Элементы математической статистики

Лекция №3

Интервальное оценивание

Пусть $\hat{\theta}_1(x_1,...,x_n)$ и $\hat{\theta}_2(x_1,...,x_n)$ – такие функции от выборочных значений $x_1,...,x_n$, что

$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} \ge 1-\alpha, \qquad (3.1)$$

где α – небольшое число: $\alpha = 0,01;\ 0,05;\ 0,1.$ Обычно величину $1-\alpha$ обозначают через γ.

Интервал $\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$ называется доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия (надежности) $1-\alpha$.

Рассмотрим несколько случаев построения доверительных интервалов, если выборка $x_1,...,x_n$ взята из нормально распределенной генеральной совокупности.

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

А) При построении доверительного интервала, используется точечная оценка параметра μ – математического ожидания, т.е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что

$$M\bar{x} = \mu; \quad D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (3.2)$$

Поэтому, нормированная случайная величина

$$\frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \qquad (3.3)$$

имеет нормированное нормальное распределение $N(0,1)$. Границы доверительного интервала будем находить из соотношения

$$P\{|\bar{x} - \mu| \le \delta\} = 1 - \alpha, \qquad (3.4)$$

которое, используя предыдущую формулу (3.3), преобразуем к виду

$$P\left\{\frac{\left|\overline{x}-\mu\right|}{\sigma}\sqrt{n} \le \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = 1-\alpha. \qquad (3.5)$$

Отсюда получаем:

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1-\alpha \qquad (3.6)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ − функция Лапласа.

Из последнего соотношения (3.6) по таблице значений функции Лапласа (*Таблица II* Приложения), находим значение z_α:

$$z_\alpha = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \quad , \qquad (3.7)$$

из которого определяем величину

$$\delta = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (3.8)$$

Обычно используются стандартные значения (Таблица 2)

Таблица 2.

α	0,01	0,05	0,1
z_α	2,576	1,96	1,64

Величина δ задает границы доверительного интервала, т.е. определяет точность интервальной оценки. Коэффициент доверия $1-\alpha=\gamma$ имеет следующий смысл: если мы будем повторять выборку и для каждой из них находить доверительный интервал, то в среднем на 100 выборок доля тех интервалов, которые накроют оцениваемый параметр, составит $(1-\alpha)\cdot 100\%$.

Итак, мы получили доверительный интервал для параметра μ при известной дисперсии σ^2, как следует из (3.4):

$$\left|\bar{x} - \mu\right| \le z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

или в более принятой форме:

$$\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.9)$$

Из анализа формулы (3.9) можно сделать следующие выводы:

а) при увеличении объема выборки n точность интервальной оценки увеличивается, так как величина $\delta = z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ уменьшается. При больших n хорошей оценкой для μ становится $\overline{x}$, т.е. точечная оценка;

б) в силу того, что функция $\Phi(x)$ является неубывающей, при увеличении надежности γ растет величина δ, т.е. уменьшается точность (интервал становится шире);

в) для фиксированных значений надежности $1-\alpha=\gamma$ и точности δ из формулы (3.8) можно определить необходимый объем выборки, обеспечивающий заданное значение $1-\alpha$ и δ. Следует запомнить, что при неизменном объеме выборки одновременно увеличивать точность и надежность оценки **нельзя**.

Пример 1. При измерении уровня шума вырубочного пресса ПВГ-18 были получены следующие значения (дБ): 121,7; 117; 132,4; 117,9; 103,5 $(n = 5)$. Считая дисперсию известной и равной $\sigma^2 = 26$, найти доверительный интервал для математического ожидания уровня шума с надежностью $\gamma = 0,95$ $(\alpha = 1 - \gamma = 0,05)$.

Решение. Вычислим: $\overline{x} = \dfrac{121,7 + 117 + 132,4 + 117,9 + 103,5}{5} = 118,5$.

Для $\alpha = 0,05$ соответствующее значение $z_\alpha = 1,96$:

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = 1,96 \qquad \sqrt{n} = 2,24 \qquad \sigma = 5,1$$

