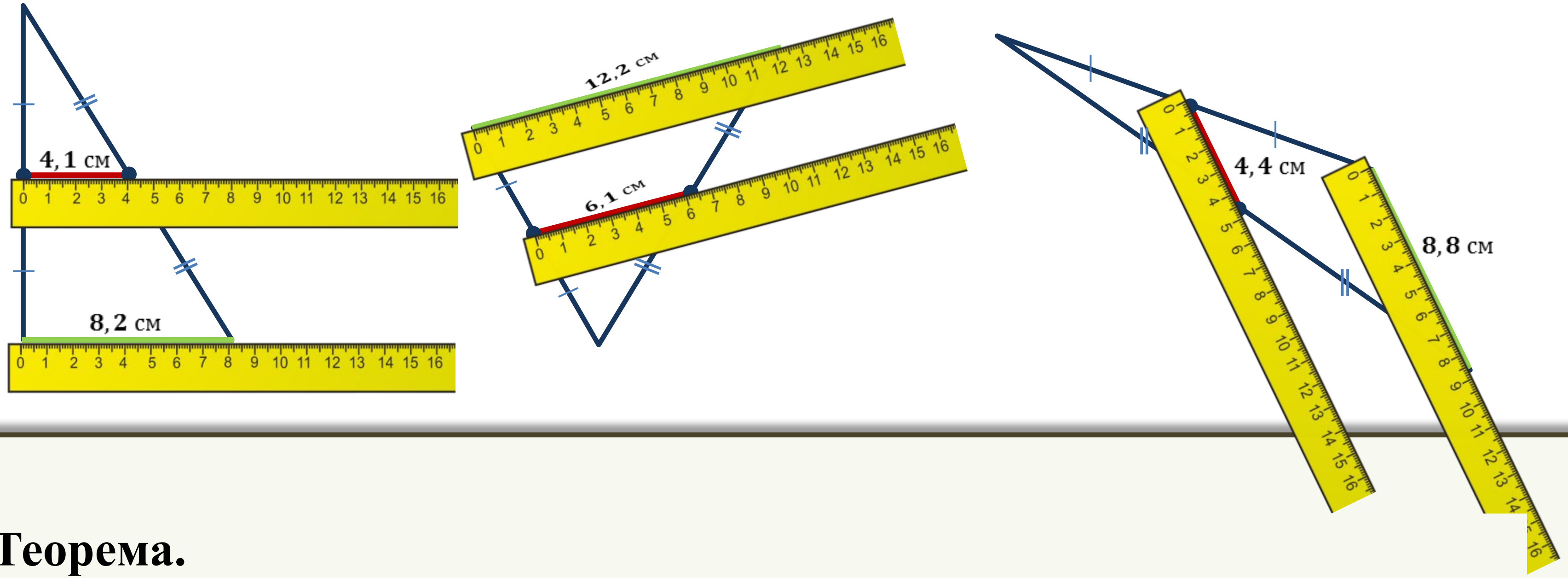
Средняя линия треугольника

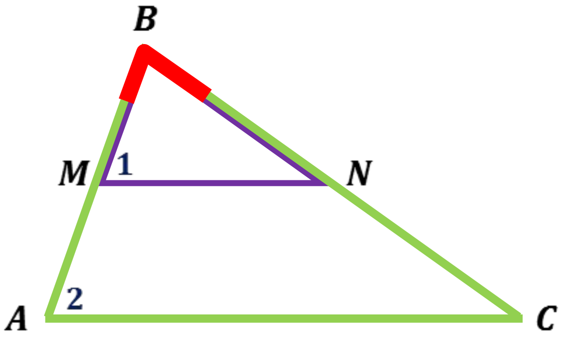
Определение. Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



Теорема.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство.



1. $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle B$ – общий, $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2, \dfrac{MN}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ (соответственные углы при MN и AC, AB – секущая) $\Rightarrow MN \parallel AC$.

4. $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}AC$.

Задача. Укажите, какие из изображённых отрезков являются средними линиями, и найдите их длину.

а)

б) $\triangle ABC$ – равнобедренный

AC – основание

в)

Решение.

а) $ST \parallel AC, ST = \dfrac{1}{2}AC \implies ST = 6$

$RT \parallel AB, RT = \dfrac{1}{2}AB \implies RT = 4{,}3$

$SR \parallel BC, SR = \dfrac{1}{2}BC \implies SR = 2{,}5$

б) $AB = BC$

$AE = BE = BF = FC$

$EF \parallel AC, EF = \dfrac{1}{2}AC$

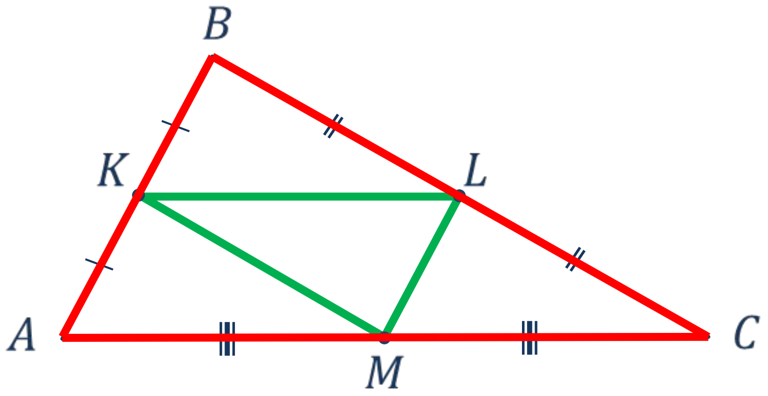
$\implies EF = 5$

в)

$KL \parallel AC, KL = \dfrac{1}{2}AC$

$\implies KL = 3{,}75$

Задача. Дан треугольник, стороны которого соответственно равны 5 см, 13 см и 10 см. Найти периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.



