3. Метод сопротивления

3.1 Нормальные поля

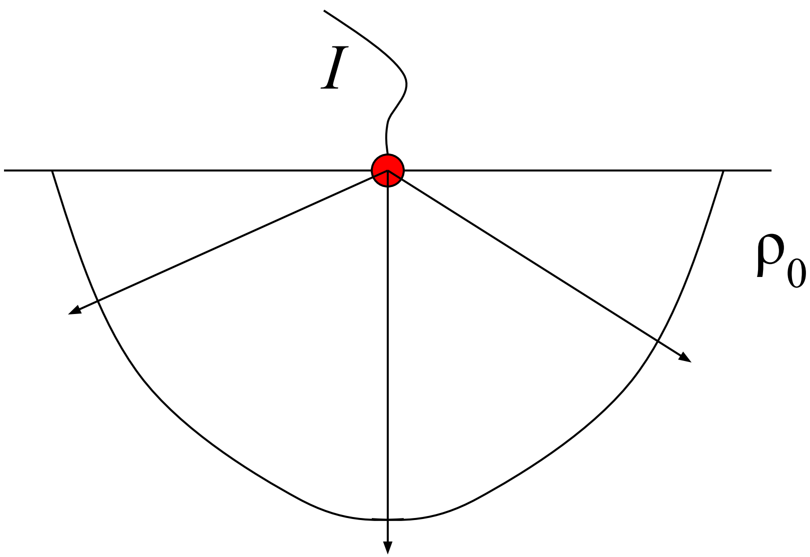
Поле точечного источника

Уравнение Лапласа в сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0$$

С учетом симметрии:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=0$$



$$U=\frac{I\rho_0}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Понятие кажущегося сопротивления

Нормальное поле – поле в однородной среде:

$$\Delta U_0 = \frac{I\rho_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right)$$

В неоднородной среде:

$$\frac{\Delta U}{\Delta U_0} = \frac{\rho_k}{\rho_0}$$

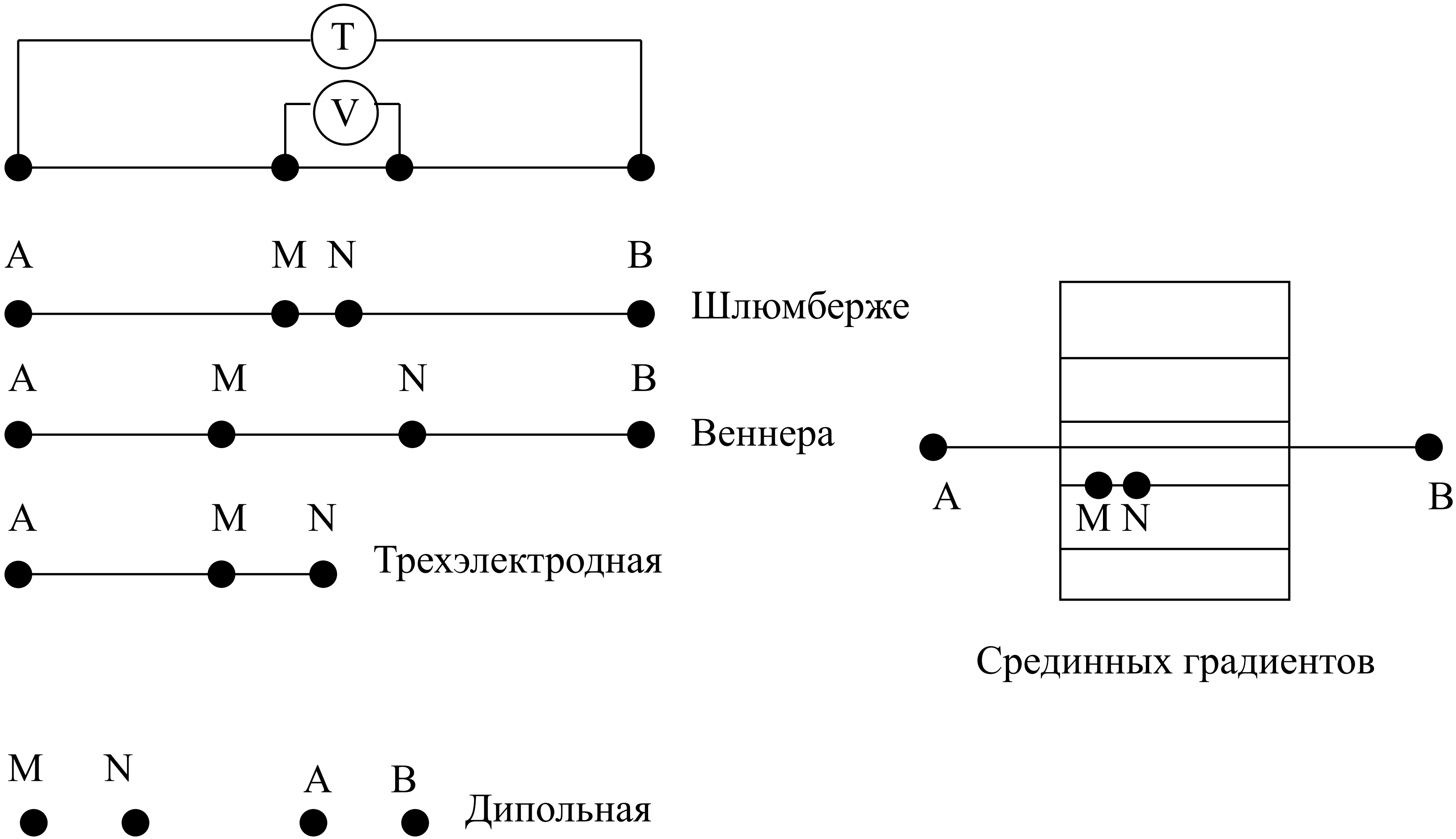
или

$$\rho_k = \frac{\Delta U}{L \cdot I} = K \cdot \frac{\Delta U}{I}$$

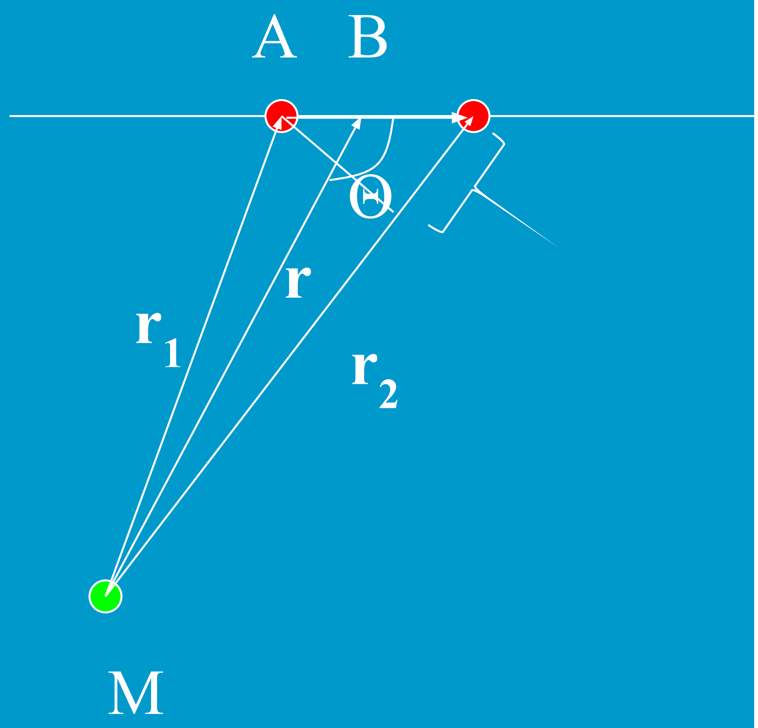
где L – нормальное поле при I=1, ρ_0=1

$$L = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} \right)$$

Установки КС



Поле дипольного источника



$$U_d(M) = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_2 - r_1 \approx AB\cos\Theta$$