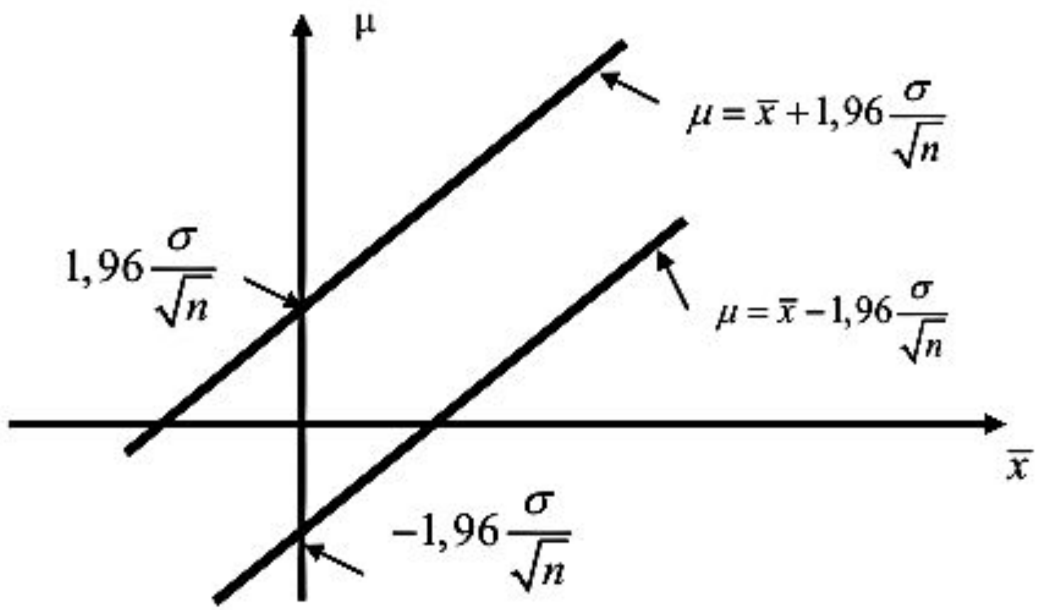
$$\delta = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \delta = 1,96\frac{5,1}{2,24} = 4,9$$

Окончательно получаем:

$$118,5 - 4,9 \le \mu \le 118,5 + 4,9$$

$$113,6 \le \mu \le 123,4$$

Б) Доверительный интервал для данных значений σ и n можно представить с помощью доверительной полосы графически



Границы задаются уравнениями:

$$\mu = \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = \bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Для любого вычисленного значения $\bar{x}$ по выборке данного объема n, используя рисунок, можно определить границы доверительного интервала для μ. При росте n границы доверительной полосы будут стремиться к линии $\mu = \bar{x}$. Рассмотренный доверительный интервал симметричен относительно $\bar{x}$. Кроме того, вероятность превзойти левую, либо правую границу интервала одинакова и равна $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$.

В) Для той же надежности γ можно построить и другой интервал, несимметричный. Вероятность того, что оцениваемый параметр лежит вне интервала, равна $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$, но вероятность того, что он лежит левее левой границы равна, например, 0,01, а вероятность того, что он лежит правее правой границы, равна 0,04 (0,01+0,04=0,05).

В этом случае вместо соотношения (3.5) будем использовать

$$P\left\{ z_1 \le \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma}\sqrt{n} \le z_2 \right\} = 0{,}95, \qquad (3.10)$$

а значения z_1 и z_2 найдем из соотношений:

$$P\left\{ \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma}\sqrt{n} \le z_1 \right\} = F(z_1) = 0{,}01,,$$

$$P\left\{ \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma}\sqrt{n} \le z_2 \right\} = F(z_2) = 0{,}96,$$

где $F(x)$ – функции распределения $N(0,1)$. Поскольку существует очевидное соотношение: $F(x) = 0,5 + \Phi(x)$, (значения $\Phi(x)$ берутся из *Таблицы II* Приложения), получаем, что

$$z_1 = -2,3 \qquad \left(F(-2,3) = 0,0107\right),$$

$$z_2 = 1,75 \qquad \left(F(1,75) = 0,9599\right).$$

Так как $z_1 \neq z_2$, то интервал несимметричен относительно $\bar{x}$. Следует отметить, что ширина симметричного интервала для $\gamma = 0,95$ равна $3,92 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, а для несимметричного интервала $(z_2 - z_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4,05 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, т.е. при прочих равных условиях симметричный интервал уже, а, значит, оценка точнее.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

В этом случае, помимо точечной оценки для μ, будем еще использовать точечную оценку для дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Для построения доверительного интервала используется величина

$$\frac{(\overline{x} - \mu)}{s}\sqrt{n},$$

имеющая распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Доверительный интервал будем находить из соотношения (3.11):

$$P\left\{\frac{|\overline{x} - \mu|}{s}\sqrt{n} \le \frac{\delta\sqrt{n}}{s}\right\} = 1 - \alpha. \qquad (3.11)$$

Теперь для определения величины δ воспользуемся таблицами распределения Стьюдента (*Таблица III* Приложения)

откуда

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{s} = t_{\alpha,n-1}; \quad \delta = t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно, доверительный интервал для μ запишется в следующем виде:

$$\overline{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (3.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Распределение Стьюдента при $n > 50$ близко к стандартному нормальному распределению. Поэтому, при $n > 50$ для определения величины δ можно пользоваться не значением $t_{\alpha,n-1}$, а соответствующим значением z_α. Например, при $n = 60$:

α	0,1	0,05	0,01
z_α	1,64	1,96	2,576
$t_{\alpha,59}$	1,67	2,00	2,66

Выводы а) − в) остаются в силе и для соотношения (3.12).

