Модуль 3

Формальные теории и исчисления

Занятие 3.2. Исчисление высказываний

2020 г.

Содержание

Алфавит

связки $\overline{}$ **,** $\rightarrow$

служебные символы (,)

пропозициональные переменные
a, b,…a1, b1,…

Формулы

1. Переменные суть формулы

2. Если A, B формулы, то

$(\overline{A}), (A \to B)$ тоже формулы

Аксиомы

$$A_1 : (A \to (B \to A))$$

$$A_2 : ((A \to (B \to C)) \to$$

$$\to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$A_3 : ((\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B))$$

Правило_вывода

$$\frac{A, A \to B}{B} \, Modus\_ponens$$

правило отделения или правило заключения (MP)

Интерпретация

Функция *h* называется *интерпретацией*, если для любых формул *A* и *B* исчисления высказываний *h* удовлетворяет следующим условиям

$$h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$$

$$h(A \to B) = h(A) \to h(B)$$

Истинность и ложность

Формула *A* исчисления высказываний *истинна при некоторой интерпретации h* тогда и только тогда, когда *h(A)=1*

В противном случае, говорят, что *A ложна при интерпретации h*

Тавтология и противоречие

Формула *A* исчисления высказываний является *тавтологией*, тогда и только тогда, когда она истинна независимо от интерпретации

Формула A называется *противоречием*, тогда и только тогда, когда она ложна при любой интерпретации

Пример № 1

Проверить, что формула *R* является тавтологией

$$R = \overline{(\overline{A} \to B) \to A} \to B$$

Решение примера № 1

$$R = \overline{(\overline{A} \to B) \to A} \to B$$

A	B	R
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Формула R - тавтология

Правило подстановки

Пусть *A* – некая формула, выводимая (доказуемая) в исчислении высказываний, *x*- переменная,
***B* – любая формула исчисления высказываний**

Тогда формула, которая получается из формулы *A* путем подстановки в нее вместо переменной *x* формулы *B*, выводима (доказуема)
A(……x…..)(B//x)

Пример № 2

Проверить, что формула $A \to A$ выводима в исчислении высказываний

Решение примера № 2

1. Подставим в аксиому *А2* вместо *В* (*А*→*А*), вместо *С подставим А*

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$$

2. Применив аксиому *А1*, и по правилу заключения получаем

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$$

3. Применив аксиому *А1* и по правилу заключения получаем $(A \to A)$

Теорема

Каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, тождественно истинна в алгебре высказываний

Пример № 3

Каждая аксиома – тождественно истинная

Правило подстановки, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам

Правило заключения, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам

Теорема дедукции

Если Г – множество формул,

А и В – формулы из Г высказываний, и

А ├ В, то Г ├ А→В, т.е. в Г выводима

формула А→В

Пример № 4

Проверить, что из $A \to B$, $B \to C$ формула $A \to C$ выводима в исчислении высказываний, т.е.

$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$

Решение примера № 4

1. $A \to B$ –гипотеза
2. $B \to C$ - гипотеза
3. A - тоже гипотеза
4. B выводимо по правилу заключения из п. 1 и п. 3
5. C выводимо по правилу заключения из п. 2 и п. 4
6. Следовательно, $A \to B,\ B \to C\ \ A \vdash C$, и , по теореме о дедукции, $A \to B,\ B \to C\ \vdash A \to C$

Разрешимость и независимость

Проблема разрешимости для исчисления высказываний *разрешима*

Система аксиом исчисления высказываний *независима*

Полнота и непротиворечивость

Исчисление высказываний *полно в узком смысле*, т.е. к системе аксиом нельзя добавить в качестве новой аксиомы недоказуемой в этом исчислении формулы

Исчисление высказываний *полно в широком смысле,* т.е. всякая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний

Исчисление высказываний *непротиворечиво*

Исчисление высказываний по Гильберту и Аккерману

Связки $\vee, \overline{}$ $(A \to B = \overline{A} \vee B)$

Аксиомы $A \vee A \to A$

$$A \vee B \to B \vee A$$

$$A \to A \vee B$$

$$(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$$

Правило вывода **MP**

Свойства исчисление высказываний (ИВ)

Исчисление высказываний:

- ***Разрешимо***
- ***Полно***
- ***Непротиворечиво***
- ***Система аксиом ИВ независима***
- ***Интерпретацией ИВ являются алгебра высказываний (АВ) и алгебра Буля (АБ)***
- ***Выводимые формулы в ИВ тождественно истинны в АВ и АБ***