


Передача сигналов через линейные системы

Лекции по курсу
«Электроника систем регистрации элементарных частиц»

Жуланов Владимир Викторович
тел. 329-47-32
e-mail: zhulanov@inp.nsk.su

2.1 Линейная передающая система

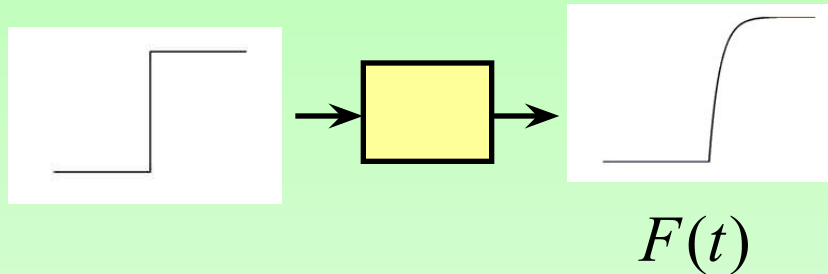
 — линейная передающая система



$$af_{\text{in}}(t) + bg_{\text{in}}(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow af_{\text{out}}(t) + bg_{\text{out}}(t)$$

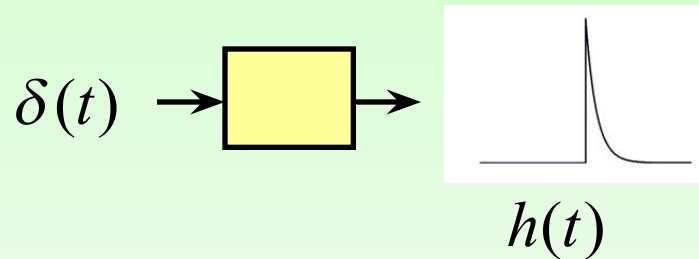
Тестовые сигналы

Скачек тока или
напряжения
(«ступенька»)



Переходная функция
системы

Единичный
импульс



Импульсная
характеристика
системы

Свойства линейных систем

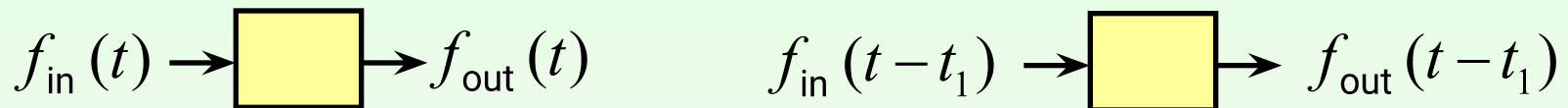
Физическая реализуемость. Если входное воздействие возникает в момент времени 0, то импульсная характеристика и переходная функции равны 0 при $t < 0$:

$$v_{in}(t) = 0, \text{ при } t < 0 \Rightarrow h(t) = 0, F(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

Устойчивость. Система со временем «забывает» о входном воздействии:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

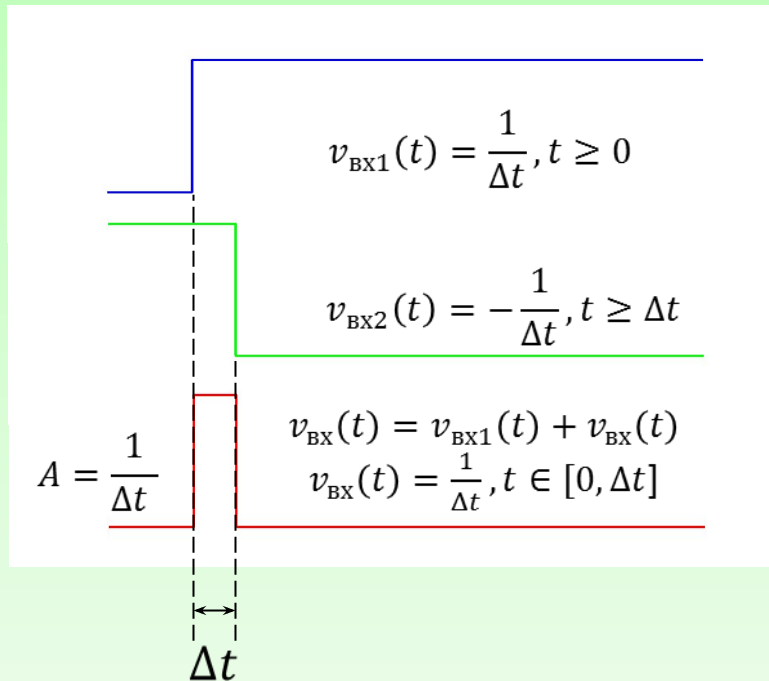
Свойство стационарных линейных систем:



Связь импульсной характеристики и переходной функции

Входной сигнал

Выходной сигнал



$$v_{\text{ВЫХ1}} = \frac{1}{\Delta t} F(t)$$

$$v_{\text{ВЫХ2}} = \frac{-1}{\Delta t} F(t - \Delta t)$$

$$v_{\text{ВЫХ}} = v_{\text{ВЫХ1}} + v_{\text{ВЫХ2}} = \frac{F(t) - F(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$v_{\text{ВЫХ}} \rightarrow \delta(t)$$

$$v_{\text{ВЫХ}} \rightarrow F'(t)$$

То есть $h(t) = F'(t)$

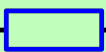
2.2 Классический метод расчета реакции линейной системы на входное воздействие

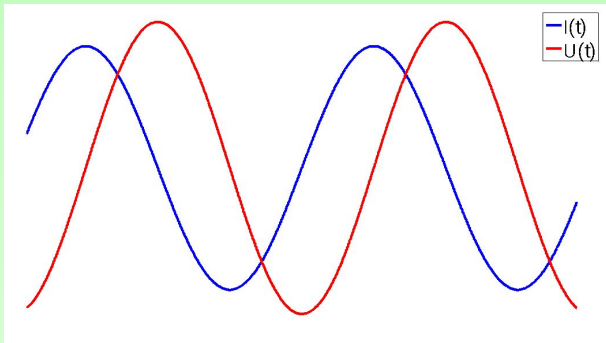
$$i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V(t)$$

$$R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

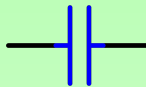
Ввиду своей сложности, метод непригоден для ручного расчета сложных схем

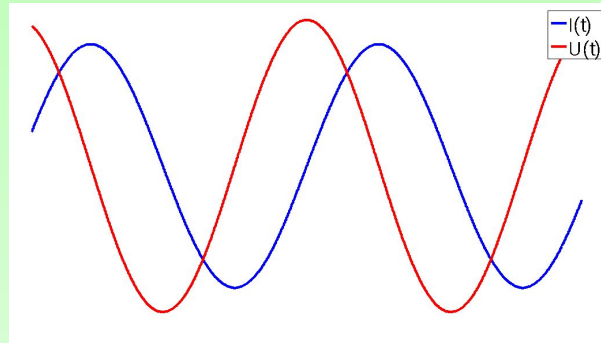
Метод интеграла Фурье

R 



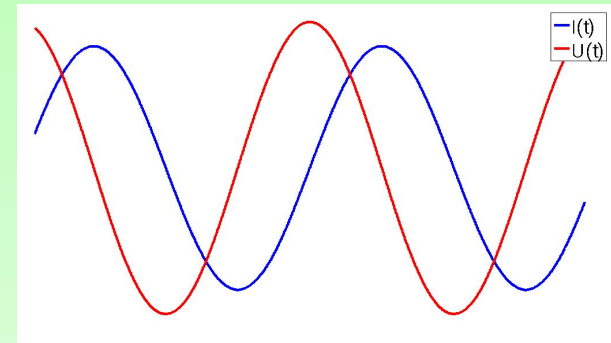
$$U(t) = I(t) * R$$

C 



$$I(t) = C \frac{d}{dt} U(t)$$

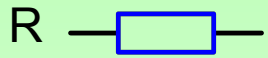
L 



$$U(t) = L \frac{d}{dt} I(t)$$

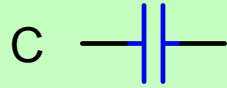
$$U(t) = U_0 \cos \omega t = U_0 \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] \Rightarrow \dot{U}$$
$$I(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] \Rightarrow \dot{I}$$

