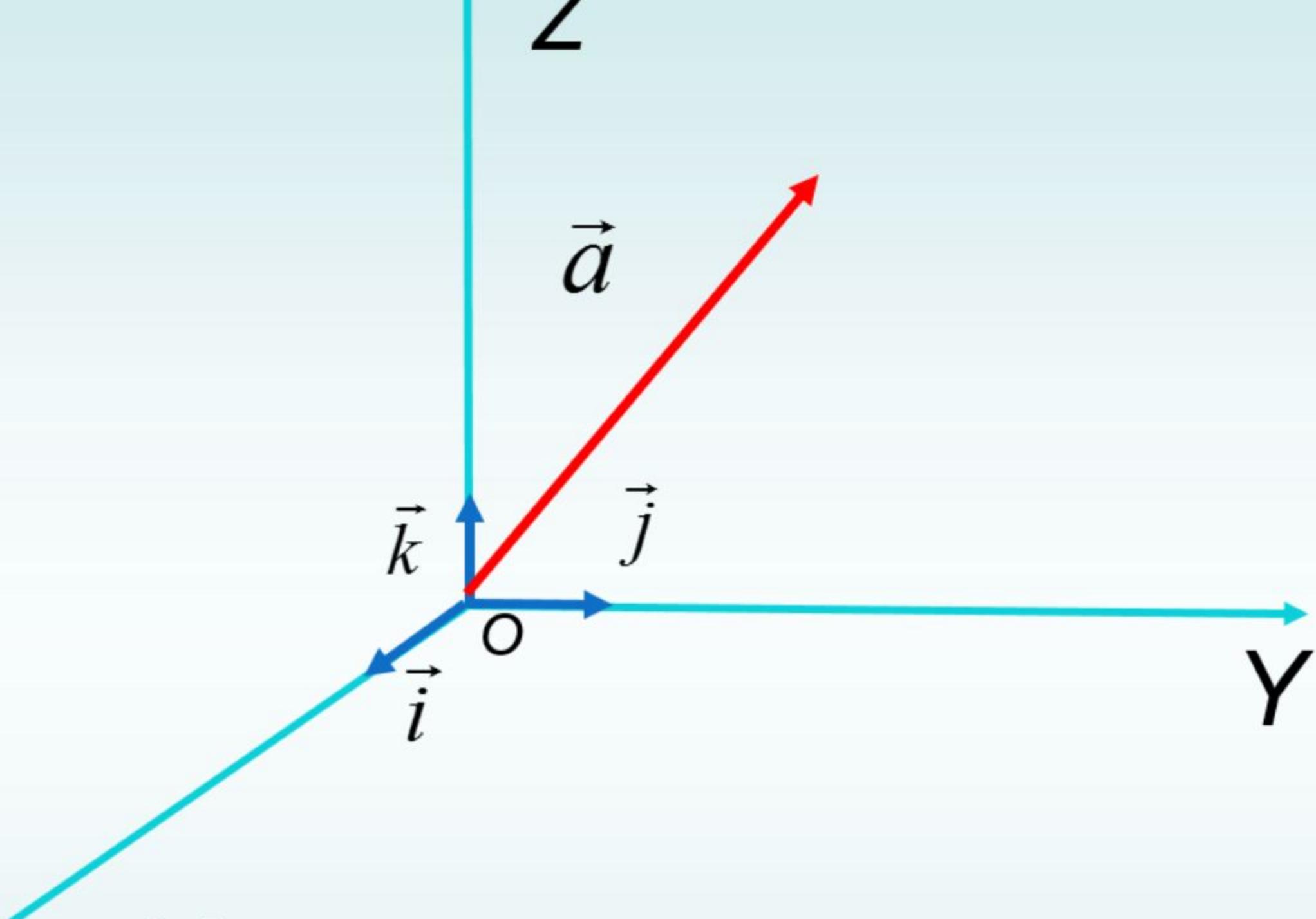
2.4. Декартова прямоугольная система координат

