Передача сигналов через линейные системы

Лекции по курсу

«Электроника систем регистрации элементарных частиц»

Жуланов Владимир Викторович

тел. 329-47-32

e-mail: zhulanov@inp.nsk.su

2.1 Линейная передающая система

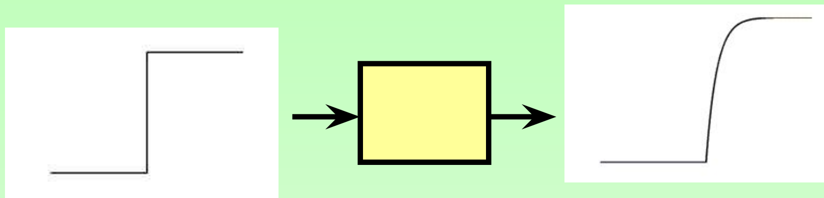
$\boxed{}$ — <u>*линейная передающая система*</u>

$$f_{\text{in}}(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow f_{\text{out}}(t) \qquad g_{\text{in}}(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow g_{\text{out}}(t)$$

$$af_{\text{in}}(t) + bg_{\text{in}}(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow af_{\text{out}}(t) + bg_{\text{out}}(t)$$

Тестовые сигналы

Скачек тока или напряжения («ступенька»)

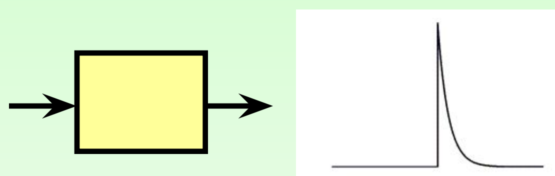


$F(t)$

Переходная функция системы

Единичный импульс

$\delta(t)$



$h(t)$

Импульсная характеристика системы

Свойства линейных систем

Физическая реализуемость. Если входное воздействие возникает в момент времени 0, то импульсная характеристика и переходная функции равны 0 при $t<0$:

$$v_{in}(t) = 0, \text{ при } t < 0 \Rightarrow h(t) = 0, F(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

Устойчивость. Система со временем «забывает» о входном воздействии:

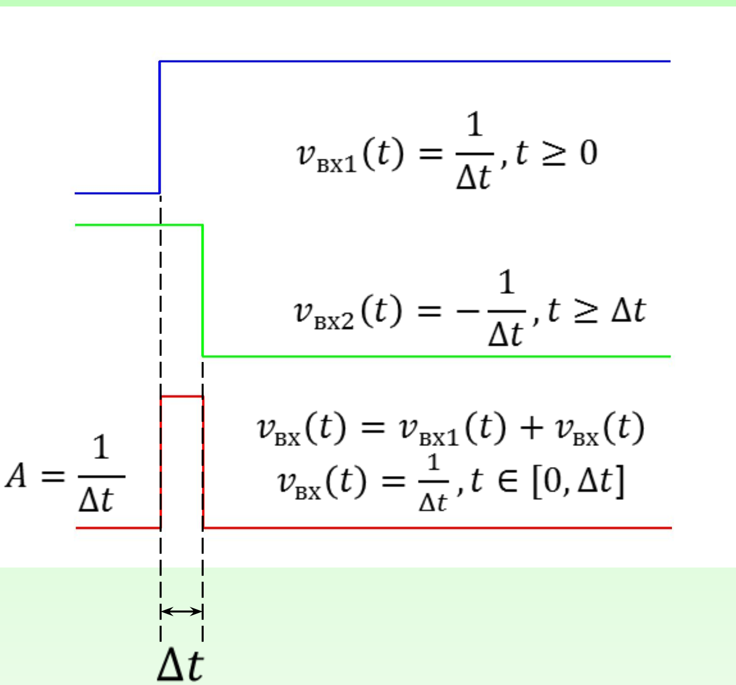
$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$$

Свойство стационарных линейных систем:

$$f_{\text{in}}(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow f_{\text{out}}(t) \qquad\qquad f_{\text{in}}(t - t_1) \rightarrow \boxed{} \rightarrow f_{\text{out}}(t - t_1)$$

Связь импульсной характеристики и переходной функции

Входной сигнал



$$v_{\text{вх1}}(t) = \frac{1}{\Delta t}, t \geq 0$$

$$v_{\text{вх2}}(t) = -\frac{1}{\Delta t}, t \geq \Delta t$$

$$A = \frac{1}{\Delta t}$$

$$v_{\text{вх}}(t) = v_{\text{вх1}}(t) + v_{\text{вх}}(t)$$

$$v_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{\Delta t}, t \in [0, \Delta t]$$

$$\Delta t$$

$$v_{\text{вых}} \to \delta(t)$$

Выходной сигнал

$$v_{\text{вых1}} = \frac{1}{\Delta t} F(t)$$

$$v_{\text{вых2}} = \frac{-1}{\Delta t} F(t - \Delta t)$$

$$v_{\text{вых}} = v_{\text{вых1}} + v_{\text{вых2}} = \frac{F(t) - F(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$v_{\text{вых}} \to F'(t)$$

То есть $h(t) = F'(t)$

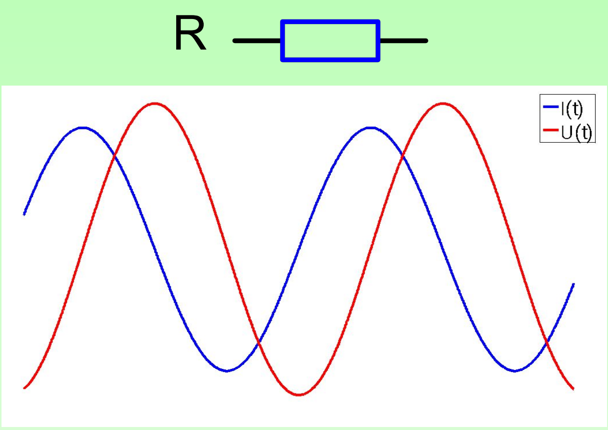
2.2 Классический метод расчета реакции линейной системы на входное воздействие