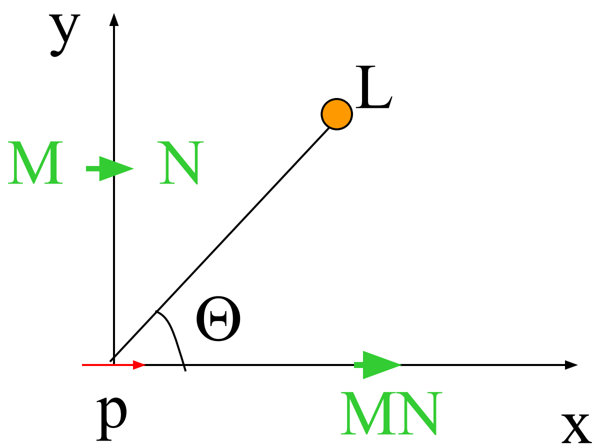
$$r_1 r_2 \approx r^2$$

$$U_d(M) = \frac{I\rho}{2\pi}\frac{AB}{r^2}\cos\Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^2}\cos\Theta$$

Найдем компоненты поля диполя в полярной системе координат

$$U_d(M) = \frac{p\rho}{2\pi r^2}\cos\Theta \qquad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p\rho}{\pi r^3}\cos\Theta = \frac{p\rho}{\pi r^4}x$$

$$E_\Theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \Theta} = \frac{p\rho}{2\pi r^3}\sin\Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^4}y$$