$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

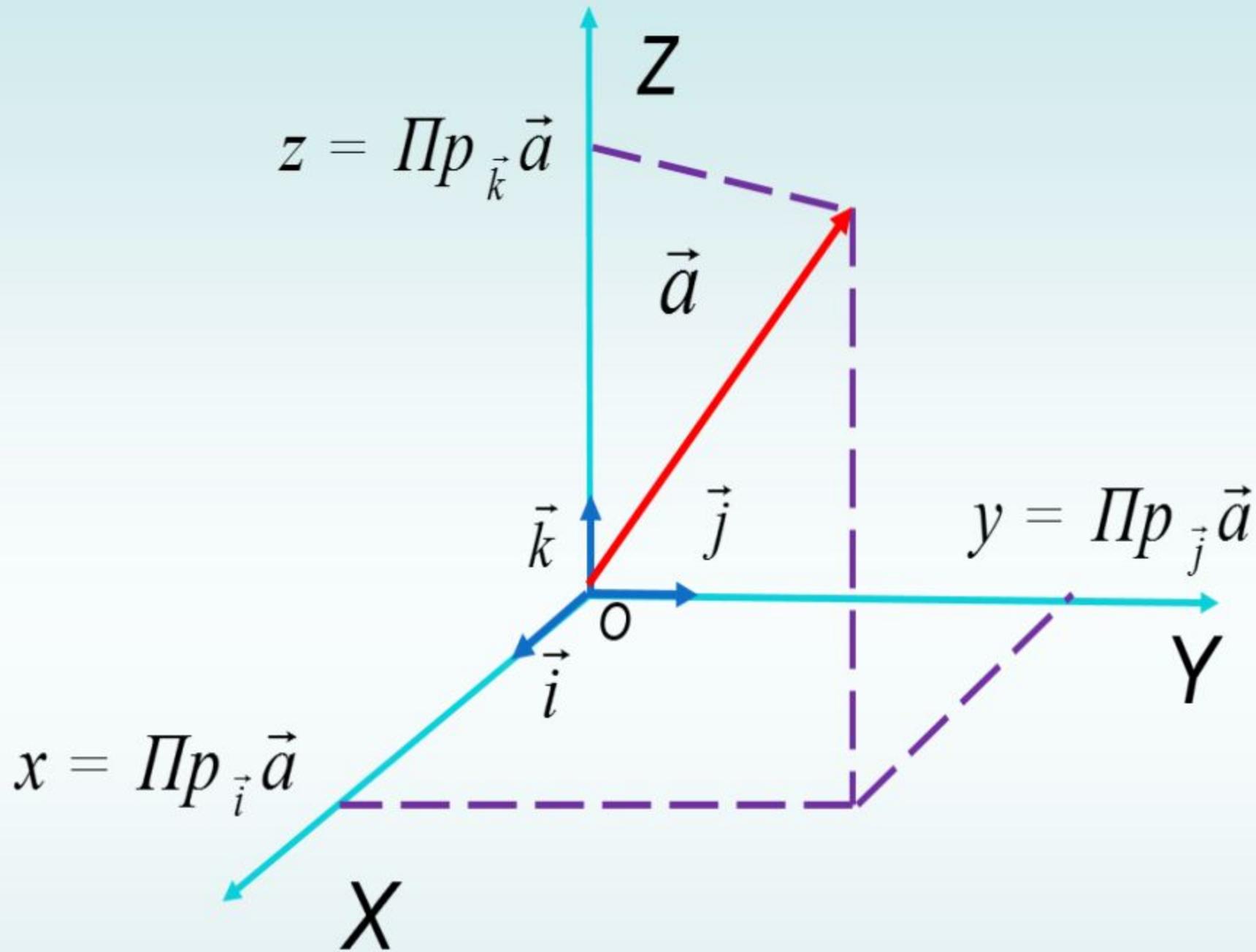
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