- представление тока и напряжения
в комплексном виде



$$U(t) = I(t) * R$$

$$\dot{U} = \dot{I} * R$$



$$I(t) = C \frac{d}{dt} U(t) = C \frac{d}{dt} U_0 e^{j\omega t + \varphi_0}$$

$$I(t) = C j\omega U_0 e^{j\omega t + \varphi_0} = j\omega C U(t)$$

$$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

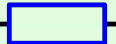


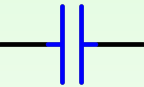
$$U(t) = L \frac{d}{dt} I(t) = L \frac{d}{dt} I_0 e^{j\omega t + \varphi_0}$$


$$U(t) = L j\omega I_0 e^{j\omega t + \varphi_0} = j\omega L I(t)$$

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$

Закон Ома в комплексном виде

 $\dot{X} = R$

 $\dot{X} = \frac{1}{j\omega C}$

 $\dot{X} = j\omega L$

$$\dot{U} = \dot{X} \dot{I}$$

\dot{X} - импеданс

Решение уравнения электрической цепи в комплексном виде

$$I(t)R + L \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = U(t) \Rightarrow$$

$$\dot{U} = iR + i\dot{X}_L + i\dot{X}_C = i(R + \dot{X}_L + \dot{X}_C)$$

$$i = \frac{1}{R + \dot{X}_L + \dot{X}_C} \dot{U}$$

$$I(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{R + \dot{X}_L + \dot{X}_C} U_0 e^{j\omega t + \varphi_0} \right] \quad - \text{решение для } I(t) \text{ на одной гармонике (частоте)}$$

Для произвольного сигнала $U(t)$ требуется преобразование Фурье – разложение сигнала на гармоники

Для восстановления $I(t)$ из набора его гармоник (спектра) требуется обратное преобразование Фурье

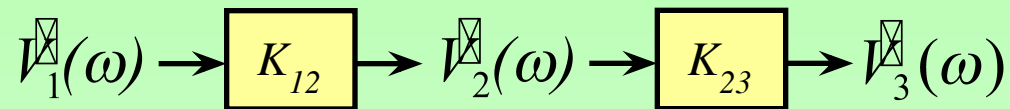


$$F_{\text{in}}(\omega) \rightarrow \text{[Block]} \rightarrow F_{\text{out}}(\omega) = K(\omega)F_{\text{in}}(\omega)$$

$K(\omega)$ – комплексный коэффициент преобразования линейной системы

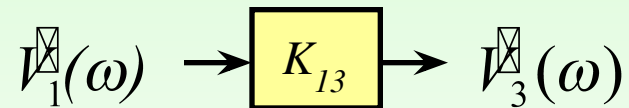
$$F_{\text{in}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{in}}(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega)F_{\text{in}}(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