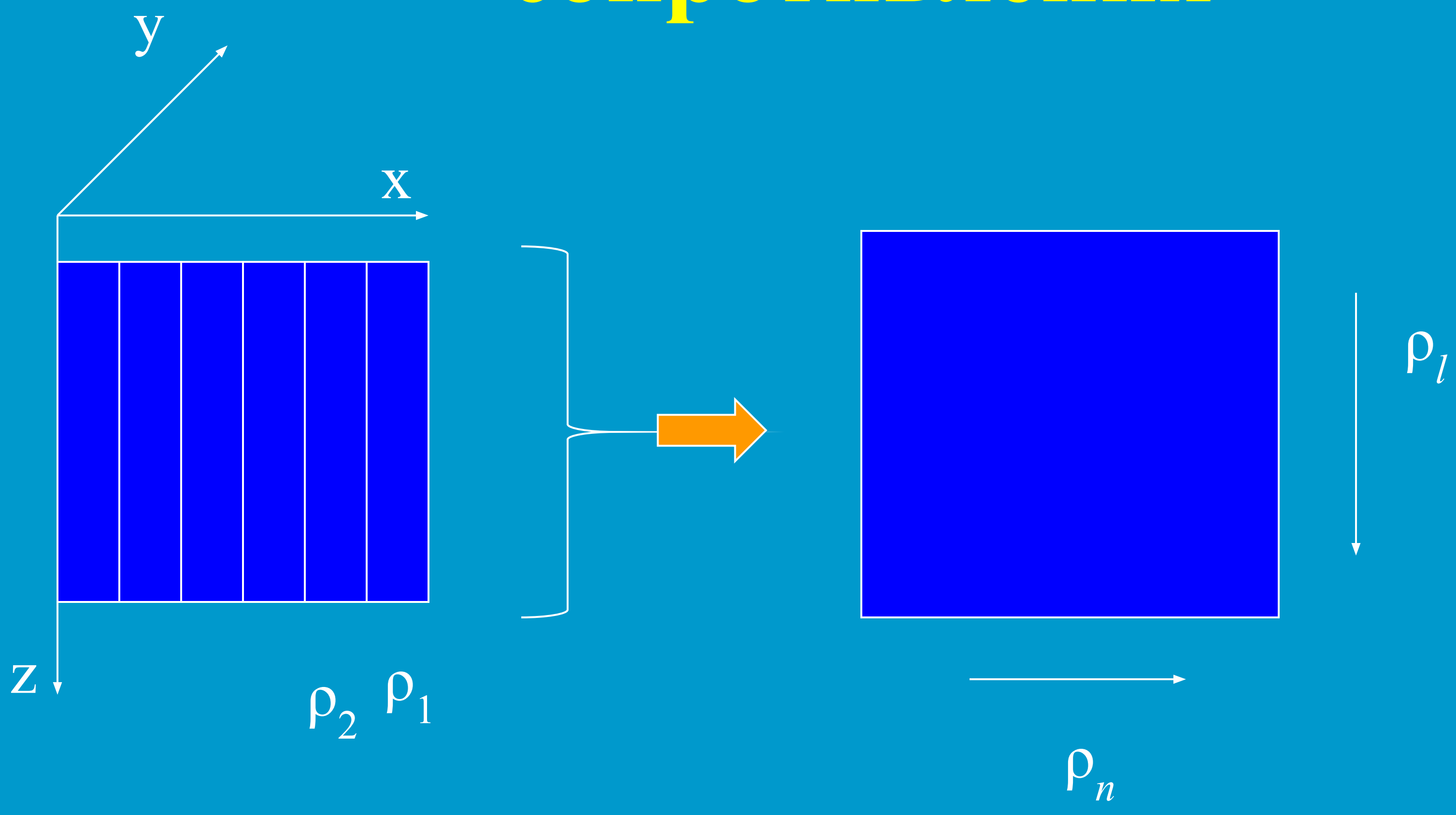


Вдоль оси x: $\Theta = 0 : E_r = \frac{p\rho}{\pi r^3}; E_\Theta = 0$

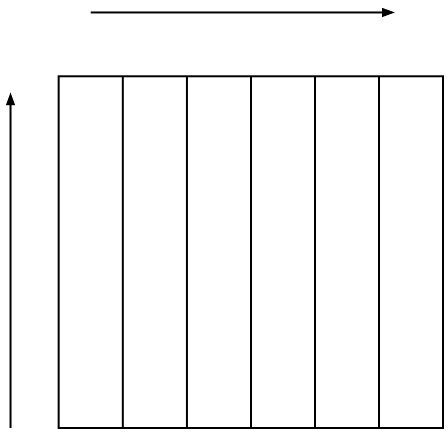
Вдоль оси y: $\Theta = \frac{\pi}{2}; E_r = 0; E_\Theta = \frac{p\rho}{2\pi r^3}$

Дипольная осевая и дипольная экваториальная установки

Анизотропия удельного сопротивления



Выясним соотношение σ_n и σ_l



$$\frac{\sigma_l}{\sigma_n} = \frac{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)}{(d_1 + d_2)^2} =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_1 d_2 \sigma_1 \rho_2 + d_1 d_2 \sigma_2 \rho_1 + d_2^2}{(d_1 + d_2)^2} =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)}{(d_1 + d_2)^2}$$

$$\sigma_l = \frac{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$\sigma_n = \frac{d_1 + d_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \end{array} \right\} \quad x + \frac{1}{x} > 2 \qquad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$\boxed{x \neq 1 \Rightarrow \sigma_l > \sigma_n}$$

Плотность тока:

$$j_x = \frac{E_x}{\rho_n} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial U}{\partial x} \qquad j_y = \frac{E_y}{\rho_{\square}} = -\frac{1}{\rho_{\square}}\frac{\partial U}{\partial y} \qquad j_z = \frac{E_z}{\rho_l} = -\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial U}{\partial z}$$

В среде нет источников тока:

$$div\mathbf{j} = -\frac{1}{\rho_n}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_{\square}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$$

Введем новые координаты: $x_1 = x\sqrt{\rho_n}$ $\quad y_1 = y\sqrt{\rho_{\square}}$ $\quad z_1 = z\sqrt{\rho_l}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\sqrt{\rho_n} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x}\sqrt{\rho_n} = \frac{\partial^2 U \partial x_1}{\partial x^2{}_1 \partial x}\sqrt{\rho_n} = \rho_n \frac{\partial^2 U}{\partial x^2{}_1}$$

$$div\mathbf{j} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z_1{}^2}\right) = 0$$