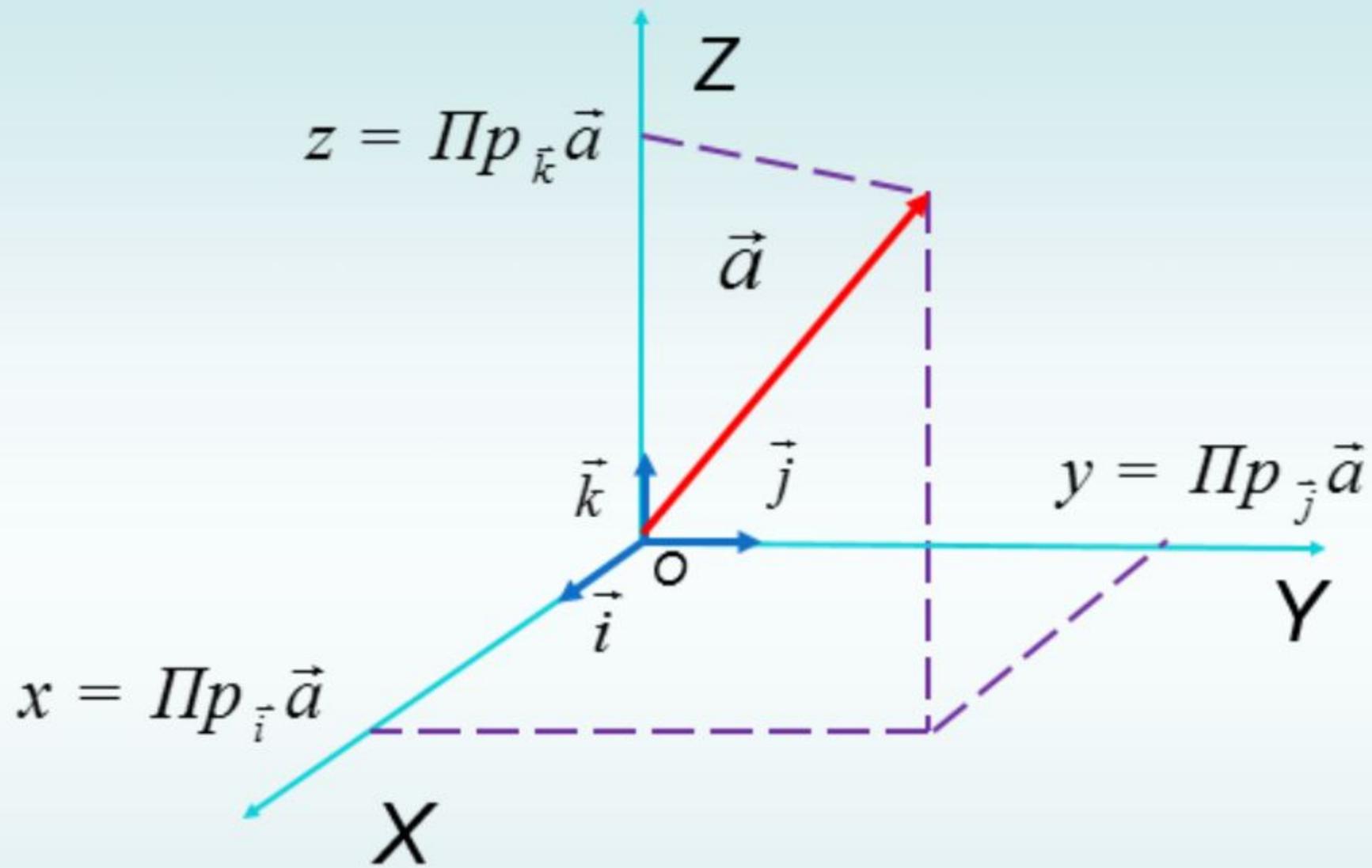






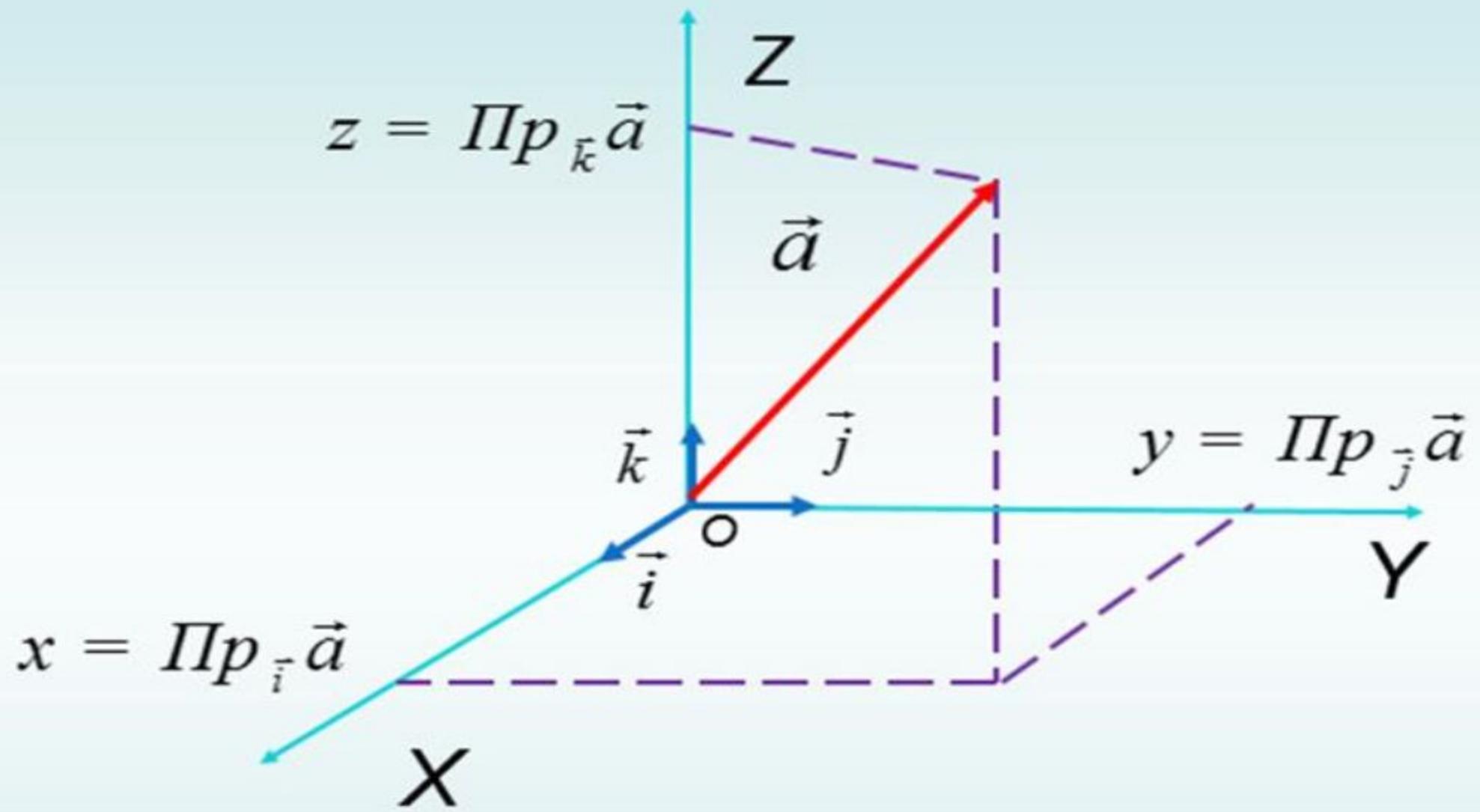
Декартова прямоугольная система координат