Решение.

$P_{\Delta KLM} = KL + LM + KM$

KL – средняя линия: $KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2}AC$

ML – средняя линия: $ML \parallel AB, ML = \frac{1}{2}AB$

KM – средняя линия: $KM \parallel BC, KM = \frac{1}{2}BC$

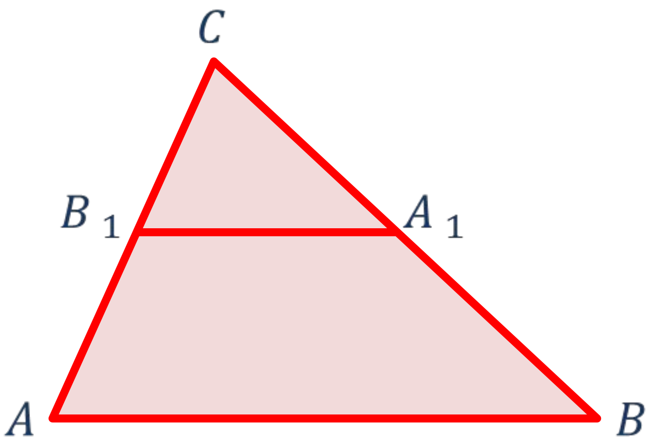
$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + AB + BC) = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$

$P = \frac{1}{2}(5 + 13 + 10) = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14(\text{см})$

Ответ: 14 см.

Задача. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении два к одному, считая от вершины.

Доказательство.



$AB = 2A_1B_1$

1. $A_1B_1 \parallel AB$

внутренние накрест лежащие $\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \text{ (секущая } AA_1) \\ \angle 3 = \angle 4 \text{ (секущая } BB_1) \end{cases}$

2. $\triangle\, AOB \sim \triangle\, A_1OB_1$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = 2$$

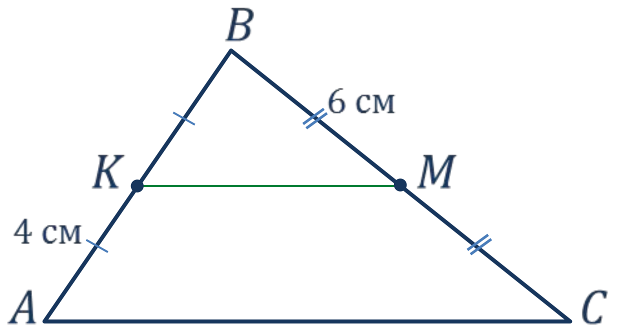
3. $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2:1$

4. Аналогично п. 1-3: $BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2:1$

5. Точка M совпадает с точкой O $\Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$

Задача. В треугольнике ABC, через точки К и M — середины отрезков AB и BC соответственно, проведена прямая KM.
$AK = 4$ см, $BM = 6$ см, $P_{\Delta ABC} = 36$ см. Найти KM и AC.

Решение.



1. KM – средняя линия (по определению)
2. $AB = 8$ см, $BC = 12$ см
3. $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$

   $\Longrightarrow AC = P_{\Delta ABC} - AB - BC$

   $AC = 36 - 8 - 12 = 16$ (см)

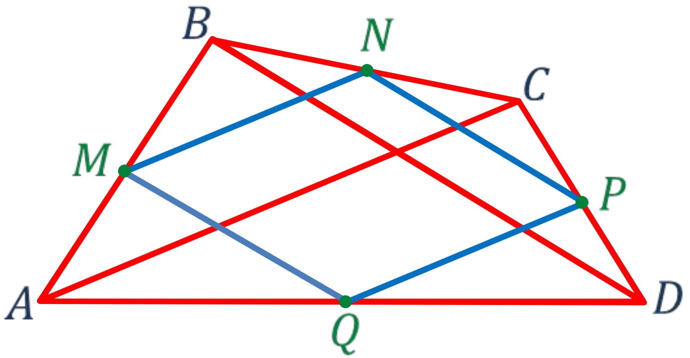
4. $KM = \dfrac{1}{2}AC$ (свойство средней линии треугольника)

   $KM = \dfrac{1}{2} \cdot 16 = 8$ (см)

Ответ: 8 см, 16 см.

Задача. В четырёхугольнике ABCD точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что MNPQ — параллелограмм.

Решение.



$\Delta ABC: MN$ – средняя линия $\Rightarrow MN \parallel AC$

$\Delta ACD: PQ$ – средняя линия $\Rightarrow PQ \parallel AC$

$\Rightarrow MN \parallel PQ$

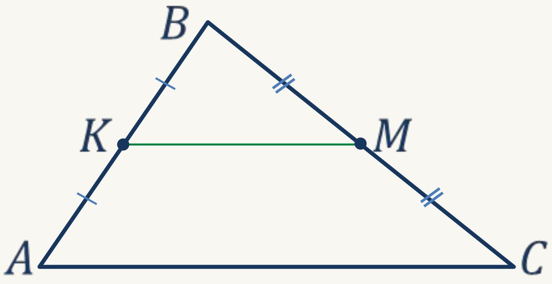
$\Delta BCD: NP$ – средняя линия $\Rightarrow NP \parallel BD$

$\Delta ABD: MQ$ – средняя линия $\Rightarrow MQ \parallel BD$

$\Rightarrow NP \parallel MQ$

Значит, $MNPQ$ – параллелограмм (по определению).

Определение.
Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



Теорема.
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

$$KM \parallel AC$$
$$KM = \frac{1}{2}AC$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

$$AO:OA_1 = BO:OB_1 = CO:OC_1 = 2:1$$