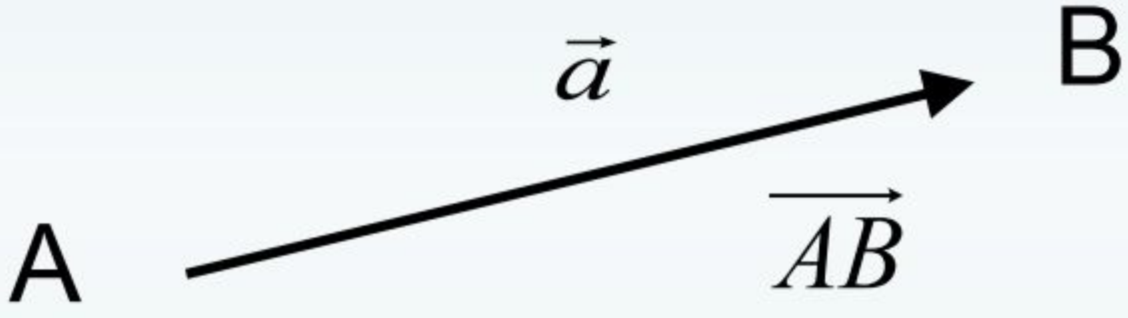
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Основные понятия

Вектор: направленный отрезок, с началом в точке А, а концом – в точке В.

Вектор: направленный отрезок, с началом в точке А, а концом – в точке В.



Длина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$: длина отрезка AB

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \qquad |\vec{a}|$$

Коллинеарные:
векторы, параллельные одной и той же прямой

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

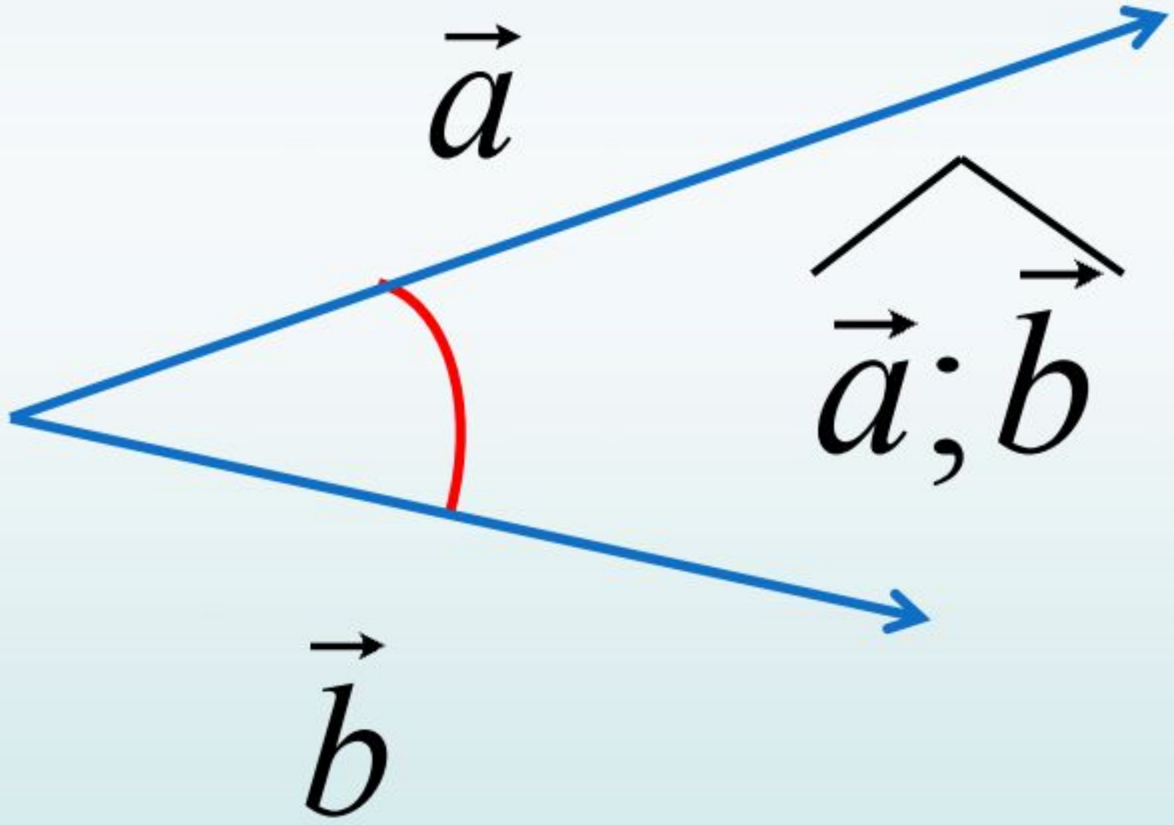
Компланарные:
векторы параллельные одной и той же плоскости

Ортогональные:

векторы, направления которых взаимно перпендикулярны

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Угол между векторами: наименьший угол между лучами, на которых они лежат