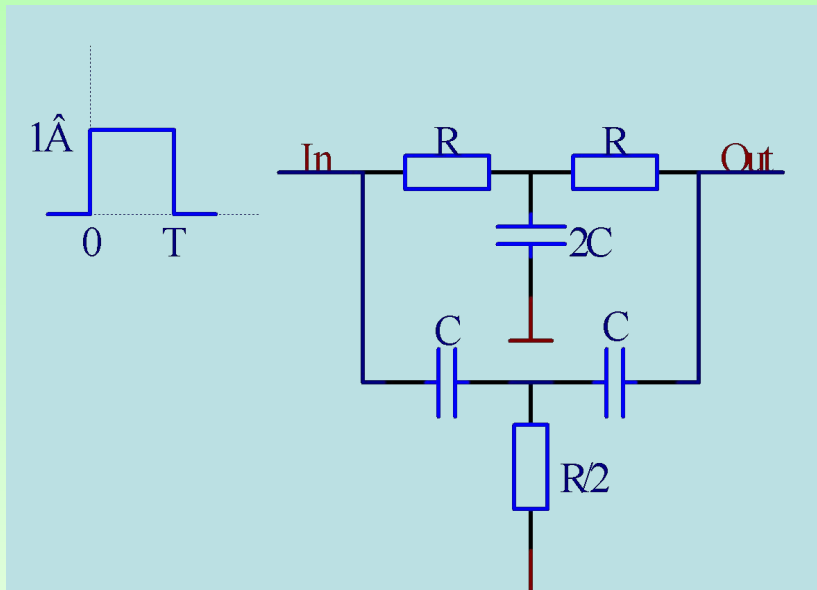


$$\begin{aligned}
 V_3(\omega) &= V_2(\omega) K_{23}(\omega) = (V_1(\omega) K_{12}(\omega)) K_{23}(\omega) = \\
 &= V_1(\omega) (K_{12}(\omega) K_{23}(\omega)) = V_1(\omega) K_{13}(\omega)
 \end{aligned}$$

$$K_{13}(\omega) = K_{12}(\omega) K_{23}(\omega)$$



Пример расчета фильтра методом Фурье

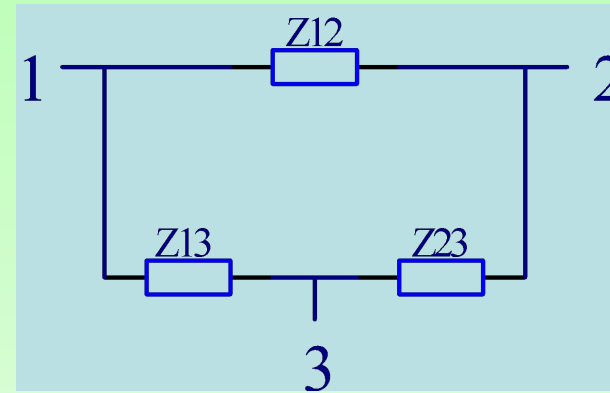
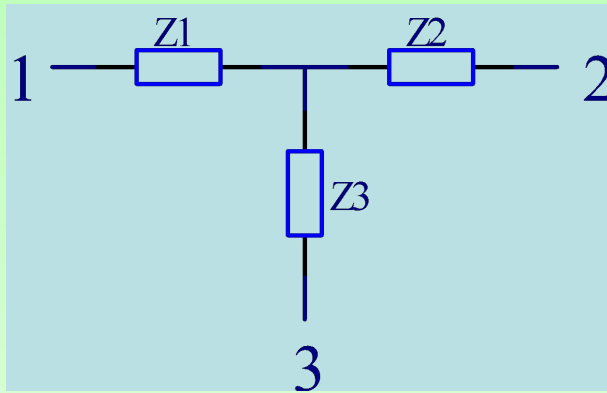


Двойной Т-фильтр

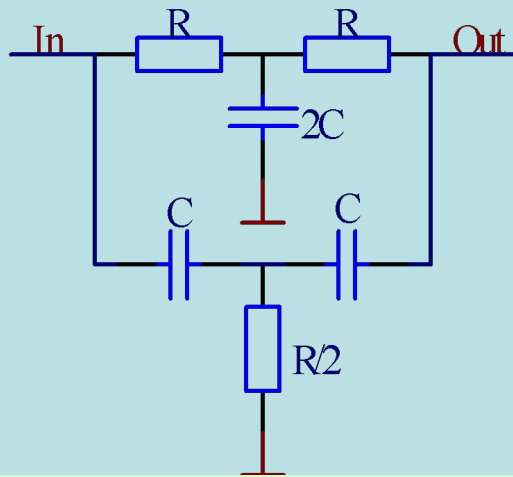
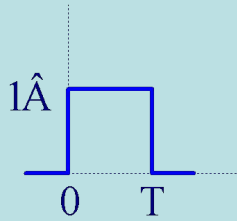
$$v_{in}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \in (0, T) \\ 0, & t > T \end{cases}$$
$$\dot{V}_{in}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

$$\dot{V}_{in}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{in}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j\omega t} dt$$

Преобразование «треугольник—звезда»



$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}; Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}; Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}$$
$$Z_{12} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}; Z_{13} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}; Z_{23} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$$



