

Модуль 3

Формальные теории и исчисления

Занятие 3.2. Исчисление высказываний



Содержание

- 1. Алфавит**
- 2. Формулы**
- 3. Аксиомы**
- 4. Правило вывода**
- 5. Правило подстановки**
- 6. Теорема дедукции**
- 7. Свойства исчисления высказываний**



Алфавит

связки

\neg , \rightarrow

служебные символы (,)

пропозициональные переменные

$a, b, \dots a_1, b_1, \dots$



Формулы

1. Переменные суть формулы

2. Если A, B формулы, то

$(\bar{A}), (A \rightarrow B)$ тоже формулы



АКСИОМЫ

$$A_1 : (A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$A_2 : ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow \\ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

$$A_3 : ((\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B))$$



Правило_вывода

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \textit{Modus_ponens}$$

правило отделения или
правило заключения (MP)



Интерпретация

Функция h называется **интерпретацией**, если для любых формул A и B исчисления высказываний h удовлетворяет следующим условиям

$$h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$$

$$h(A \rightarrow B) = h(A) \rightarrow h(B)$$



ИСТИННОСТЬ И ЛОЖНОСТЬ

Формула A исчисления высказываний *истинна* при некоторой интерпретации h тогда и только тогда, когда $h(A)=1$

В противном случае, говорят, что *A ложна* при интерпретации h



Тавтология и противоречие

Формула A исчисления высказываний является *тавтологией*, тогда и только тогда, когда она истинна независимо от интерпретации

Формула A называется *противоречием*, тогда и только тогда, когда она ложна при любой интерпретации



Пример № 1

Проверить, что формула R является тавтологией

$$R = \overline{(\bar{A} \rightarrow B)} \rightarrow A \rightarrow B$$



Решение примера № 1

$$R = \overline{(\overline{A} \rightarrow B)} \rightarrow A \rightarrow B$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>R</i>
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Формула *R* - тавтология



Правило подстановки

Пусть A – некая формула, выводимая (доказуемая) в исчислении высказываний, x - переменная, B – любая формула исчисления высказываний

Тогда формула, которая получается из формулы A путем подстановки в нее вместо переменной x формулы B , выводима (доказуема)
 $A(\dots x \dots)(B//x)$



Пример № 2

**Проверить, что формула $A \rightarrow A$
выводима в исчислении
высказываний**



Решение примера № 2

1. Подставим в аксиому **A2** вместо **B** $(A \rightarrow A)$, вместо **C** подставим **A**

$$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$$

2. Применив аксиому **A1**, и по правилу заключения получаем

$$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$$

3. Применив аксиому **A1** и по правилу заключения получаем $(A \rightarrow A)$



Теорема

***Каждая формула,
доказуемая в исчислении
высказываний,
тождественно истинна в
алгебре высказываний***



Пример № 3

Каждая аксиома – тождественно истинная

Правило подстановки, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам

Правило заключения, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам



Теорема дедукции

***Если Γ – множество формул,
 A и B – формулы из Γ высказываний, и
 $A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, т.е. в Γ выводима
формула $A \rightarrow B$***



Пример № 4

Проверить, что из $A \rightarrow B, B \rightarrow C$
формула $A \rightarrow C$ выводима в
исчислении высказываний, т.е.

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$



Решение примера № 4

1. $A \rightarrow B$ – гипотеза
2. $B \rightarrow C$ - гипотеза
3. A - тоже гипотеза
4. B выводимо по правилу заключения из п. 1 и п. 3
5. C выводимо по правилу заключения из п. 2 и п. 4
6. Следовательно, $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$, и, по теореме о дедукции, $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$



Разрешимость и независимость

**Проблема разрешимости для
исчисления высказываний
*разрешима***

**Система аксиом исчисления
высказываний *независима***



Полнота и непротиворечивость

Исчисление высказываний *полно в узком смысле*, т.е. к системе аксиом нельзя добавить в качестве новой аксиомы недоказуемой в этом исчислении формулы

Исчисление высказываний *полно в широком смысле*, т.е. всякая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний

**Исчисление высказываний
*непротиворечиво***



Исчисление высказываний по Гильберту и Аккерману

Связки \vee , $\bar{}$ ($A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$)

Аксиомы $A \vee A \rightarrow A$

$B \vee B \rightarrow A \vee$

$B \rightarrow A \vee$

$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee C)$

Правило вывода **MP**

Свойства исчисления высказываний (ИВ)

Исчисление высказываний:

- **Разрешимо**
- **Полно**
- **Непротиворечиво**
- **Система аксиом ИВ независима**
- **Интерпретацией ИВ являются алгебра высказываний (АВ) и алгебра Буля (АБ)**
- **Выводимые формулы в ИВ тождественно истинны в АВ и АБ**