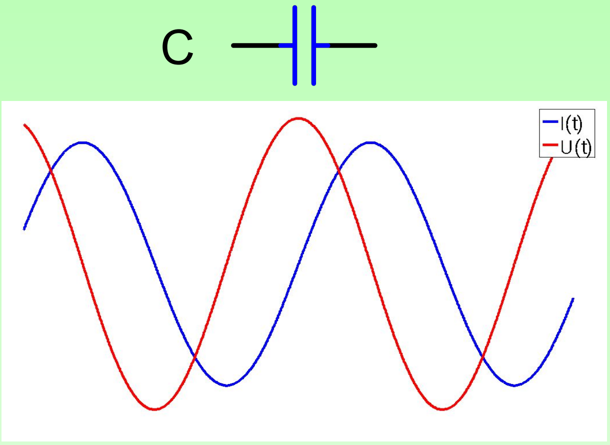
$$i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V(t)$$

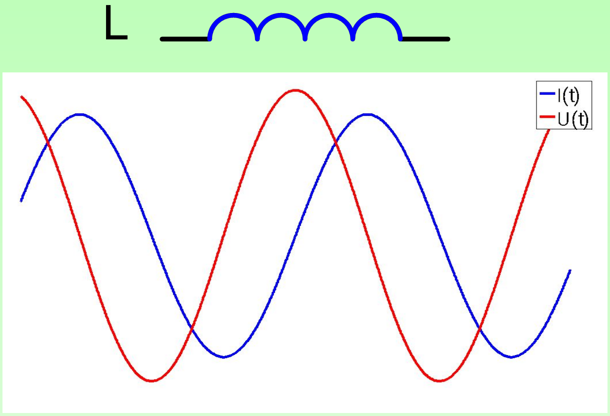
$$R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

Ввиду своей сложности, метод непригоден для ручного расчета сложных схем

Метод интеграла Фурье







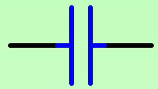
$$U(t) = I(t) * R \qquad I(t) = C\frac{d}{dt}U(t) \qquad U(t) = L\frac{d}{dt}(t)$$

$$U(t) = U_0 \cos \omega t = U_0 Re[e^{j\omega t}] \Rightarrow \dot{U}$$
$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 Re[e^{j\omega t}] \Rightarrow \dot{I}$$

- представление тока и напряжения в комплексном виде

R 

$$U(t) = I(t) * R$$
$$\dot{U} = \dot{I} * R$$

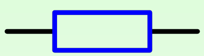
C 

$$I(t) = C\frac{d}{dt}U(t) = \mathrm{C}\frac{d}{dt}\mathrm{U}_0\mathrm{e}^{j\omega t+\varphi_0}$$
$$I(t) = Cj\omega U_0\mathrm{e}^{j\omega t+\varphi_0} = j\omega CU(t)$$
$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

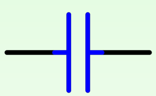
L 

$$U(t) = L\frac{d}{dt}I(t) = L\frac{d}{dt}I_0\mathrm{e}^{j\omega t+\varphi_0}$$
$$U(t) = Lj\omega I_0\mathrm{e}^{j\omega t+\varphi_0} = j\omega LI(t)$$
$$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$$

Закон Ома в комплексном виде



$$\dot{X} = R$$



$$\dot{X} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\dot{X} = j\omega L$$

$$\dot{U} = \dot{X}\dot{I}$$

$\dot{X}$- импеданс

Решение уравнения электрической цепи в комплексном виде

$$I(t)R + L\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}\int I(t)dt = U(t) \Rightarrow$$

$$\dot{U} = \dot{I}R + \dot{I}\dot{X}_L + \dot{I}\dot{X}_C = \dot{I}\left(R + \dot{X}_L + \dot{X}_C\right)$$

$$\dot{I} = \frac{1}{R + \dot{X}_L + \dot{X}_C}\dot{U}$$

$$I(t) = Re[\frac{1}{R + \dot{X}_L + \dot{X}_C}U_0 e^{j\omega t + \varphi_0}]$$

- решение для *I(t)* на одной гармонике (частоте)

Для произвольного сигнала $U(t)$ требуется преобразование Фурье – разложение сигнала на гармоники

Для восстановления $I(t)$ из набора его гармоник (спектра) требуется обратное преобразование Фурье

$$f_{\text{in}}(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow f_{\text{out}}(t)$$

$$\dot{F}_{\text{in}}(\omega) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \dot{F}_{\text{out}}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{F}_{\text{in}}(\omega)$$

$\dot{K}(\omega)$ – комплексный коэффициент преобразования линейной системы

$$\dot{F}_{\text{in}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{in}}(t) e^{-j\omega t}$$

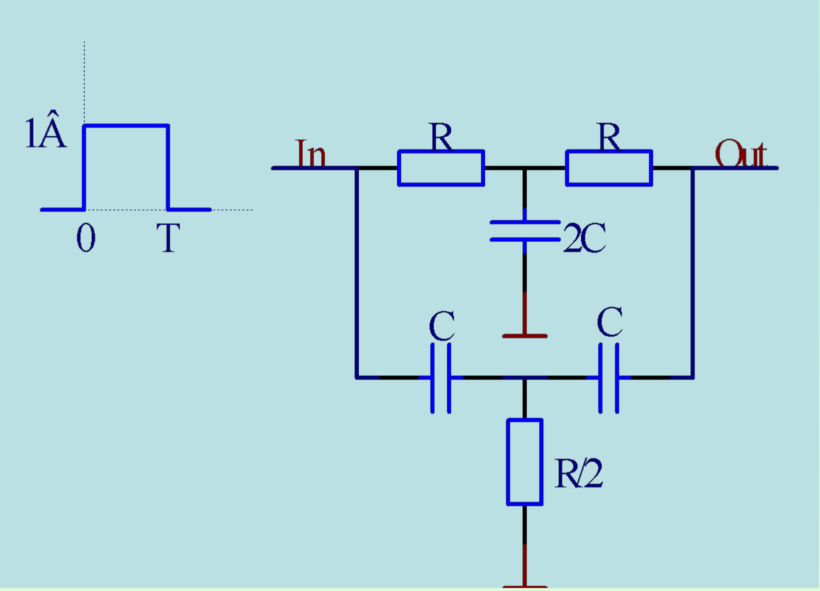
$$f_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}(\omega)\dot{F}_{\text{in}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\dot V_1(\omega) \rightarrow \boxed{K_{12}} \rightarrow \dot V_2(\omega) \rightarrow \boxed{K_{23}} \rightarrow \dot V_3(\omega)$$