Решение: $$U = \frac{I\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{4\pi\sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l(y^2 + z^2)}}$$

Введем коэффициент анизотропии: $$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_l}} \geq 1$$

Линии равного потенциала: $$\rho_n x^2 + \rho_l(y^2 + z^2) = const$$

$$\frac{x^2}{\rho_l} + \frac{y^2}{\rho_n} + \frac{z^2}{\rho_n} = const$$

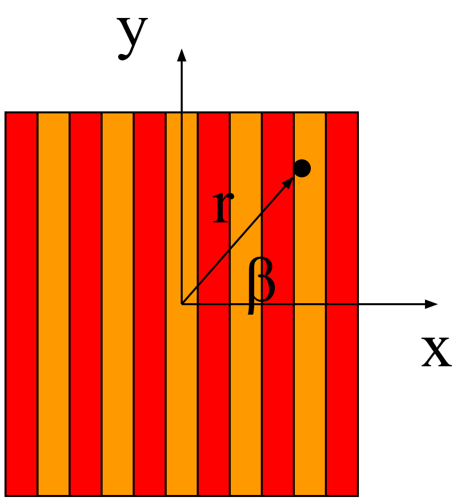
Концентрические сжатые эллипсоиды вращения, малая ось направлена вдоль оси X

Для анизотропного полупространства:

$$U = \frac{I\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l(y^2 + z^2)}}$$

и на дневной поверхности:

$$U = \frac{I\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n x^2 + \rho_l y^2}}$$



Введем полярные координаты:

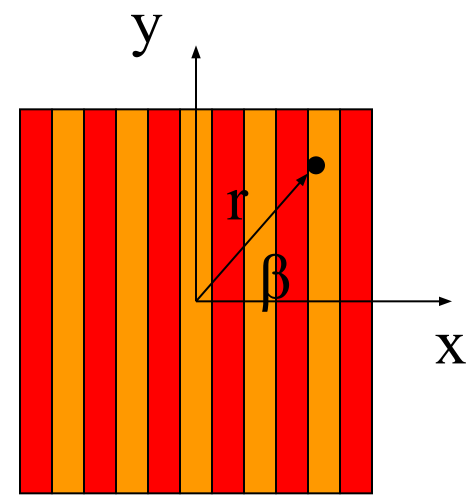
$$x = r\cos\beta;\, y = r\sin\beta$$

$$U = \frac{I\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{2\pi\sqrt{\rho_n r^2\cos^2\beta + \rho_l r^2\sin^2\beta}} =$$

$$= \frac{I\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{2\pi r\sqrt{\rho_n\cos^2\beta + \rho_l\sin^2\beta}}$$

$$U = \frac{I\rho_{эфф}}{2\pi r}$$

$$\rho_{эфф}(\beta) = \frac{\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_n \cos^2\beta + \rho_l \sin^2\beta}}$$



$$\rho_{эфф}(0) = \frac{\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_n}} = \rho_{\square}$$

$$\rho_{эфф}(\pi/2) = \frac{\rho_{\square}\sqrt{\rho_n}}{\sqrt{\rho_l}} = \sqrt{\rho_{\square}\rho_n}$$ Среднее геометрическое сопротивление