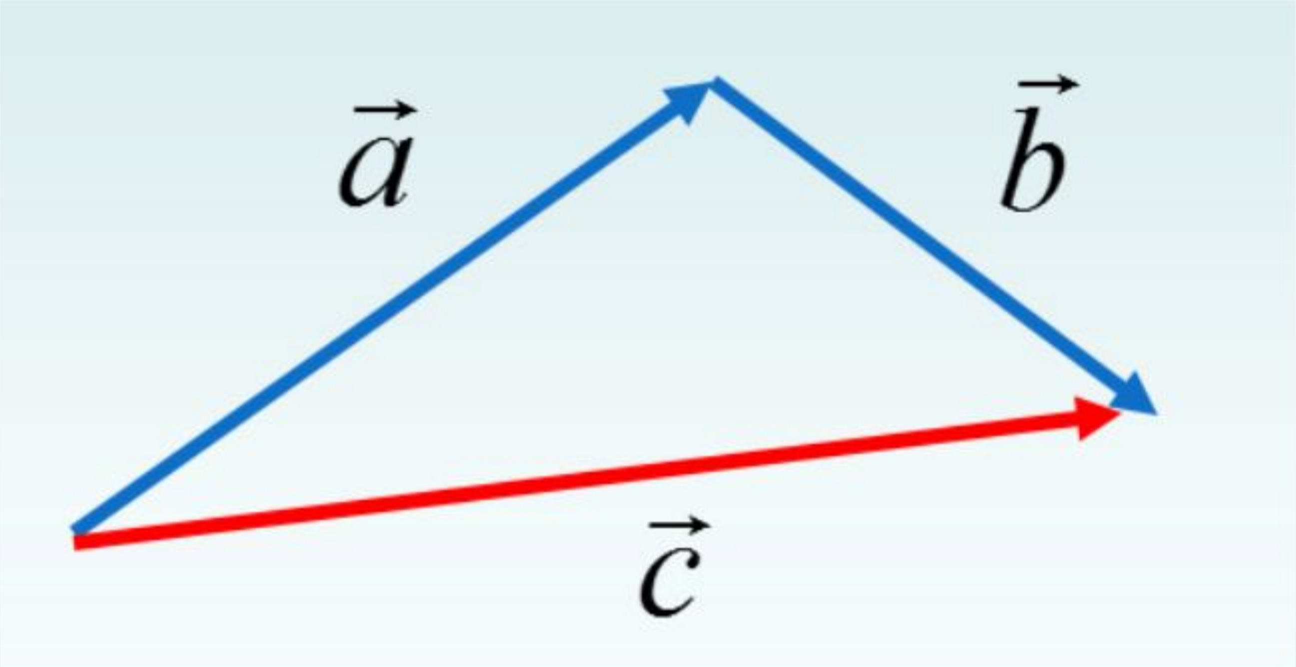


$$\widehat{\vec{a};\vec{b}}$$

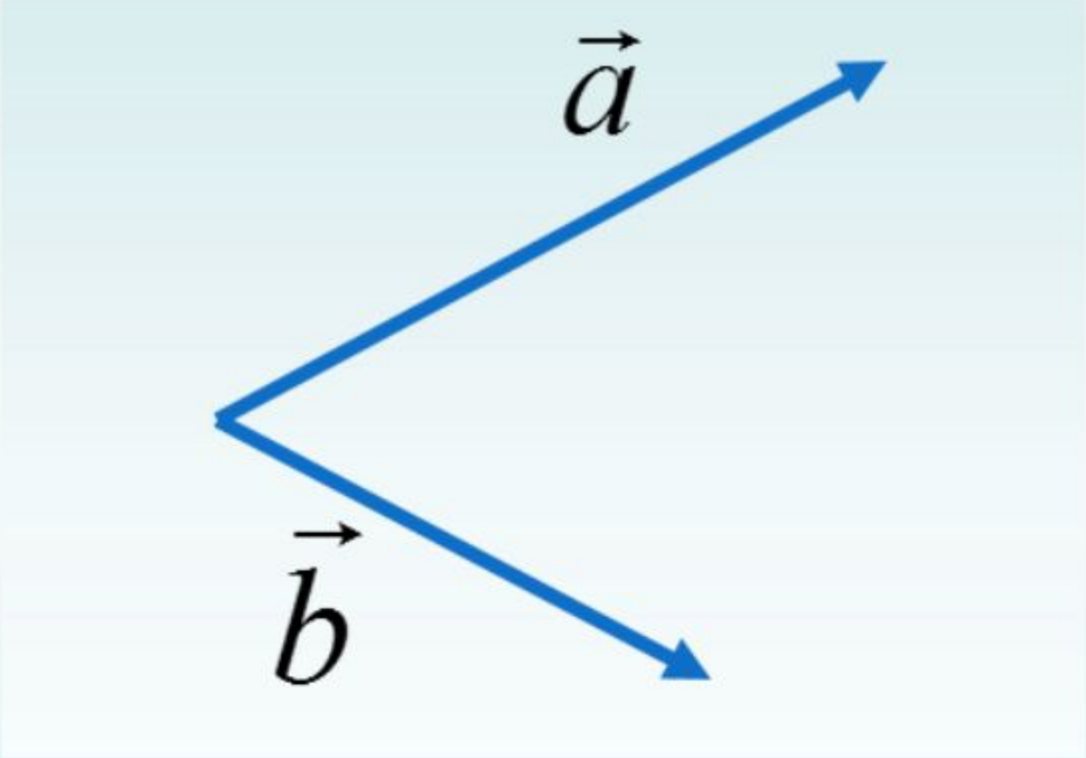
2.2.Линейные операции с векторами

1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

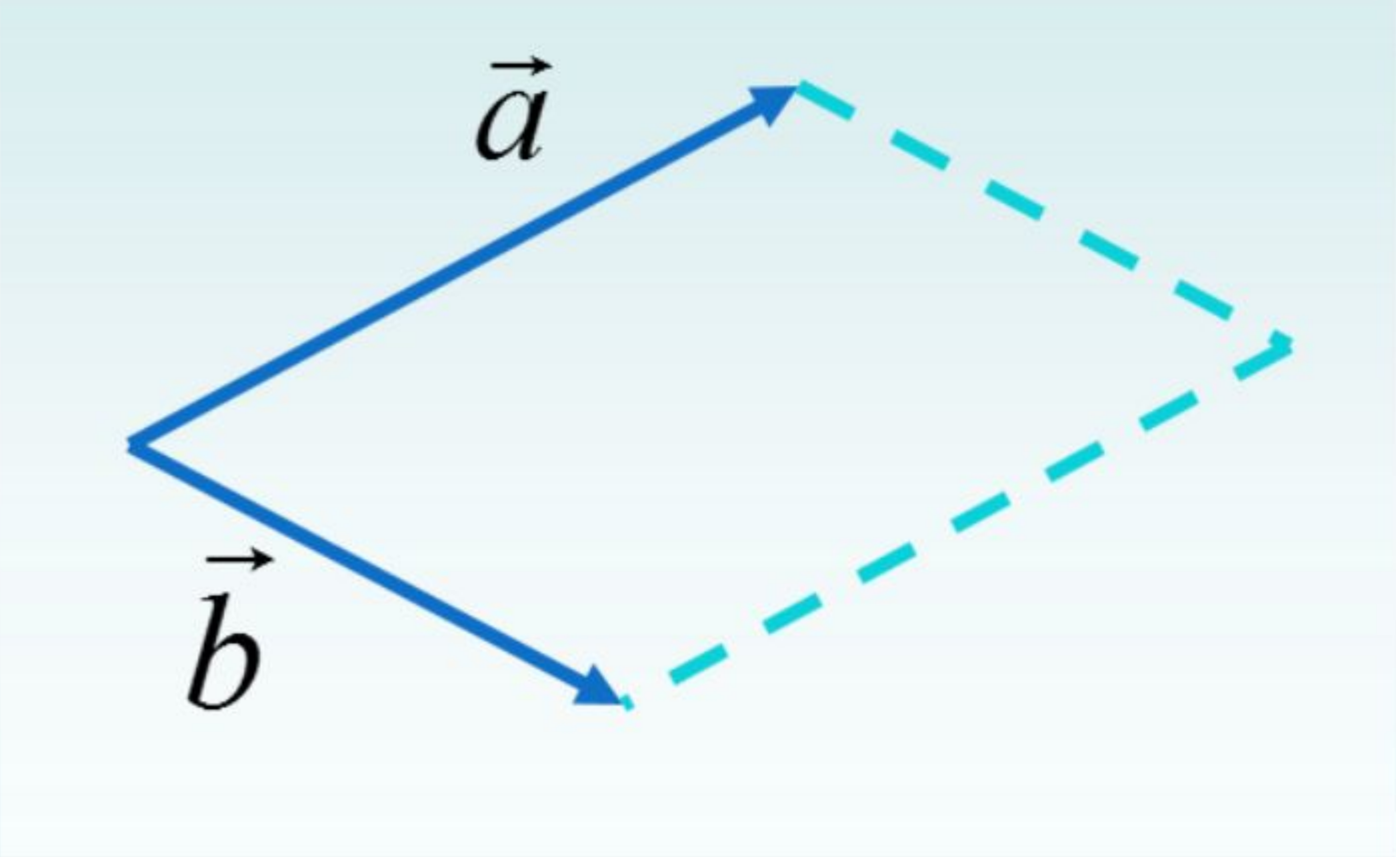
1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