$$\dot V_3(\omega) = \dot V_2(\omega)\dot K_{23}(\omega) = \left(\dot V_1(\omega)\dot K_{12}(\omega)\right)\dot K_{23}(\omega) =$$
$$= \dot V_1(\omega)\left(\dot K_{12}(\omega)\dot K_{23}(\omega)\right) = \dot V_1(\omega)\dot K_{13}(\omega)$$
$$\dot K_{13}(\omega) = \dot K_{12}(\omega)\dot K_{23}(\omega)$$

$$\dot V_1(\omega) \rightarrow \boxed{K_{13}} \rightarrow \dot V_3(\omega)$$

Пример расчета фильтра методом Фурье



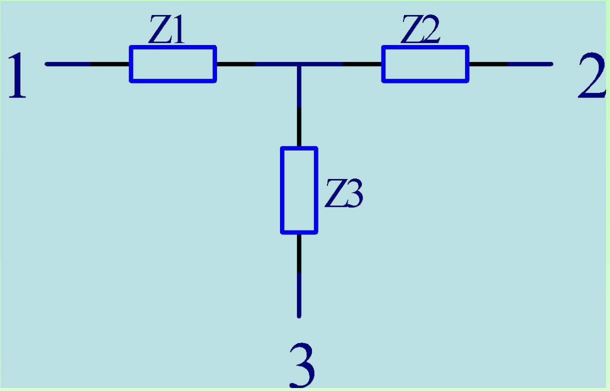
Двойной Т-фильтр

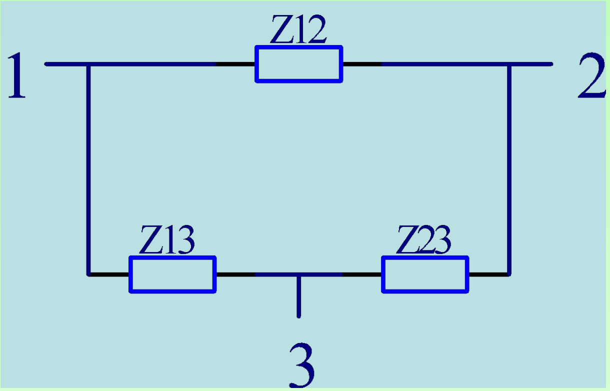
$$v_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \in (0, T) \\ 0, t > T \end{cases}$$

$$\dot{V}_{\text{in}}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

$$\dot{V}_{\text{in}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_{\text{in}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int\limits_{0}^{T} e^{-j\omega t} dt$$

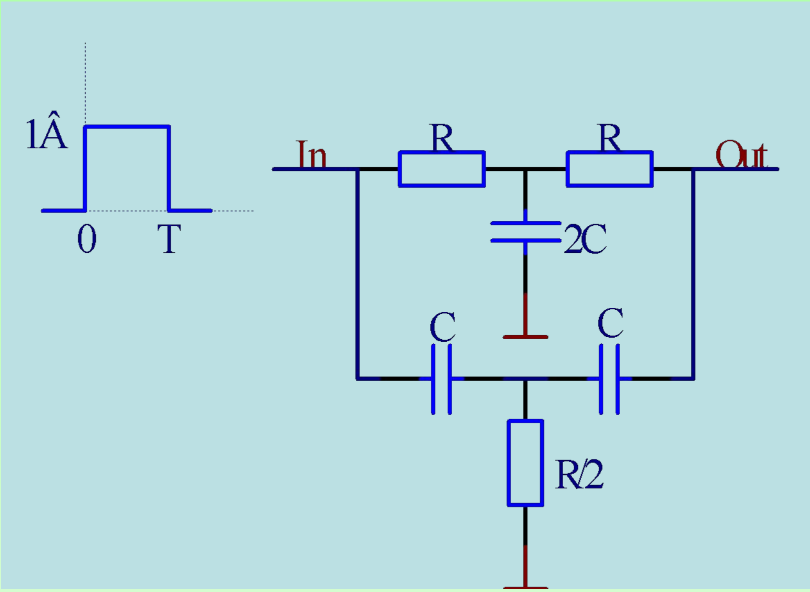
Преобразование «треугольник—звезда»

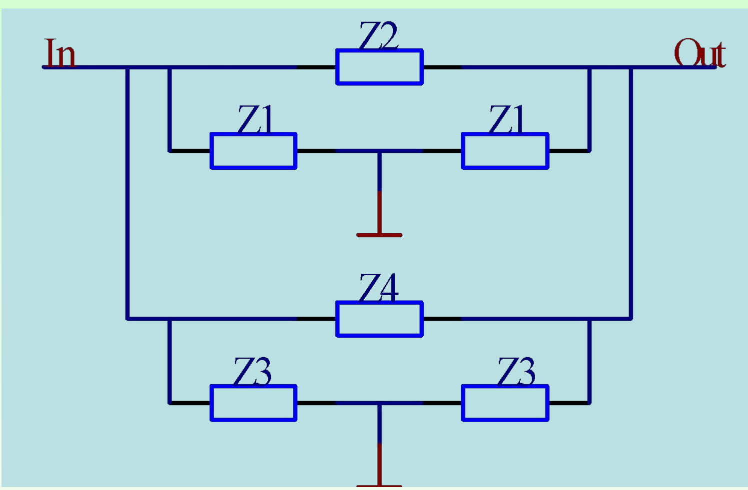




$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}}; Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}}; Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}}$$

$$Z_{12} = \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_3}; Z_{13} = \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_2}; Z_{23} = \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_1}$$