$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = (x, y, z)$$



$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = (x, y, z)$$

в координатной форме

Координаты вектора \vec{a}

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$$

Координаты вектора \vec{b}

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

Координаты суммы векторов

$$1. \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$$

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

Координаты вектора после умножения
на число

$$2. \quad k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1).$$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$$

Координаты точки А $A(x_A, y_A, z_A)$

Координаты точки В $B(x_B; y_B; z_B)$

Координаты вектора \overrightarrow{AB}

$$3. \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Координатный признак коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Задание. Найти координаты вектора \overrightarrow{AB}
если $A(2;0;-3)$, $B(-5;1;0)$.

Варианты а. $(-7;-1;-3)$ б. $(7;-1;3)$

ответов: с. $(7;-1;-3)$ д. $(-7;1;3)$

Задание. Найти координаты вектора \overrightarrow{AB}
если $A(1;2;3)$, $B(0;-5;-2)$.

Варианты **a.(1;-3;1)** **b.(-1;-7;-5)**

ответов: **c.(1;7;5)** **d.(-7;-1;-3)**

Пример 2. Найти длину вектора AB (4;1;8).

Решение

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 1 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

Задание. Найти длину вектора AB $(0;4;-3)$.

Варианты а. 3 б. 1

ответов: с. 5 d. 4

Пример 3

При каком значении λ коллинеарны векторы

$$\vec{a} = (1, 0, \lambda) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (3, 0, 5)$$

Решение

Признак коллинеарности векторов:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\lambda}{5} \quad \longrightarrow \quad \lambda = 5/3$$

Задание. При каком значении λ
коллинеарны векторы

$$\vec{a} = (5, \lambda, 0) \quad \vec{b} = (1, 5, 0)$$

Варианты а. 5 б. 1

ответов: с. 0 д. 25

$$\vec{a} = (5, \lambda, 0,)$$

$$\vec{b} = (1, 5, 0)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

$$\frac{5}{1} = \frac{\lambda}{5} \quad \longrightarrow \quad \lambda = 25$$

Задание. Векторы $b(6, m, n)$ и $c(2, -1, 3)$
коллинеарны при.....

Варианты а. $m=2; n=3$

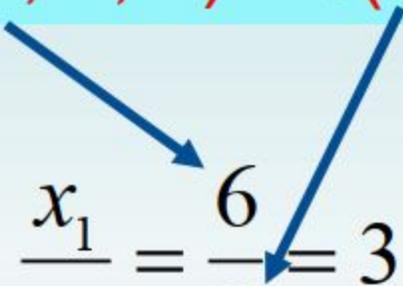
б. $m=1; n=5$

ответов: с. $m=-3; n=9$

д. $m=2; n=5$

Сверим ответы

Векторы $b(6, m, n)$ и $c(2, -1, 3)$ коллинеарны при.....

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6}{2} = 3$$


x

y

z

Векторы $b(6, m, n)$ и $c(2, -1, 3)$ коллинеарны при.....

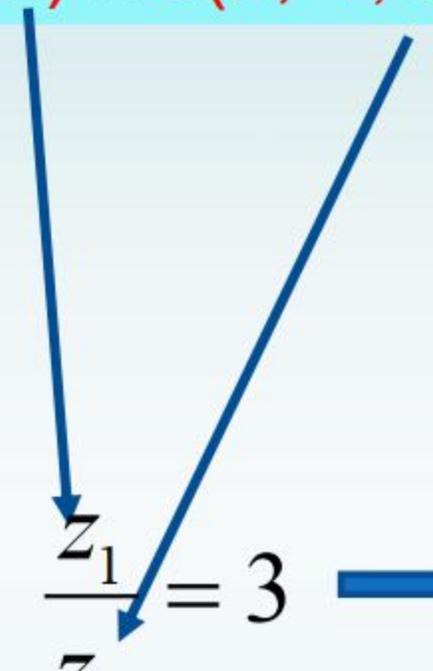
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = 3 \longrightarrow \frac{y_1}{y_2} = 3 \longrightarrow \frac{m}{-1} = 3 \longrightarrow m = -3$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Сверим ответы

Векторы $b(6, m, n)$ и $c(2, -1, 3)$ коллинеарны при.....