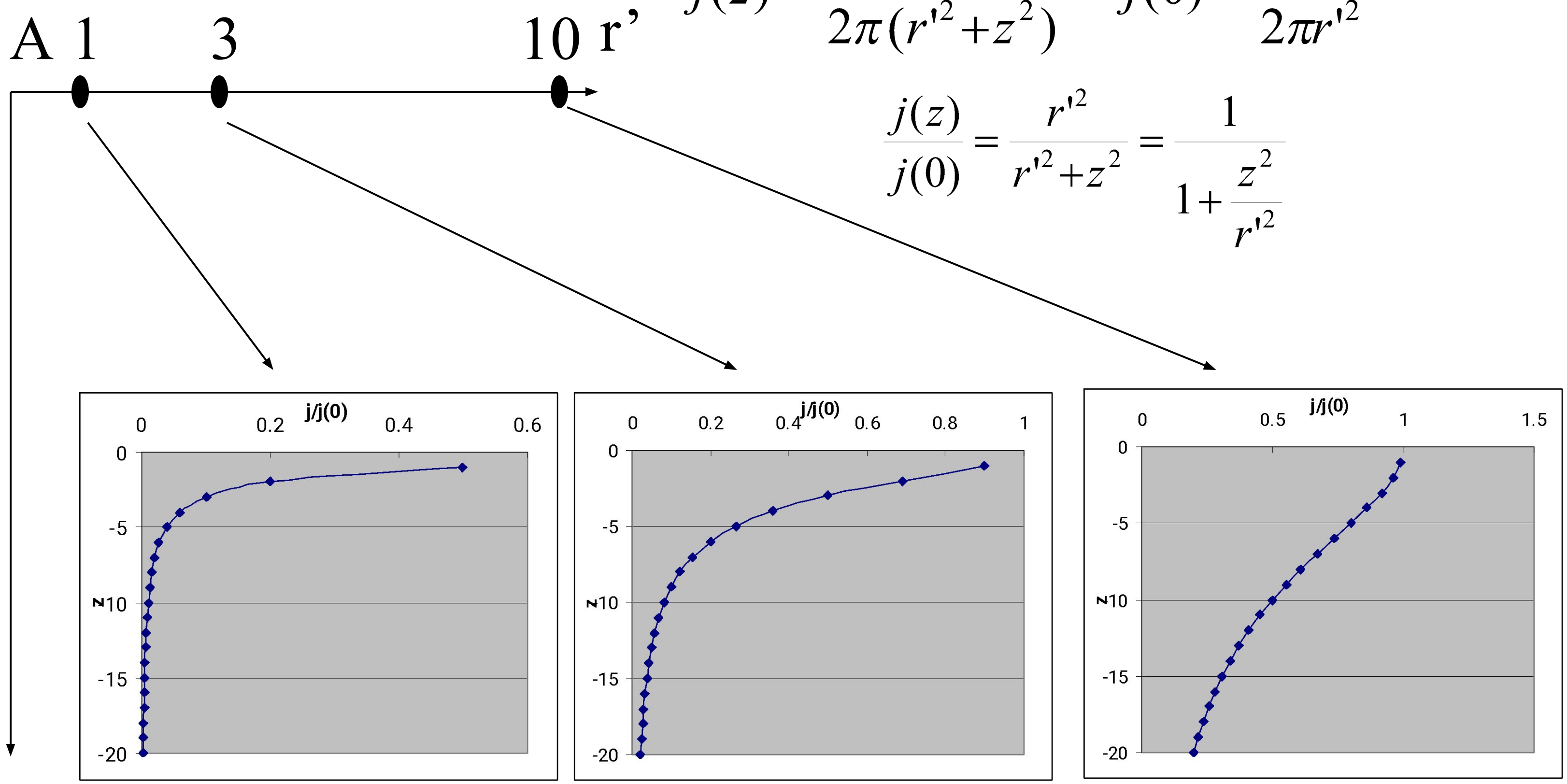
$$\frac{\rho_{эфф}(\pi/2)}{\rho_{эфф}(0)} = \frac{\sqrt{\rho_l\rho_n}}{\rho_l} = \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_l}} = \lambda$$

Эффективное (кажущееся) сопротивление в направлении слоистости – больше, чем в направлении вкрест слоистости- Парадокс анизотропии!

Глубина проникновения тока

$$j(z)=\frac{I}{2\pi(r'^2+z^2)} \qquad j(0)=\frac{I}{2\pi r'^2}$$

$$\frac{j(z)}{j(0)}=\frac{r'^2}{r'^2+z^2}=\frac{1}{1+\frac{z^2}{r'^2}}$$



Глубина проникновения тока растет с расстоянием между источником поля и точкой наблюдения!