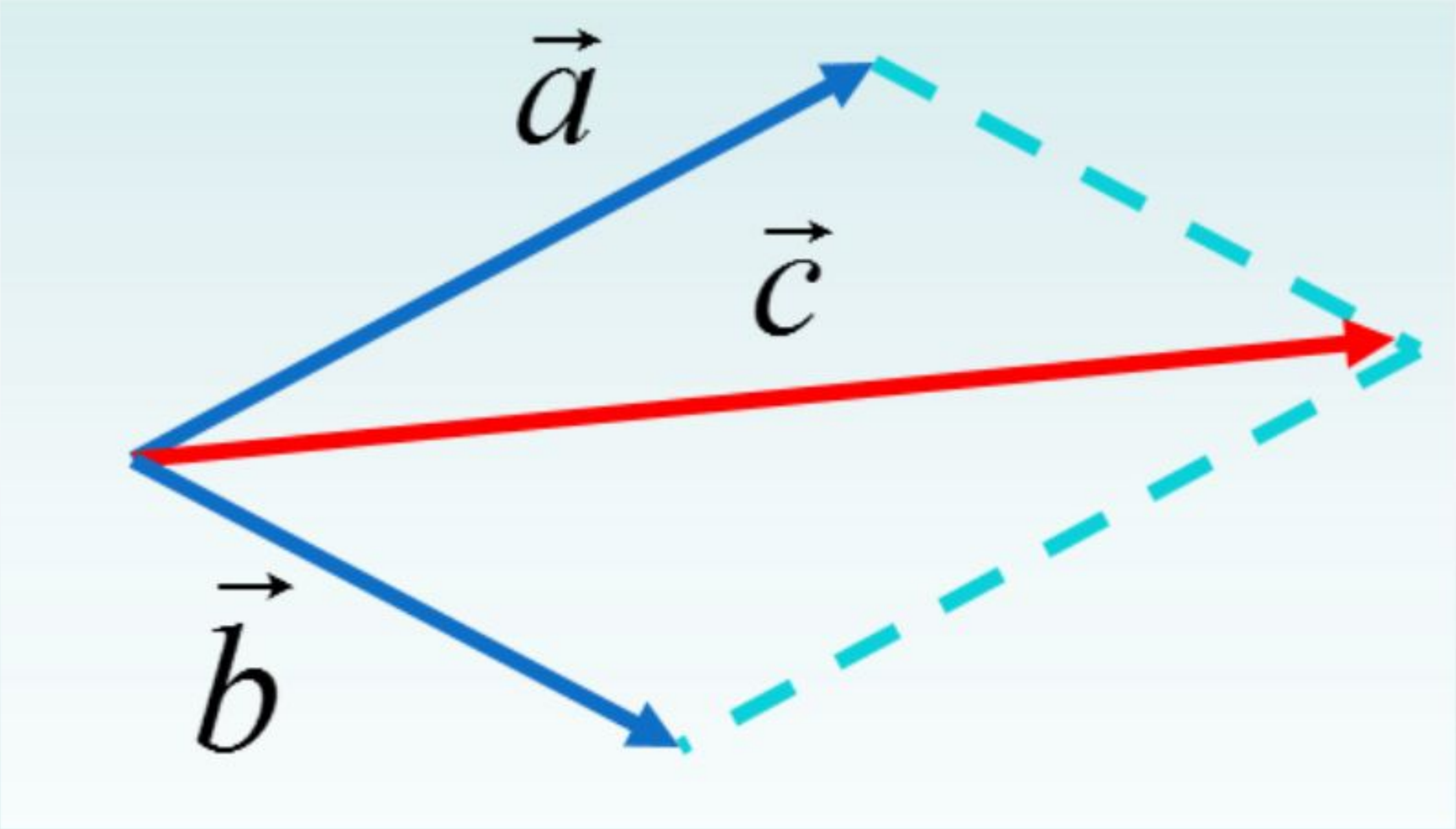
1. Сложение $c = \vec{a} + b$



1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

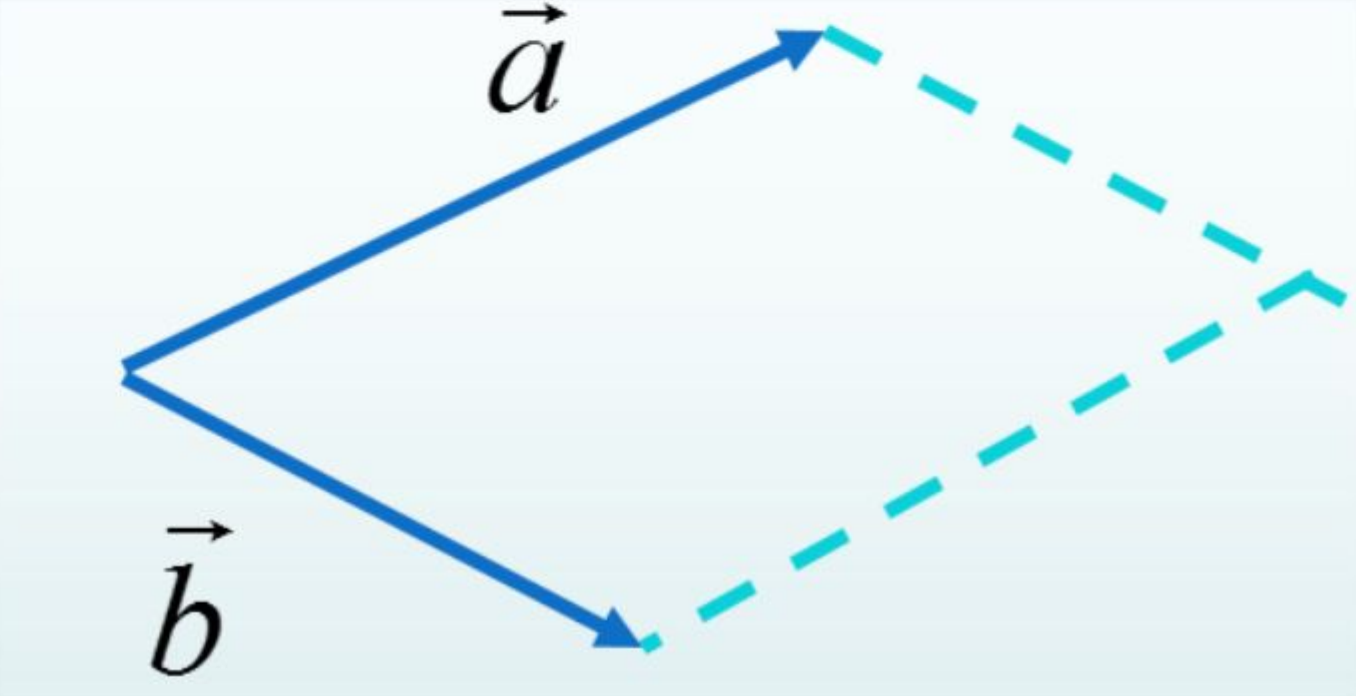


1. Сложение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



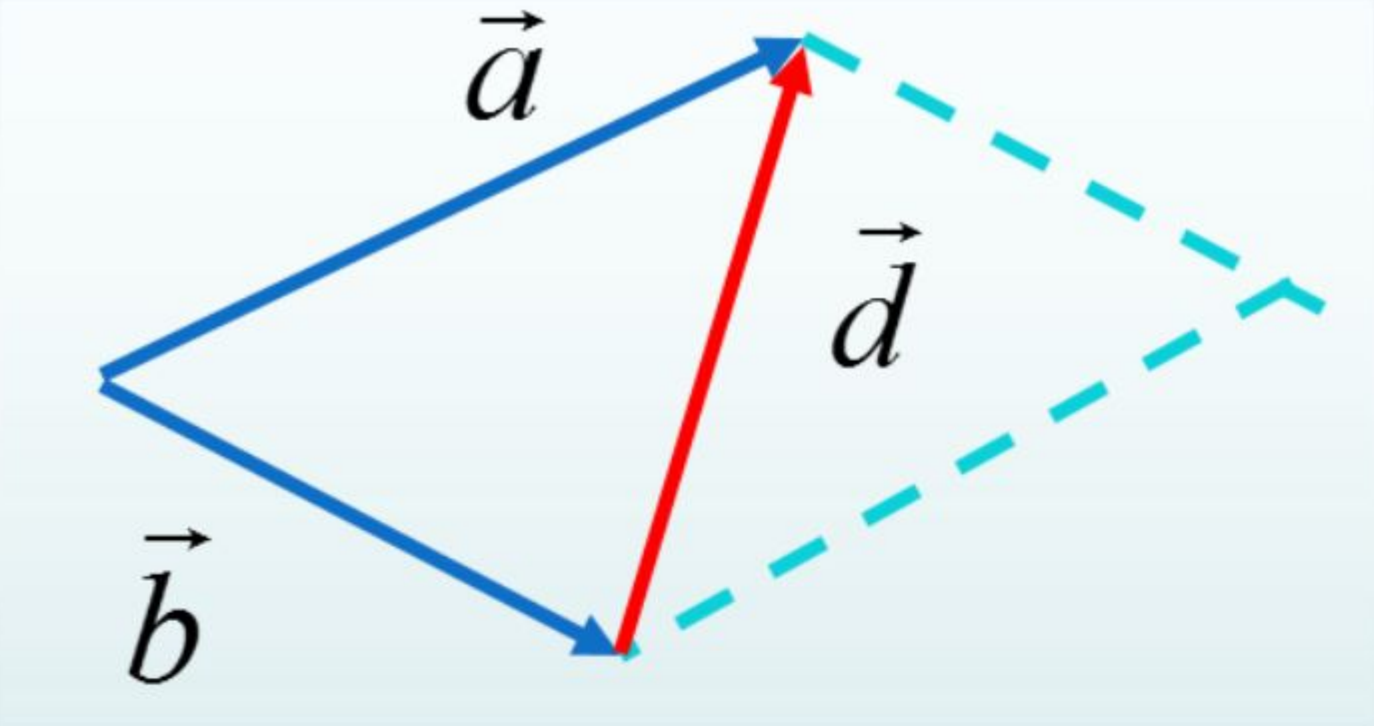
2. Вычитание

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



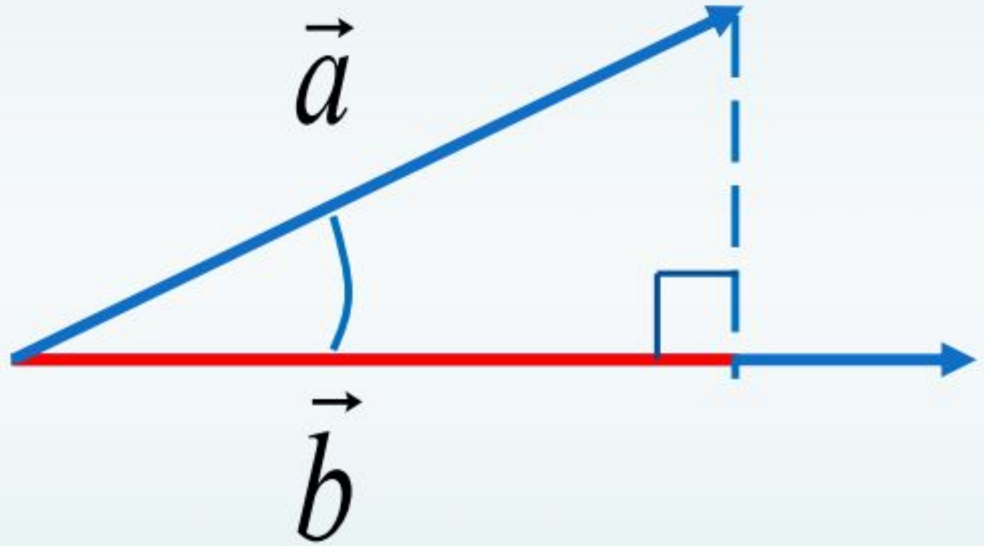
2. Вычитание

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$



3. При **умножении вектора на число** его длина умножается на это число, а направление:
- сохраняется (если число положительное),
- меняется на противоположное (если число отрицательное).