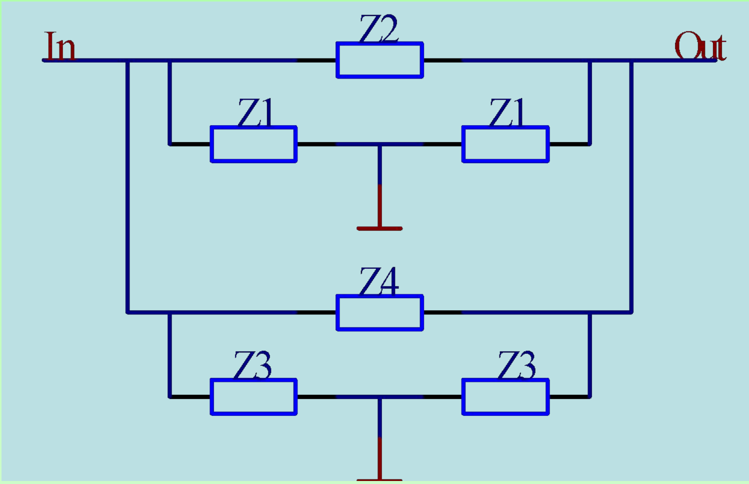
$$\dot{X} = \frac{1}{j\omega C}$$ – импеданс емкости

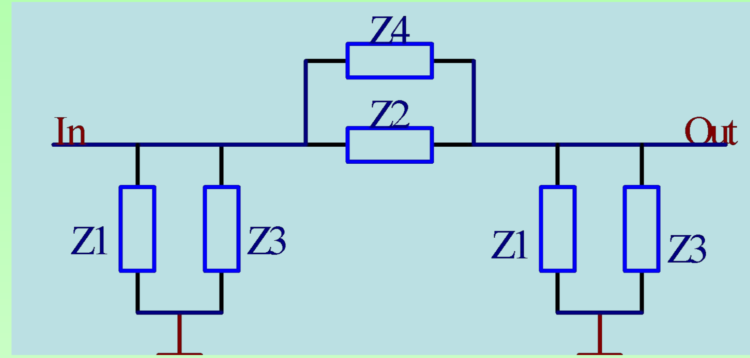
$$\dot{Z}_1 = \frac{R\dot{X}/2 + R\dot{X}/2 + R^2}{R} = R + \dot{X}$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{R\dot{X}/2 + R\dot{X}/2 + R^2}{\dot{X}/2} = 2\frac{R}{\dot{X}}(R + \dot{X})$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{X}R/2 + \dot{X}R/2 + \dot{X}^2}{\dot{X}} = R + \dot{X}$$

$$\dot{Z}_4 = \frac{\dot{X}R/2 + \dot{X}R/2 + \dot{X}^2}{R/2} = 2\frac{\dot{X}}{R}(R + \dot{X})$$

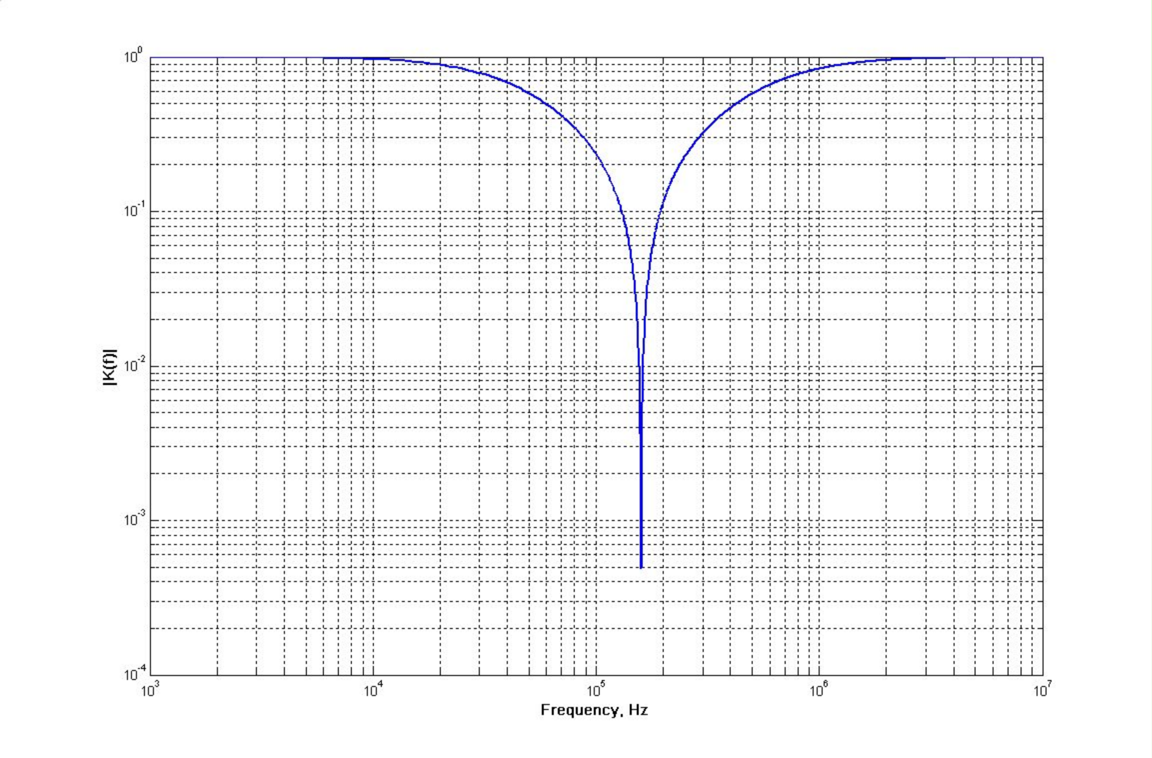




$$\dot K(\omega)=\frac{\langle \dot Z_1 | \dot Z_3\rangle}{\langle \dot Z_1 | \dot Z_3\rangle+\langle \dot Z_2 | \dot Z_4\rangle}=\frac{(R+\dot X)/2}{(R+\dot X)/2+2\frac{\frac{R}{\dot X}\cdot\frac{\dot X}{R}}{\frac{R}{\dot X}+\frac{\dot X}{R}}(R+\dot X)}=\frac{1}{1+4\frac{R\dot X}{R^2+\dot X^2}}=\frac{R^2+\dot X^2}{R^2+4R\dot X+\dot X^2}$$

$$\dot K(\omega)=\frac{1+(j\omega\tau)^2}{1+4j\omega\tau+(j\omega\tau)^2},\ \text{где}\ \tau=RC$$