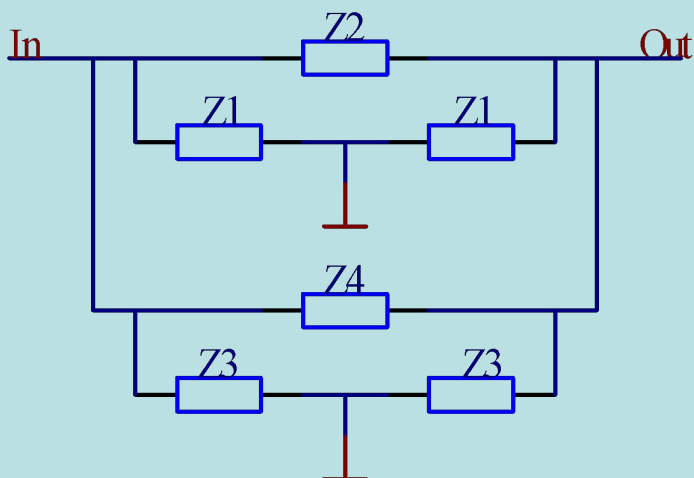
$$X = \frac{1}{j\omega C} \text{ — импеданс емкости}$$

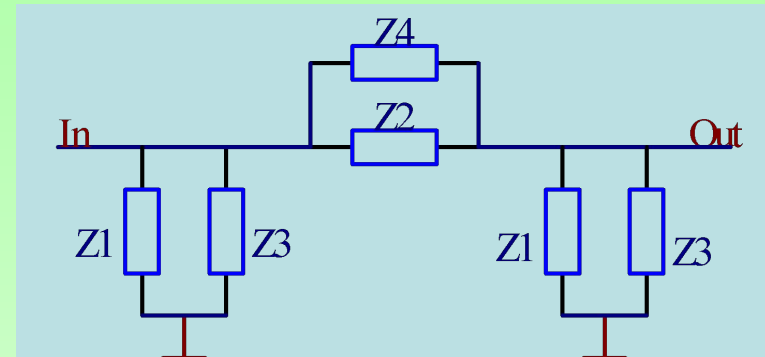
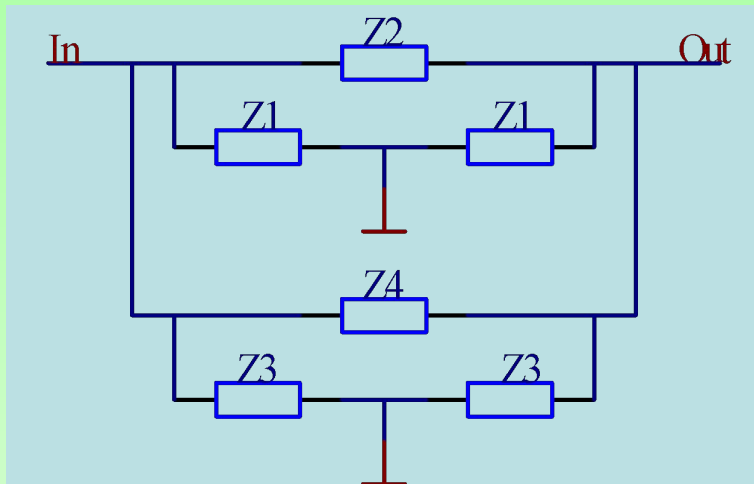
$$Z_1 = \frac{RX/2 + RX/2 + R^2}{R} = R + X$$