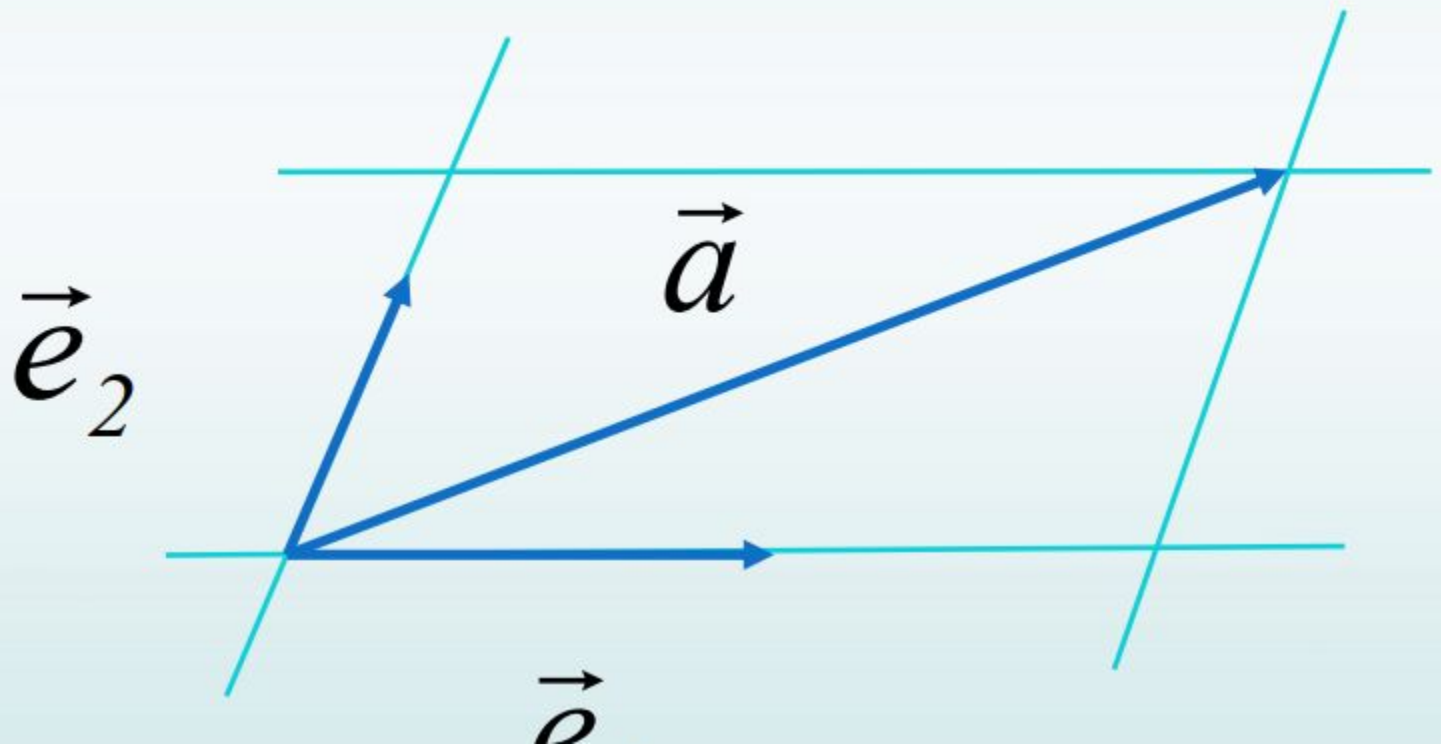
4. Проекция вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$:



$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$$

2.3. Координаты вектора

Базис на плоскости: упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, отложенных от одной точки

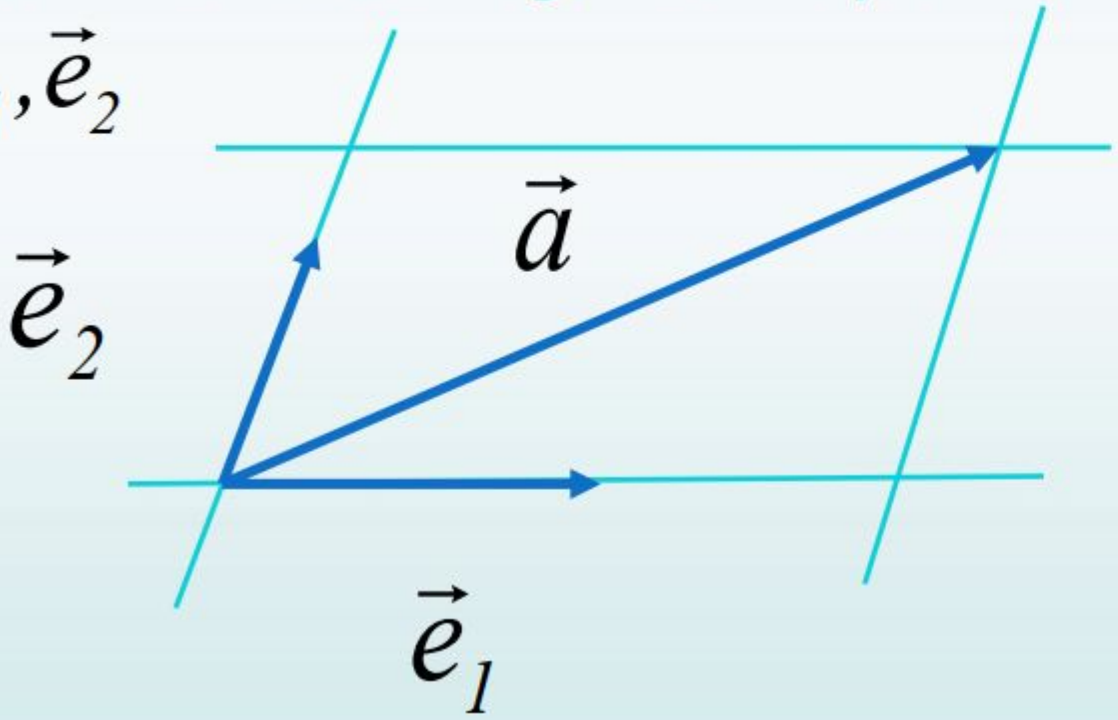


базис e_1, e_2, то каждый вектор a этой плоскости может быть однозначно представлен в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

-**разложение вектора по базису** векторов

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$

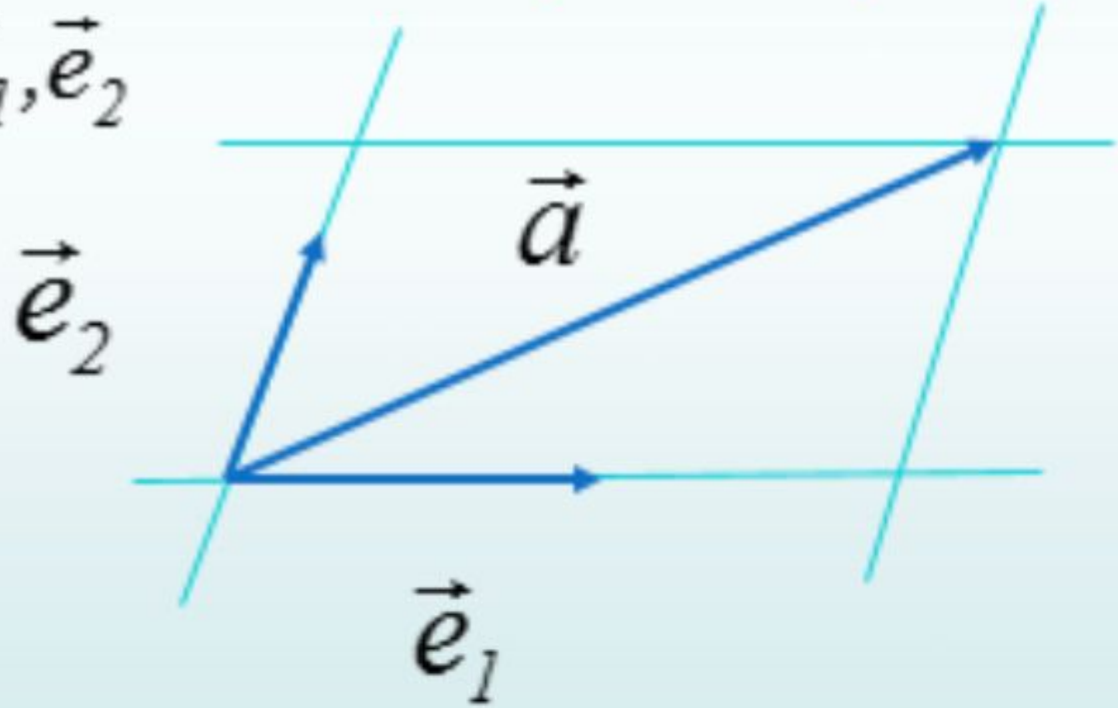


$\vec{a} = (x, y)$ -**координаты вектора** в данном базисе

Теорема : Если на плоскости выбран некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то каждый вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть однозначно представлен в виде:

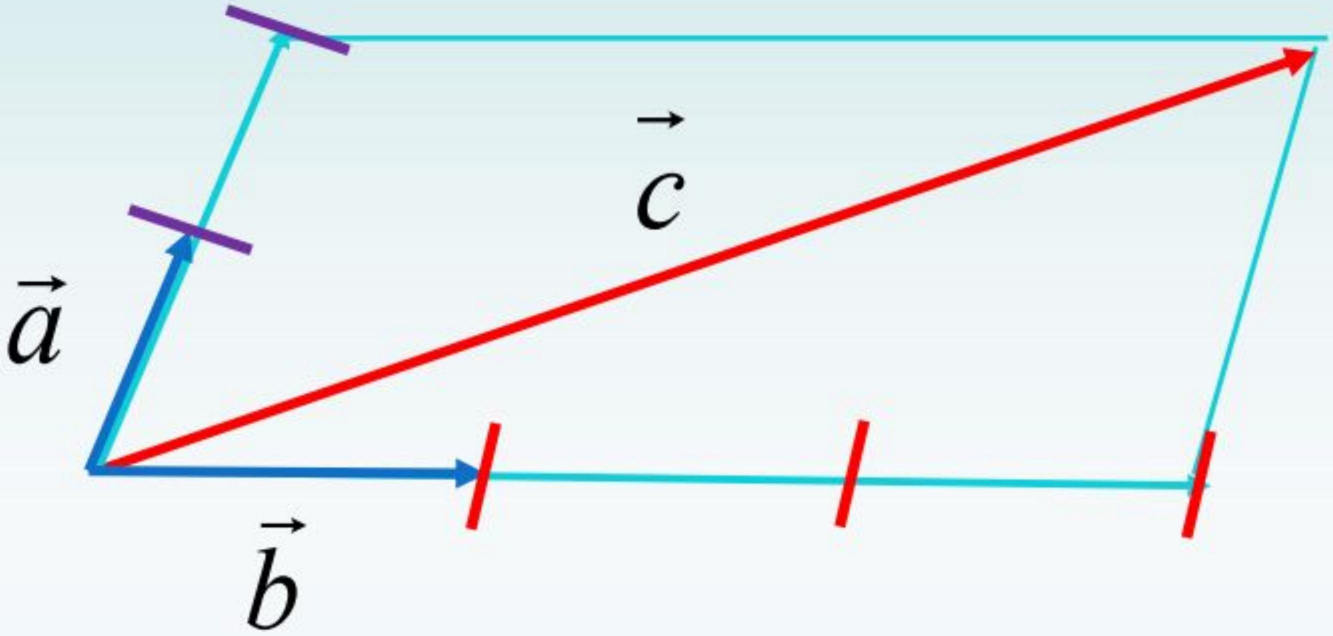
$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

-**разложение вектора по базису** векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$



$\vec{a} = (x, y)$ -**координаты вектора** в данном базисе

Например:



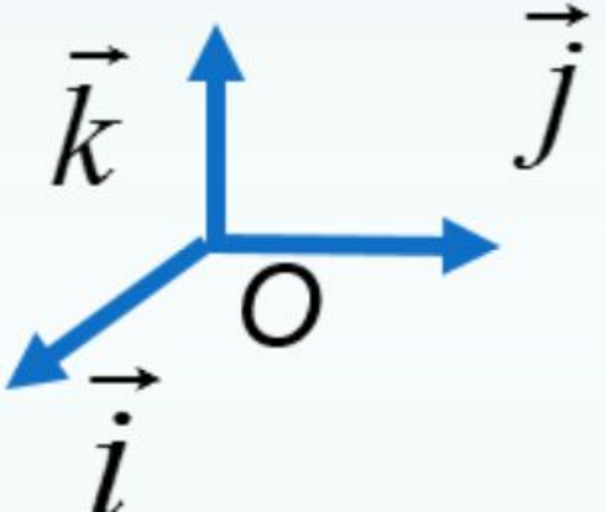
$$2\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}=\vec{c}$$