Передаточная функция



$$\dot{V}_{\text{out}}(\omega)=\dot{V}_{\text{in}}(\omega)\dot{K}(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\frac{1+(j\omega\tau)^2}{1+4j\omega\tau+(j\omega\tau)^2}$$

$$v_{\text{out}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\frac{1+(j\omega\tau)^2}{1+4j\omega\tau+(j\omega\tau)^2}e^{j\omega t}d\omega=v_{\text{in}}(t)-\frac{2\tau}{\pi}(I_1-I_2)$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega\tau+(j\omega\tau)^2}d\omega;\;I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega(t-T)}}{1+4j\omega\tau+(j\omega\tau)^2}d\omega$$

$\omega_1 = j\frac{2+\sqrt{3}}{\tau}, \omega_2 = j\frac{2-\sqrt{3}}{\tau}$ — два полюса подинтегральной функции

$$I_1(t) = \begin{cases} 2\pi j(\operatorname*{res}_{\omega=\omega_1} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} + \operatorname*{res}_{\omega=\omega_2} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2}), & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

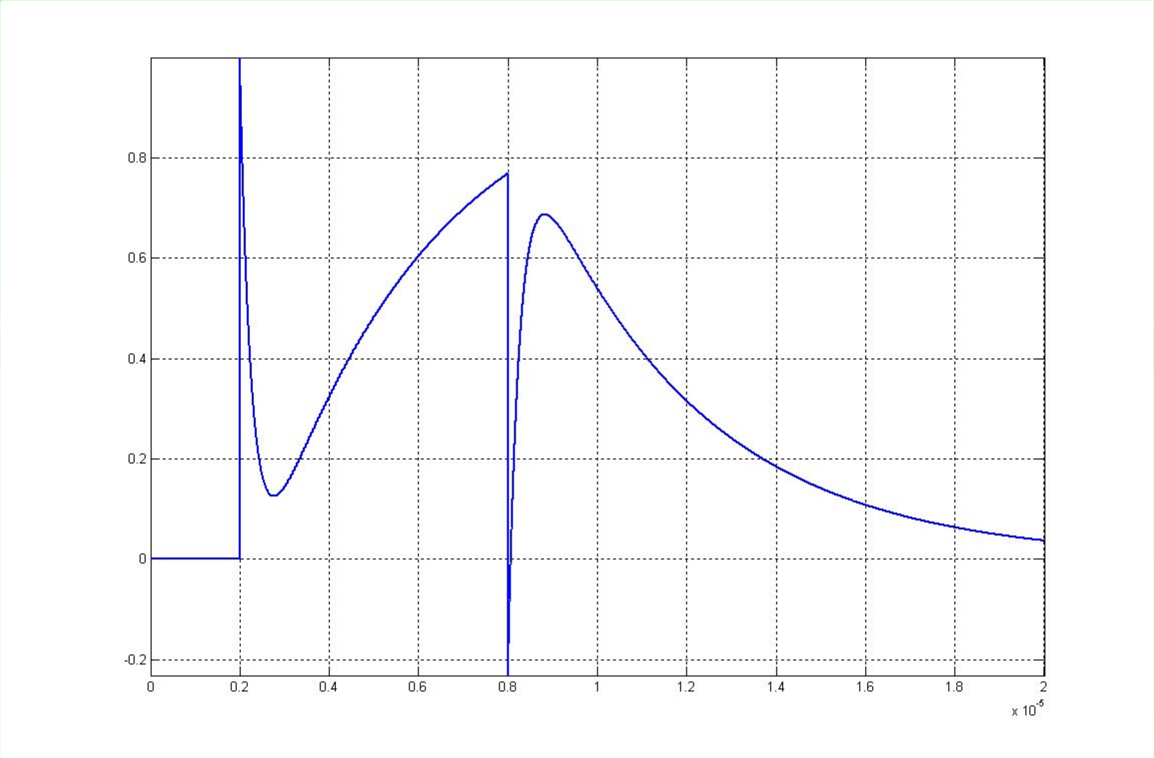
$$2\pi j \operatorname*{res}_{\omega=\omega_1} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} = 2\pi j \frac{\omega-\omega_1}{(j\tau(\omega-\omega_1))(j\tau(\omega-\omega_2))} e^{j\omega t}\Big|_{\omega=\omega_1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-t(2+\sqrt{3})/\tau}$$

$$2\pi j \operatorname*{res}_{\omega=\omega_2} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} = 2\pi j \frac{\omega-\omega_2}{(j\tau(\omega-\omega_1))(j\tau(\omega-\omega_2))} e^{j\omega t}\Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-t(2-\sqrt{3})/\tau}$$

$$I_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}\tau}(e^{-t(2-\sqrt{3})/\tau} - e^{-t(2+\sqrt{3})/\tau}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

$$I_2(t) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-2(t-T)/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}(t-T)/\tau), & \text{если } t > T \\ 0, & \text{если } t < T \end{cases}$$