$$Z_2 = \frac{RX/2 + RX/2 + R^2}{X/2} = 2 \frac{R}{X} (R + X)$$

$$Z_3 = \frac{XR/2 + XR/2 + X^2}{X} = R + X$$

$$Z_4 = \frac{XR/2 + XR/2 + X^2}{R/2} = 2 \frac{X}{R} (R + X)$$

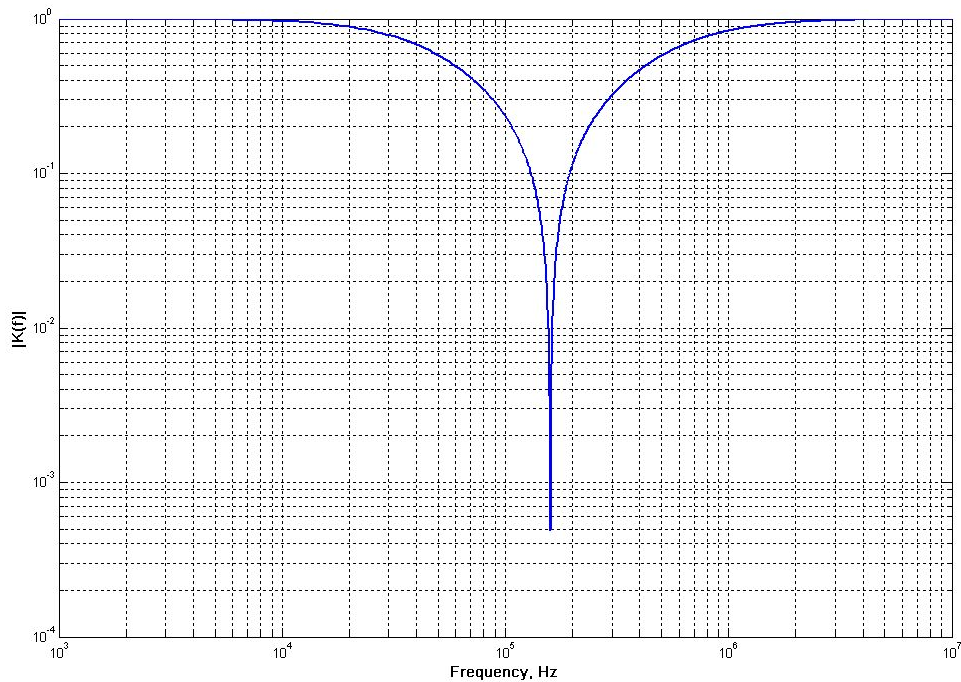




$$K(\omega) = \frac{\langle Z_1 | Z_3 \rangle}{\langle Z_1 | Z_3 \rangle + \langle Z_2 | Z_4 \rangle} = \frac{(R + X)/2}{(R + X)/2 + 2 \frac{\frac{R}{X} \frac{X}{R}}{\frac{R}{X} + \frac{X}{R}} (R + X)} = \frac{1}{1 + 4 \frac{RX}{R^2 + X^2}} = \frac{R^2 + X^2}{R^2 + 4RX + X^2}$$

$$K(\omega) = \frac{1 + (j\omega\tau)^2}{1 + 4j\omega\tau + (j\omega\tau)^2}, \text{ где } \tau = RC$$

Передаточная функция



$$V_{\text{out}}(\omega) = V_{\text{in}}(\omega)K(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \frac{1 + (j\omega\tau)^2}{1 + 4j\omega\tau + (j\omega\tau)^2}$$

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \frac{1 + (j\omega\tau)^2}{1 + 4j\omega\tau + (j\omega\tau)^2} e^{j\omega t} d\omega = v_{\text{in}}(t) - \frac{2\tau}{\pi} (I_1 - I_2)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1 + 4j\omega\tau + (j\omega\tau)^2} d\omega; I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(t-T)}}{1 + 4j\omega\tau + (j\omega\tau)^2} d\omega$$

$\omega_1 = j\frac{2+\sqrt{3}}{\tau}, \omega_2 = j\frac{2-\sqrt{3}}{\tau}$ — два полюса подинтегральной функции

$$I_1(t) = \begin{cases} 2\pi j \left(\operatorname{res}_{\omega=\omega_1} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} + \operatorname{res}_{\omega=\omega_2} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} \right), & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