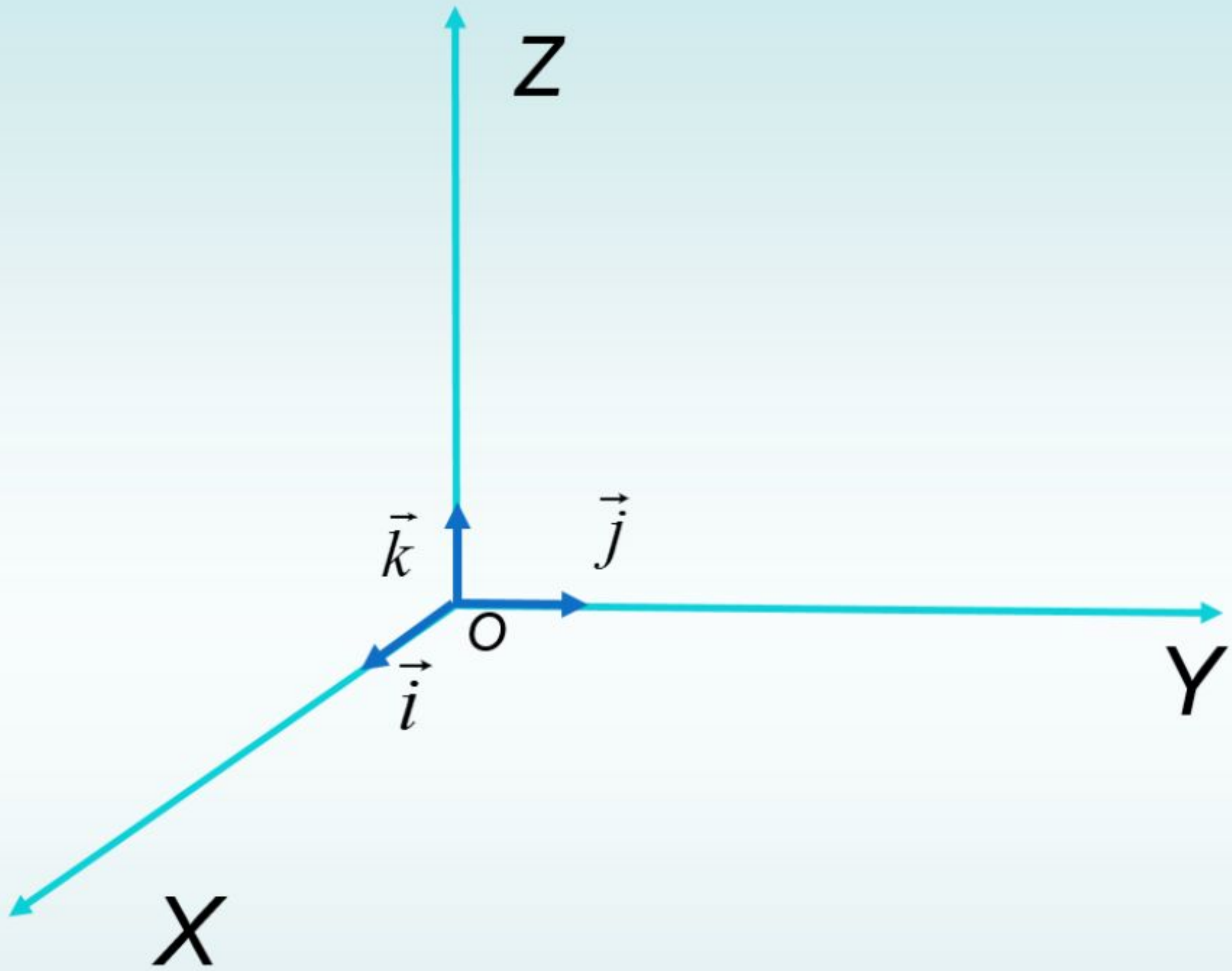
$$\vec{c}\ \ (2;3)$$

2.4.Декартова прямоугольная система координат

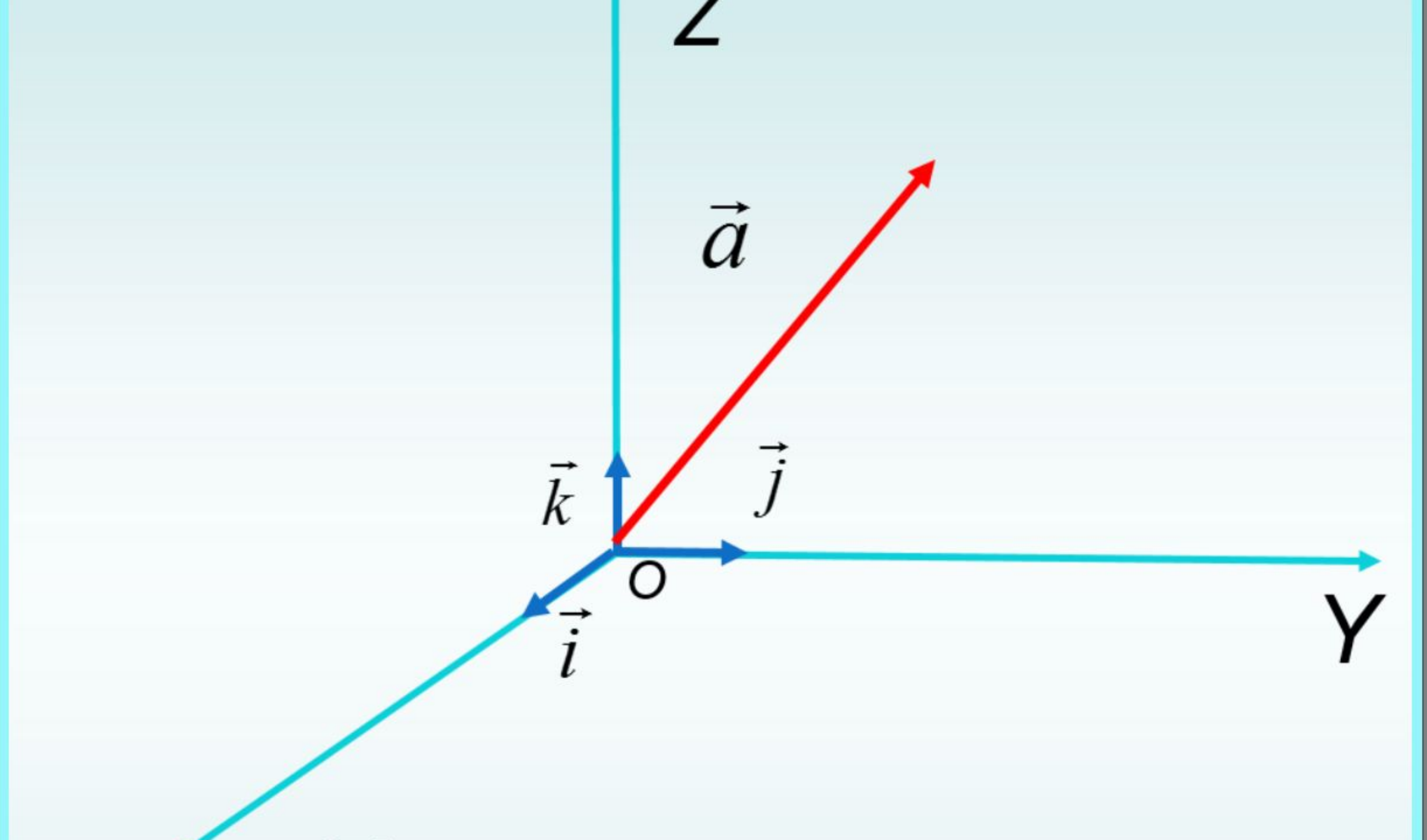
$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