Пример 2. При замере освещенности в одной из лабораторий были получены следующие значения в лк. 356,4; 353,3; 354,3; 350,5; 357,2. Найти доверительные границы для математического ожидания уровня освещенности при коэффициенте доверия $\gamma = 0,95$ ($n = 5$).

Решение. $\bar{x} = 354,9$; $n = 5$; $\gamma = 0,95$; $\alpha = 0,05$; $\sqrt{5} = 2,236$;

$$s^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 354,9)^2 = 6,86; \quad s = 2,62.$$

Для $\gamma = 0,95$ и четырех степеней свободы по таблицам распределения Стьюдента находим $t_{\alpha,n-1} = 2,776$. Следовательно, доверительный интервал, определяемый по формуле (3.12), запишется в виде:

$$354,9 - 2,776\frac{2,62}{2,236} \le \mu \le 354,9 + 2,776\frac{2,62}{2,236}$$

или

$$352,5 \le \mu \le 357,3.$$

Доверительный интервал для дисперсии

При построении доверительного интервала для дисперсии воспользуемся тем, что величина $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ принадлежит распределению Пирсона (χ^2) с $(n-1)$ степенями свободы.

Доверительный интервал будем находить из следующего соотношения:

$$P\left\{\left|s^2-\sigma^2\right|\le\delta\right\}=1-\alpha=\gamma, \qquad (3.13)$$

которое с помощью тождественных преобразований сводится к виду:

$$P\left\{\underline{x}^2\le\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\le\overline{x}^2\right\}=\gamma. \qquad (3.14)$$

Здесь $\underline{x}^2$ − нижняя граница доверительного интервала для случайной величины $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$; $\overline{x}^2$ − верхняя граница.

Значение $\underline{x}^2$ и $\overline{x}^2$ находим из таблиц распределения χ^2 (*Таблица III* Приложения) чаще всего из следующих соотношений:

$$P\left\{\chi^2_{n-1} \geq \overline{x}^2\right\} = \frac{\alpha}{2}; \quad P\left\{\chi^2_{n-1} \geq \underline{x}^2\right\} = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad (3.15)$$

Найденные значения $\underline{x}^2$ и $\overline{x}^2$ подставляем в выражение

$$\underline{x}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \overline{x}^2, \qquad (3.16)$$

откуда находим искомый доверительный интервал для σ^2:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\overline{x}^2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\underline{x}^2} \qquad (3.17)$$

При $n > 30$ распределение χ_n^2 близко к $N(n, 2n)$. Поэтому в тех случаях, когда объем выборки $n > 30$, можно пользоваться для нахождения границ доверительного интервала стандартными значениями z_α нормального распределения, предварительно сделав нормировку случайной величины $\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$.

Итак,

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in N(n-1; 2(n-1))$$

Нормируем случайную величину $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$:

$$\frac{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \in N(0;1)$$

Для данного значения надежности $1-\alpha$ находим значение z_α.

Тогда

$$P\left\{\left|\frac{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\right| \le z_\alpha\right\}=1-\alpha$$

Путем тождественных преобразований выражения, стоящего в фигурных скобках, получаем доверительный интервал для σ^2:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{(n-1)+z_\alpha\sqrt{2(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{(n-1)-z_\alpha\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (3.18)$$

Пример 3. Используя данные предыдущего примера, построить доверительный интервал для σ^2.

Решение. $n=5$; $\gamma=0,95$; $s^2=6,86$.

$$P\left\{\chi_4^2 \geq \overline{x}^2\right\}=0,025; \quad P\left\{\chi_4^2 \geq \underline{x}^2\right\}=0,975$$

Воспользовавшись таблицей, находим (*Таблица III* Приложения)

$$\underline{x}^2=0,484; \ \overline{x}^2=11,1$$

$$\frac{4\cdot 6,86}{11,1} \leq \sigma^2 \leq \frac{4\cdot 6,86}{0,484}$$

$$2,47 \leq \sigma^2 \leq 57,1$$

Доверительный интервал получился очень широким, что, безусловно, объясняется очень маленьким объемом выборки.