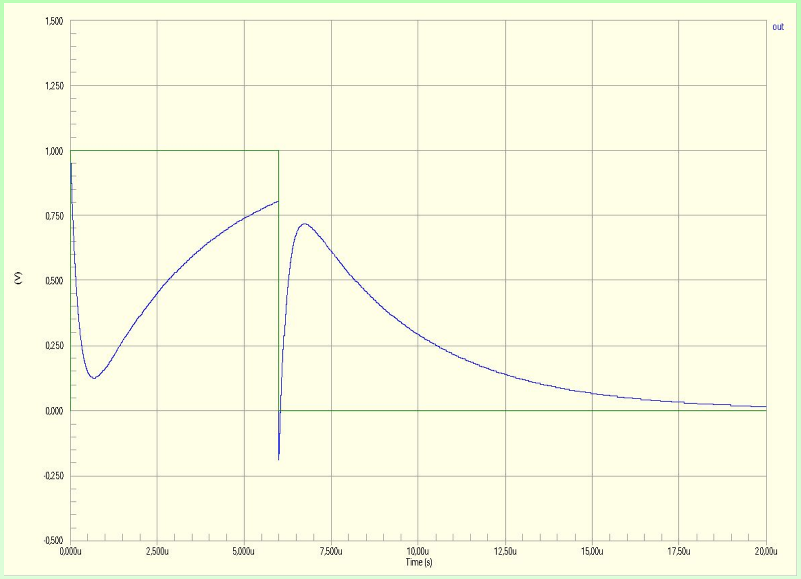
$$v_{\text{out}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t \in (0, T) \\ \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2(t-T)/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}(t-T)/\tau) - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t > T \end{cases}$$

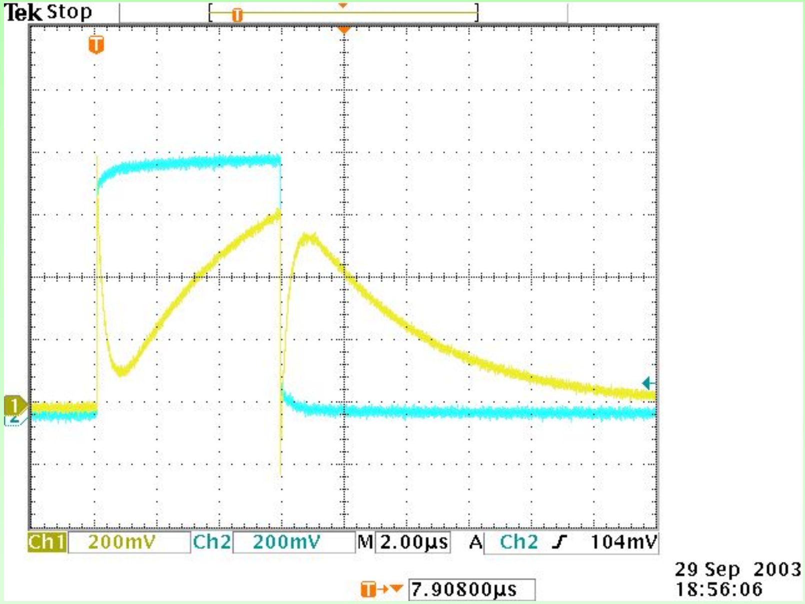


Результат вычислений для:

R=300 Ом, C=3.3 нФ, τ=1мкс, T=6 мкс

Моделирование, реальное измерение



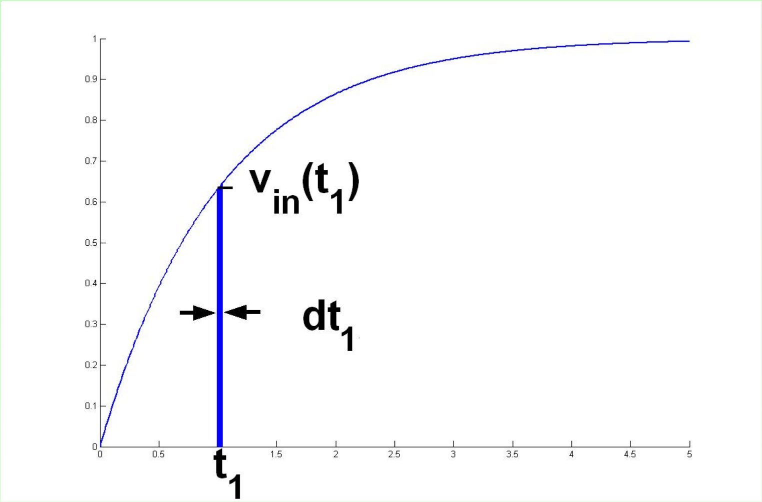


Моделирование

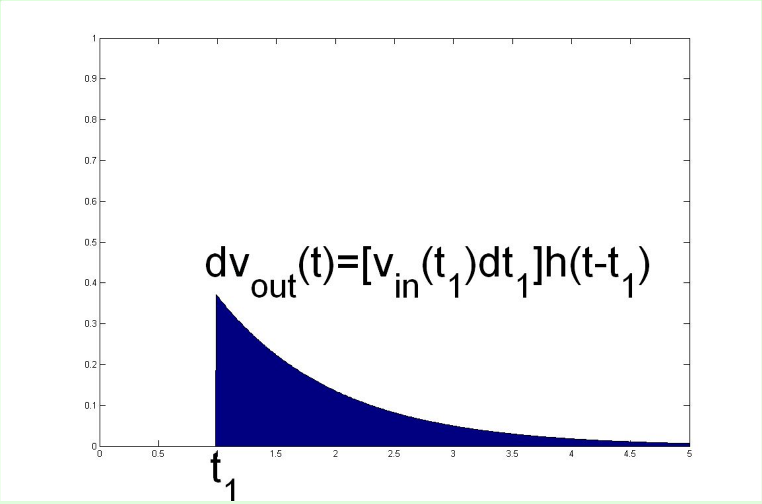
Реальное измерение

2.4 Интеграл суперпозиции

Разобьем входной сигнал на маленькие части. Найдем реакцию на каждую часть. Сложим реакции—получим выходной сигнал