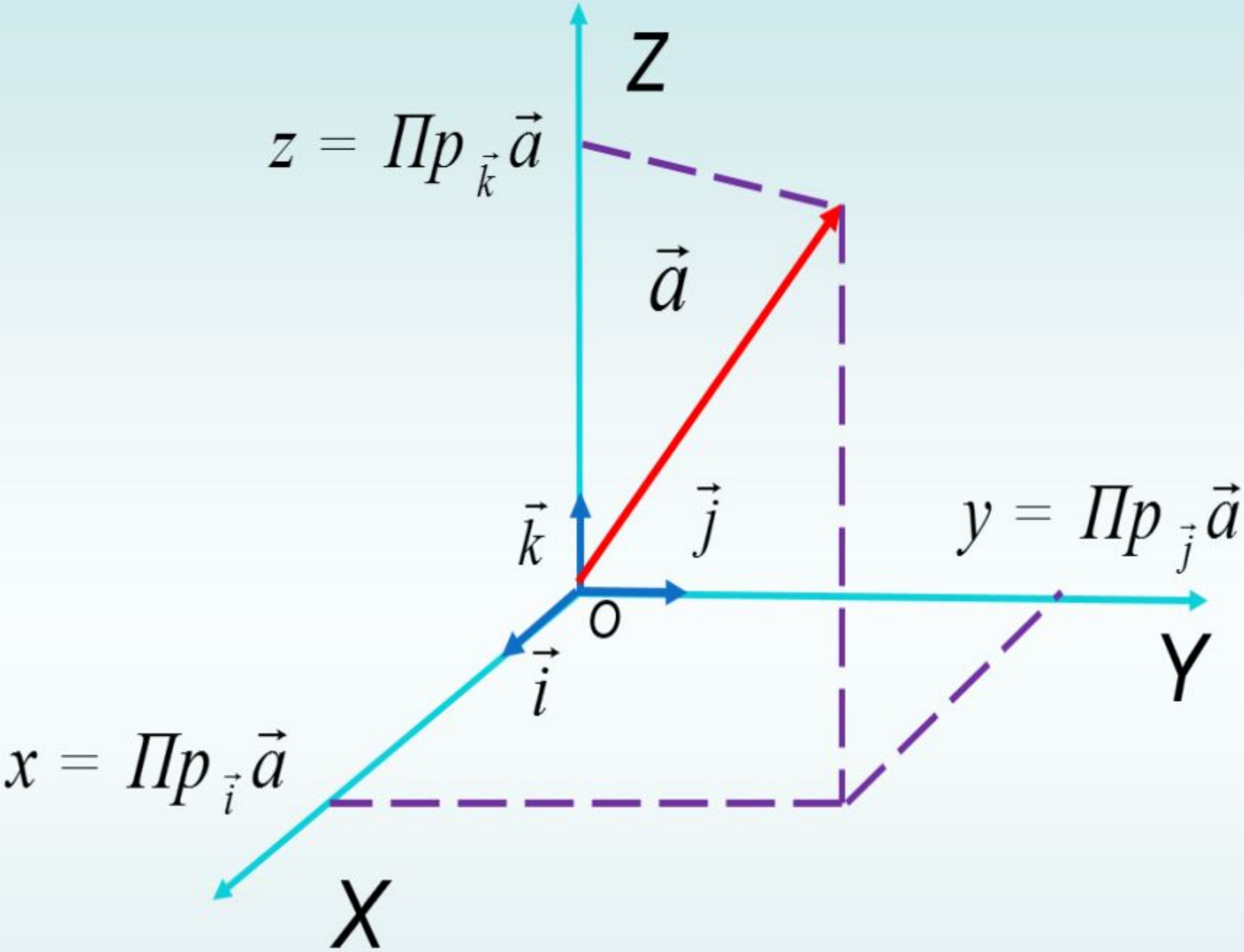


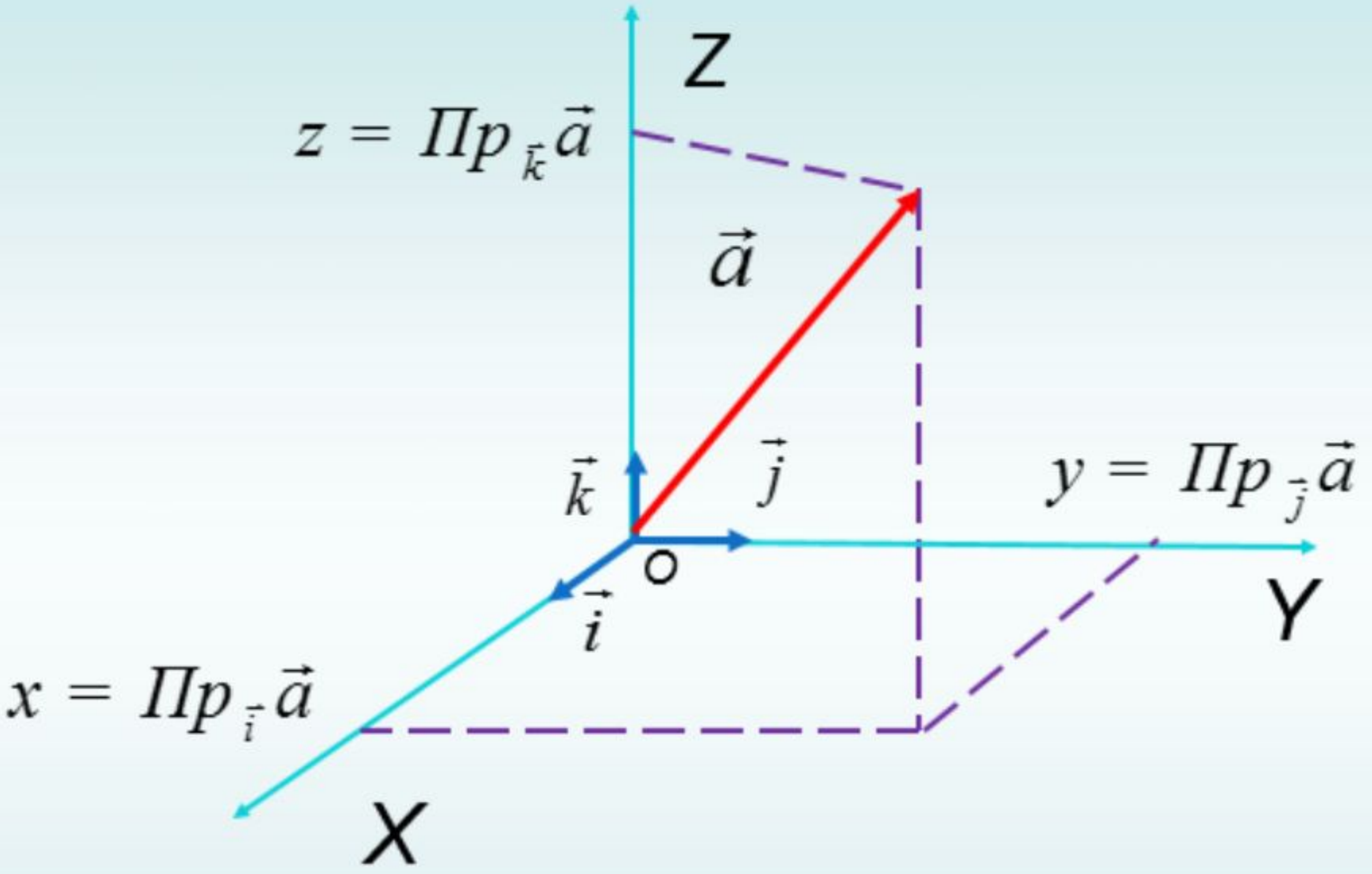


Z
$\vec{k}$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
Y
X

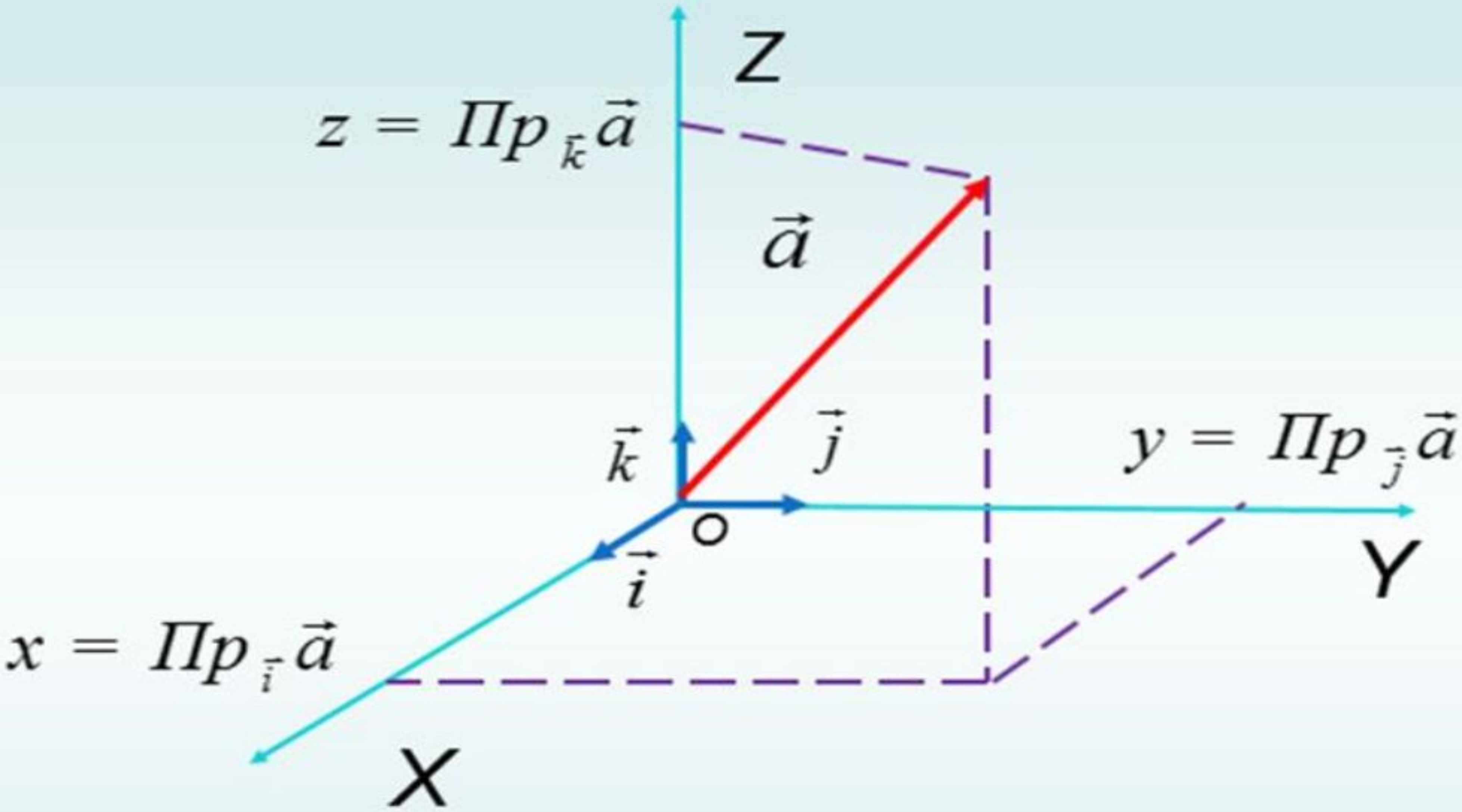

Z
$\vec{a}$
$\vec{k}$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
Y

Декартова прямоугольная система координат





$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{a} = (x, y, z)$$



$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{a} = (x, y, z)$$

в координатной форме

Координаты вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$$

Координаты вектора $\vec{b}$

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

Координаты суммы векторов

$$1.\ \vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2).$$

$$\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$$

$$\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$$

Координаты вектора после умножения на число

$$2.\quad k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1).$$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$$

Координаты точки A $A(x_A; y_A; z_A)$

Координаты точки B $B(x_B; y_B; z_B)$

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$3.\ \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Координатный признак коллинеарности векторов:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Самостоятельная работа 1

Задание. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

если A(2;0;-3), B(-5;1;0).

Варианты a.(-7;-1;-3) b.(7;-1;3)

ответов: c.(7;-1;-3) d.(-7;1;3)

Задание. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

если A(1;2;3), B(0;-5;-2).

Варианты a.(1;-3;1) b.(-1;-7;-5)

ответов: c.(1;7;5) d.(-7;-1;-3)

Пример 2. Найти длину вектора АВ (4;1;8).

Решение

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 1 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

Задание. Найти длину вектора АВ (0;4;-3).

Варианты а. 3   b. 1

ответов: с.5   d. 4

Пример 3

При каком значении λ коллинеарны векторы

$\vec{a} = (1, 0, \lambda)$ и $\vec{b} = (3, 0, 5)$

Решение

Признак коллинеарности векторов:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\lambda}{5} \Rightarrow \lambda = 5/3$$

Самостоятельная работа 4

Задание. При каком значении λ коллинеарны векторы

$$\vec{a} = (5, \lambda, 0,) \qquad \vec{b} = (1, 5, 0)$$

Варианты ответов: **a. 5** **b. 1** **c.0** **d. 25**

Сверим ответы

$\vec{a} = (5, \lambda, 0,)$ $\vec{b} = (1, 5, 0)$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

$$\frac{5}{1} = \frac{\lambda}{5} \longrightarrow \lambda = 25$$

Задание. Векторы b(6,m, n) и c(2,-1,3) коллинеарны при…..

Варианты ответов:

a. m=2; n=3

b. m=1; n=5

c. m=-3; n=9

d. m=2; n=5

Сверим ответы

Векторы b(6,m, n) и c(2,-1,3) коллинеарны при…..

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6}{2} = 3$$

Векторы b(6,m, n) и c(2,-1,3) коллинеарны при…..

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=3 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2}=3 \Rightarrow \frac{m}{-1}=3 \Rightarrow m=-3$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Сверим ответы

Векторы b(6,m, n) и c(2,-1,3) коллинеарны при…..