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} = 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{n}{3} = 3 \quad \longrightarrow \quad n = 9$$


$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Самостоятельная работа 6

Задание. Вектор $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$
коллинеарен вектору

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

2) $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

3) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

4) $2\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$

Сверим ответы

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-2}{1} = -2$$

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$$a = -2i + 4j - 6k$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$1) \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -2$$

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$1) \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} - 2$$

2.6. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

Скалярное произведение ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

$$2. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

$$2. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$3. \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

$$2. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$3. \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$4. \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр } \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр } \vec{a}$$

Пример 1. Определить значения x , при которых длина вектора $\vec{a} = x\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ равна 5

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{x^2 + 13} = 5$$

$$x^2 + 13 = 25$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

перпендикулярны (ортогональны) друг другу?

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$m \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 = 0$$

$$3 \cdot m - 3 = 0$$

Самостоятельная работа 7

2. Векторы $\vec{a} = (0; -3; 4)$ и $\vec{b} = (5; k; 3)$
ортогональны при $k = \dots$

1) 4

2) -4

3) 0

4) 7

$$\vec{a} = (0, -3, 4) \quad \vec{b} = (5, k, 3)$$

$$0 \cdot 5 + (-3) \cdot k + 4 \cdot 3 = 0$$

$$-3 \cdot k = -12$$

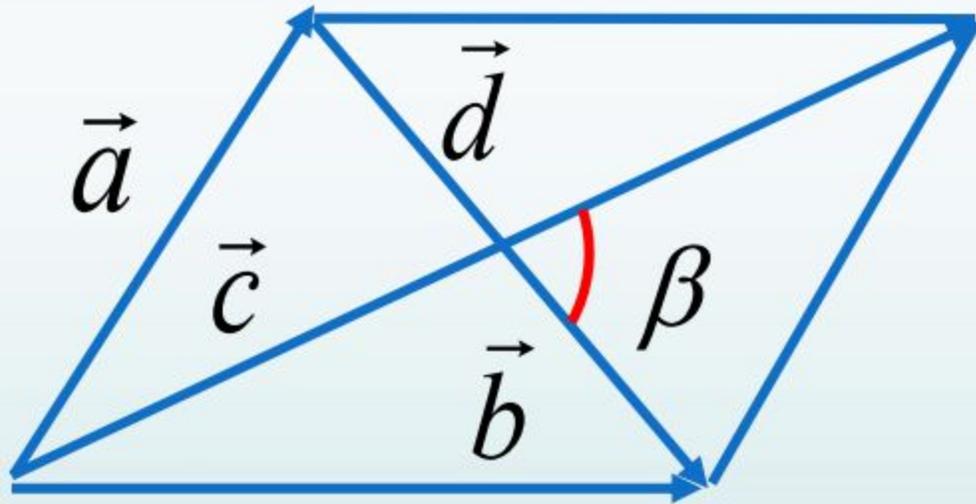
$$k = 4$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Пример 3. Найти угол между диагоналями
параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = (2, 1, 0) \text{ и } \vec{b} = (0, -2, 1)$$



параметрическая форма, переходим к векторам

$$\vec{a} = (2, 1, 0) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (0, -2, 1)$$



Решение

Скалярное произведение

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cos(\vec{c} \wedge \vec{d})$$