Входной сигнал



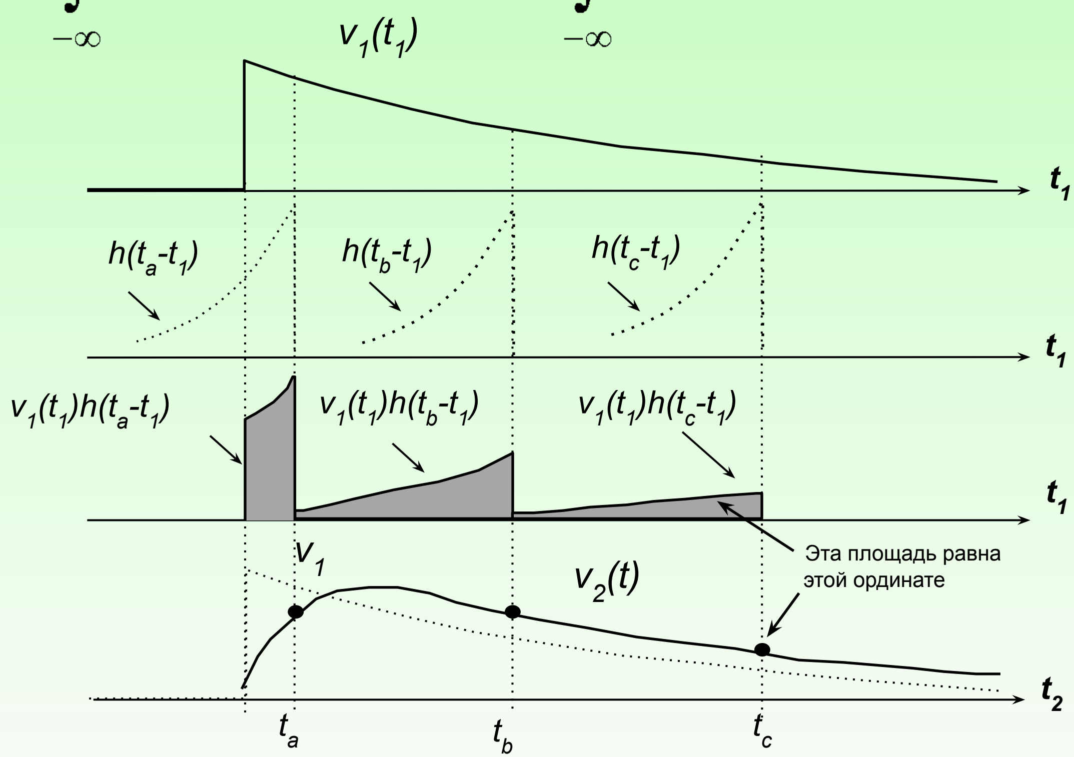
Реакция системы на отдельную часть

$$v_{\text{out}}(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} v_{\text{in}}(t_1) h(t_2 - t_1) dt_1 - \textit{интеграл суперпозиции}$$

Меняя пределы интегрирования можно получить другую формы записи:

$$v_{\text{out}}(t) = \int_{0}^{+\infty} h(\tau)v_{\text{in}}(t-\tau)d\tau,$$ если ввести время памяти системы $\tau = t_2 - t_1$

$$v_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{t} v_{\text{in}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\text{in}}(\tau)h(t-\tau)d\tau = v_{\text{in}}(t) \otimes h(t)$$



$$f_1(t) \rightarrow \boxed{h_{12}} \rightarrow f_2(t) \rightarrow \boxed{h_{23}} \rightarrow f_3(t)$$

$$f_2(t) = f_1(t) \otimes h_{12}(t); \qquad f_3(t) = f_2(t) \otimes h_{23}(t)$$

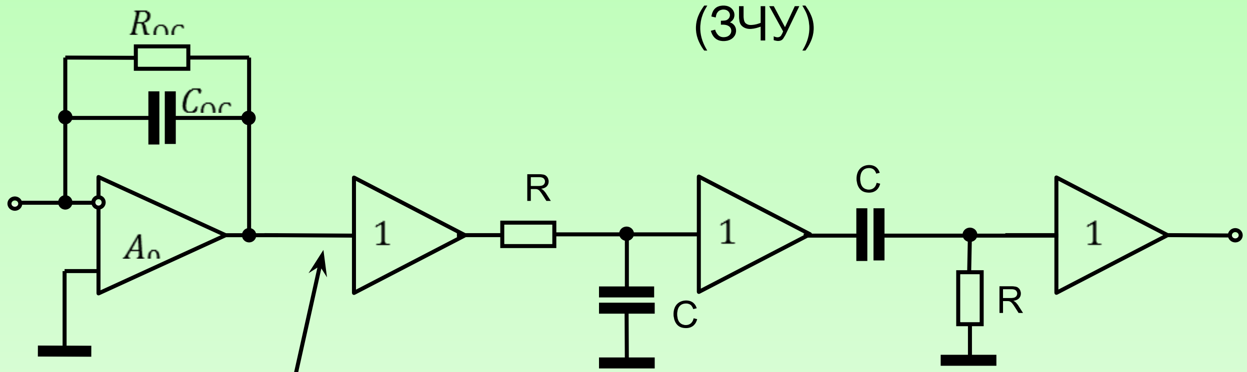
$$f_3(t) = \big(f_1(t) \otimes h_{12}(t)\big) \otimes h_{23}(t) = f_1(t) \otimes \big(h_{12}(t) \otimes h_{23}(t)\big) = f_1(t) \otimes h_{13}(t)$$

$$h_{13}(t) = h_{12}(t) \otimes h_{23}(t)$$

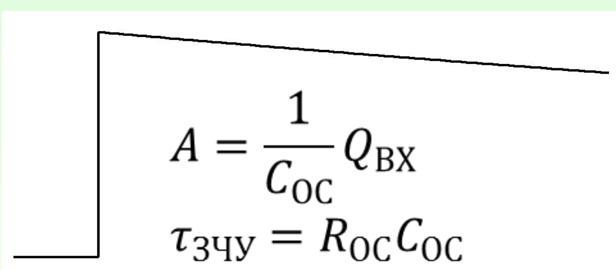
$$f_1(t) \rightarrow \boxed{h_{13}} \rightarrow f_3(t)$$