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} = 3 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 3 \Rightarrow \frac{n}{3} = 3 \Rightarrow n = 9$$

$$\frac{x_1}{} = \frac{6}{} = 3$$

$$x_1 \quad y_1 \quad z_1$$

Самостоятельная работа 6

Задание. Вектор $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ коллинеарен вектору ……

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

2) $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

3) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

4) $2\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$

Сверим ответы

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-2}{1} = -2$$

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{4}{-2} = -2$$

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\frac{x_1}{x_2} = -2$$

Сверим ответы

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-6}{3} = -2$$

1) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} - 2$$

2.6. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$$

векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ -признак ортогональности

2. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$$

Свойства:

$1.\ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

$2.\ \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ -признак ортогональности

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$$

Свойства:

1. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ -признак ортогональности

2. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\quad \vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot \text{Пр}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \text{Пр}\,\vec{a}$

Пример 1. Определить значения x, при которых длина вектора $\vec{a} = x\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ равна 5

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{x^2 + 13} = 5$$

$$x^2 + 13 = 25$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

Пример 2. При каком значении m векторы

$$\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

перпендикулярны (ортогональны) друг другу?

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$m \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 = 0$$

$$3 \cdot m - 3 = 0$$

Самостоятельная работа 7

2. Векторы $\vec{a} = (0; -3; 4)$ и $\vec{b} = (5; k; 3)$ ортогональны при $k = \ldots$

1) 4

2) -4

3) 0

4) 7

$\vec{a} = (0, -3, 4) \quad \vec{b} = (5, k, 3)$

$$0 \cdot 5 + (-3) \cdot k + 4 \cdot 3 = 0$$

$$-3 \cdot k = -12$$

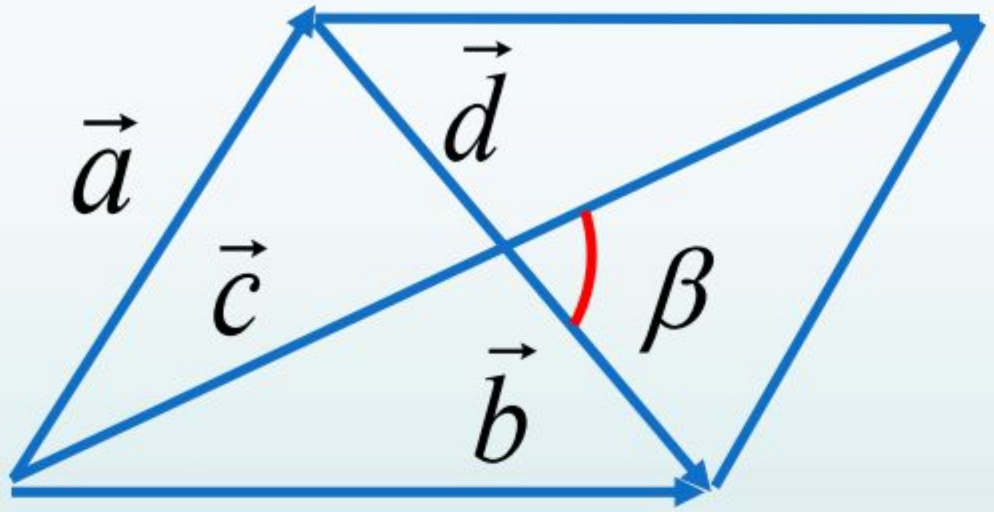
$$k = 4$$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

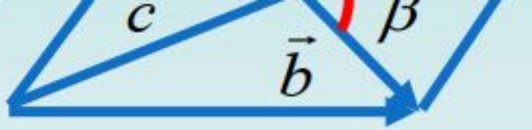
Пример 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a} = (2,1,0)$ и $\vec{b} = (0,-2,1)$



параллелограмма, построенного на векторах

$\vec{a} = (2,1,0)$ и $\vec{b} = (0,-2,1)$



Решение

Скалярное произведение

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cos(\vec{c} \,\hat{}\, \vec{d})$$

Отсюда

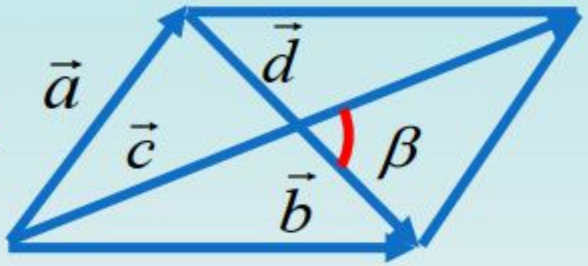
$$\cos(\vec{c} \,\hat{}\, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|} = \frac{x_c \cdot x_d + y_c \cdot y_d + z_c \cdot z_d}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = x_c x_d + y_c y_d + z_c z_d$$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}$$

Пример 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах



$\vec{a} = (2,1,0)$ и $\vec{b} = (0,-2,1)$

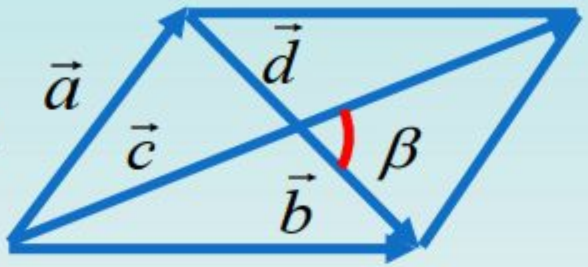
Решение

$$\cos(\vec{c} \,^\wedge \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{x_c \cdot x_d + y_c \cdot y_d + z_c \cdot z_d}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \cdot \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+0,\ 1+(-2),\ 0+1) = (2, -1,\ 1),$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (0-2, -2-1,\ 1-0) = (-2, -3,\ 1)$$

Пример 3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2,1,0)$ и $\vec{b} = (0,-2,1)$



Решение

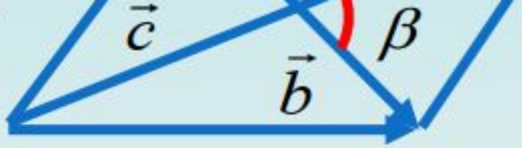
$$\cos(\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|} = \frac{x_c\cdot x_d + y_c\cdot y_d + z_c\cdot z_d}{\sqrt{x_c^2+y_c^2+z_c^2}\cdot\sqrt{x_d^2+y_d^2+z_d^2}}$$

$$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b} = (2+0,\ 1+(-2),\ 0+1) = (2,-1,\ 1),$$

$$\vec{d} = \vec{b}-\vec{a} = (0-2,-2-1,\ 1-0) = (-2,-3,\ 1)$$

$$\cos\beta = \frac{2(-2)+(-1)(-3)+1\cdot 1}{\sqrt{\ldots}\sqrt{\ldots}} = 0$$

параллелограмма, построенного на векторах

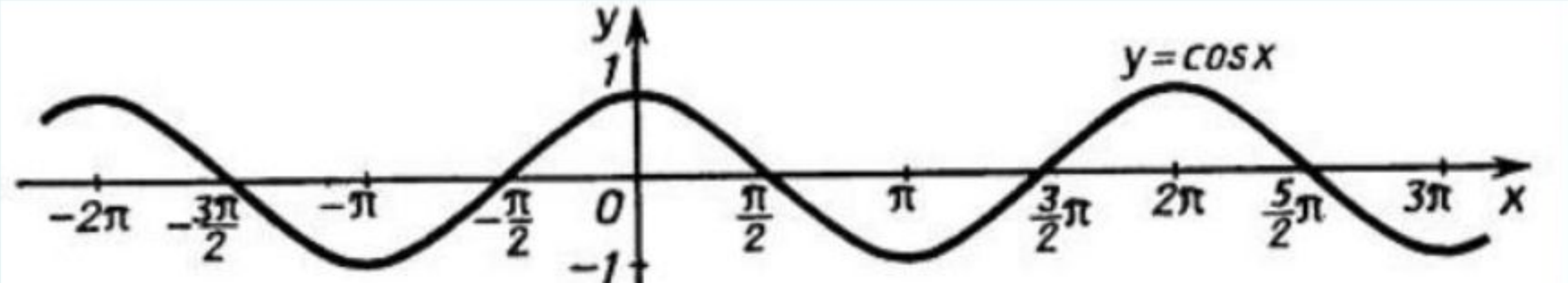


$\vec{a} = (2,1,0)$ и $\vec{b} = (0,-2,1)$

Решение

$$\cos\beta = \frac{2(-2)+(-1)(-3)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}} = 0$$

$$\beta = 90^0$$



Спасибо
внимание

Спасибо за
внимание

Спасибо за
внимание

Спасибо за
внимание

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ

Спасибо за
внимание

Спасибо за

Спасибо за

Спасибо за