Отсюда

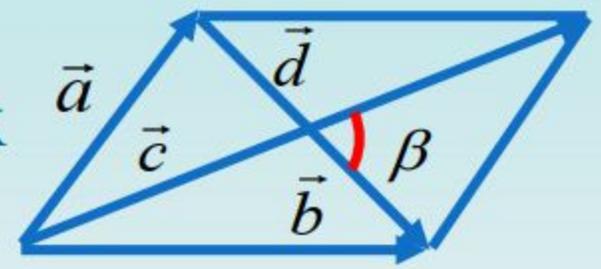
$$\cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{x_c \cdot x_d + y_c \cdot y_d + z_c \cdot z_d}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = x_c x_d + y_c y_d + z_c z_d$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}$$

Пример 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (0, -2, 1)$



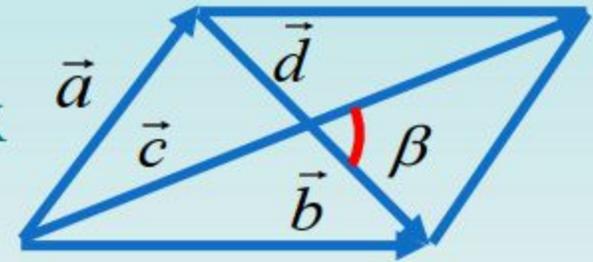
Решение

$$\cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{x_c \cdot x_d + y_c \cdot y_d + z_c \cdot z_d}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 0, 1 + (-2), 0 + 1) = (2, -1, 1),$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (0 - 2, -2 - 1, 1 - 0) = (-2, -3, 1)$$

Пример 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (0, -2, 1)$



Решение

$$\cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{x_c \cdot x_d + y_c \cdot y_d + z_c \cdot z_d}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}}$$

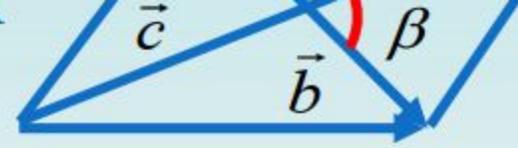
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2 + 0, 1 + (-2), 0 + 1) = (2, -1, 1),$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (0 - 2, -2 - 1, 1 - 0) = (-2, -3, 1)$$

$$\cos \beta = \frac{2(-2) + (-1)(-3) + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = 0$$

Параллелограмм, построенный на векторах

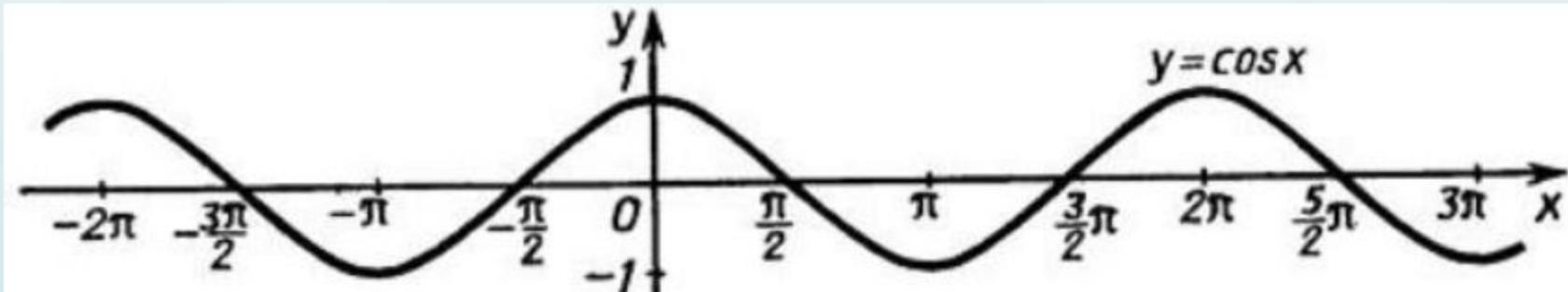
$$\vec{a} = (2, 1, 0) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (0, -2, 1)$$



Решение

$$\cos \beta = \frac{2(-2) + (-1)(-3) + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2}} = 0$$

$$\beta = 90^\circ$$



Спасибо
внимание

Спасибо за
внимание

Спасибо за

спасибо за
внимание