RC-CR фильтр

Задача: рассчитать реакцию фильтра RC-CR на сигнал с зарядо-чувствительного усилителя (ЗЧУ)



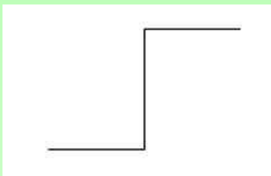
$\tau_{ЗЧУ} = R_{OC}C_{OC}$

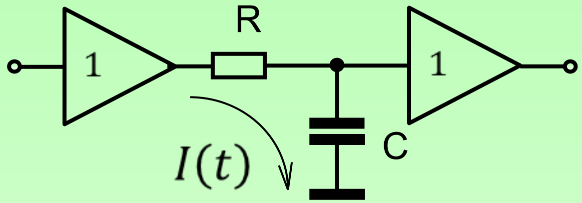


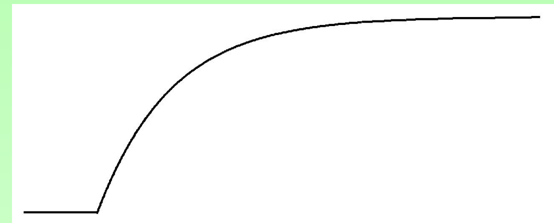
$\tau = RC \ll \tau_{ЗЧУ}$ - в первом приближении на входе RC-CR фильтра прямоугольный импульс напряжения

Реакция на такой сигнал – переходная функция линейной системы

RC-фильтр (интегратор)







$$V_{\text{ВХ}}(t) = 0, t < 0$$

$$I(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{ВЫХ}}(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{ВХ}}(t) = V_0 = 1\text{В}, t \geq 0$$

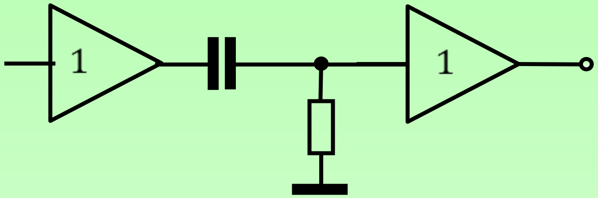
$$V_{\text{ВХ}}(t) = RI(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(t')dt'$$

$$0 = R\tfrac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t)$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{\mathrm{V}_0}{R}e^{-t/\tau}$$

$$V_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(t')dt' = \frac{V_0}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-t/\tau}dt' = V_C - V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

RC-фильтр (дифференциатор)



$$V_{\text{вх}}(t) = 0, t < 0$$

$$I(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{вых}}(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{вх}}(t) = V_0 = 1\text{В}, t \geq 0$$

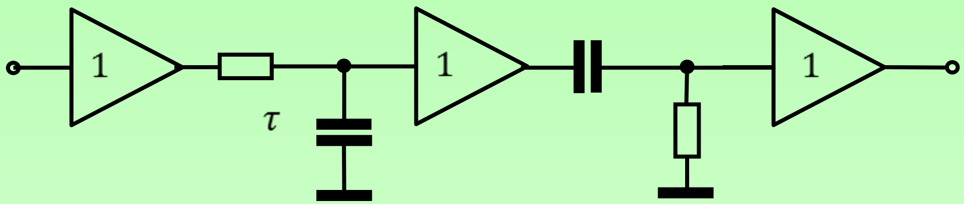
$$V_{\text{вх}}(t) = RI(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(t')dt'$$

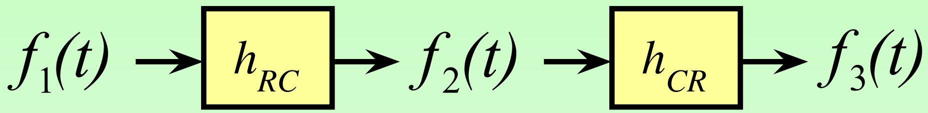
$$0 = R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t)$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{\mathrm{V}_0}{R}e^{-t/\tau}$$

$$V_{\text{вых}} = RI(t) = R\frac{\mathrm{V}_0}{R}e^{-t/\tau} = V_0 e^{-t/\tau}$$

RC-CR фильтр





$$F_{RC}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$
$$h_{RC}(t) = -\frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$F_{CR}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$
$$h_{CR}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$h_{RC-CR}(t) = h_{RC}(t) \otimes h_{RC}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(t') - \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt', \qquad t' \geq 0, t - t' \geq 0$$

$$h_{RC-CR}(t) = \int_0^t \left(\delta(t') - \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \left(\delta(t') e^{-\frac{t'}{\tau}} - \frac{1}{\tau}\right) dt' = \frac{\tau - t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}, t' \geq 0$$

$$F_{RC-CR}(t) = \int_{-\infty}^{t} h_{RC-CR}(t') dt' = \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

Устойчивость

Линейная система *устойчива*, если для любого входного сигнала, конечной энергии, энергия выходного сигнала тоже конечна

$$\left|v_{\text{out}}(t)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|v_{\text{in}}(\tau)h(t-\tau)\right|^2 d\tau \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|v_{\text{in}}(t)\right|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(\tau)\right|^2 d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|v_{\text{in}}(t)\right|^2 dt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(\tau)\right|^2 < +\infty \Rightarrow \left|v_{\text{out}}(t)\right|^2 < +\infty$$

Если импульсная характеристика линейной системы абсолютно интегрируема, то система устойчива

2.5. Интеграл суперпозиции как корреляционная операция

$m(t) = h(-t)$ – *Функция памяти*

$$v_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{t} v_{\text{in}}(\tau)m(\tau - t)d\tau = \psi_{1m}(t)$$

Линейная система является коррелятором прошлого входного сигнала и функции памяти системы

Резюме

- Линейная система. Свойства линейной системы
- Методы описания линейной системы
- Методы расчета линейных систем. Классический метод, интеграл Фурье, метод интеграла суперпозиции