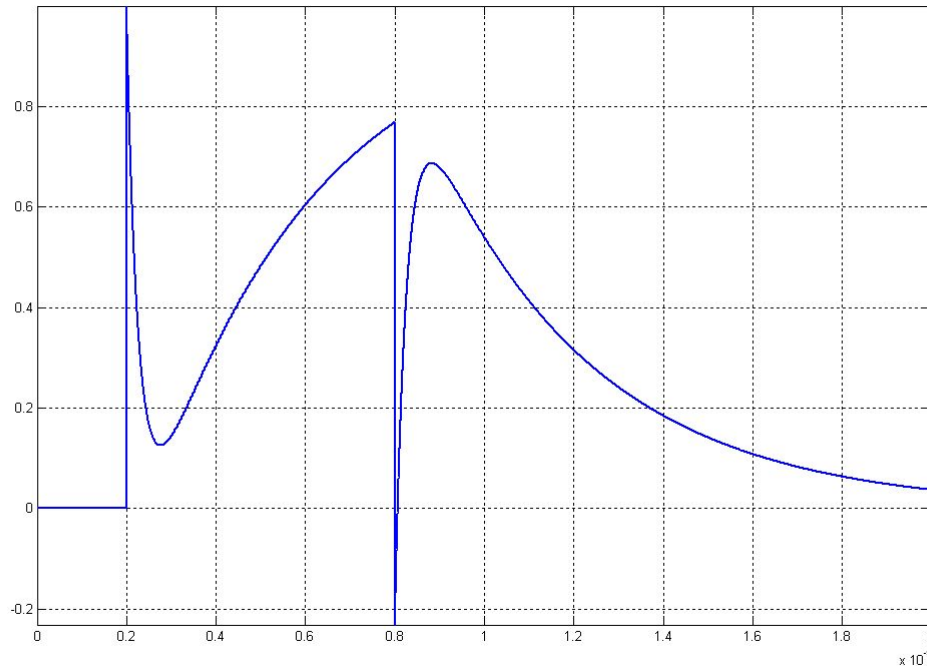
$$2\pi j \operatorname{res}_{\omega=\omega_1} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} = 2\pi j \frac{\omega-\omega_1}{(j\tau(\omega-\omega_1))(j\tau(\omega-\omega_2))} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-t(2+\sqrt{3})/\tau}$$

$$2\pi j \operatorname{res}_{\omega=\omega_2} \frac{e^{j\omega t}}{1+4j\omega t+(j\omega t)^2} = 2\pi j \frac{\omega-\omega_2}{(j\tau(\omega-\omega_1))(j\tau(\omega-\omega_2))} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-t(2-\sqrt{3})/\tau}$$

$$I_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}\tau} (e^{-t(2-\sqrt{3})/\tau} - e^{-t(2+\sqrt{3})/\tau}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

$$I_2(t) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}\tau} e^{-2(t-T)/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}(t-T)/\tau), & \text{если } t > T \\ 0, & \text{если } t < T \end{cases}$$

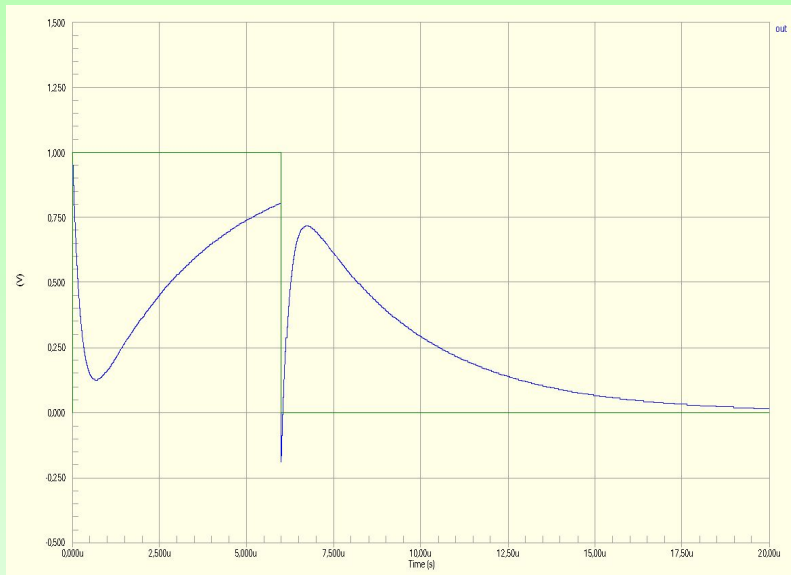
$$v_{\text{out}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t \in (0, T) \\ \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2(t-T)/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}(t-T)/\tau) - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-2t/\tau} \operatorname{sh}(\sqrt{3}t/\tau), & \text{если } t > T \end{cases}$$



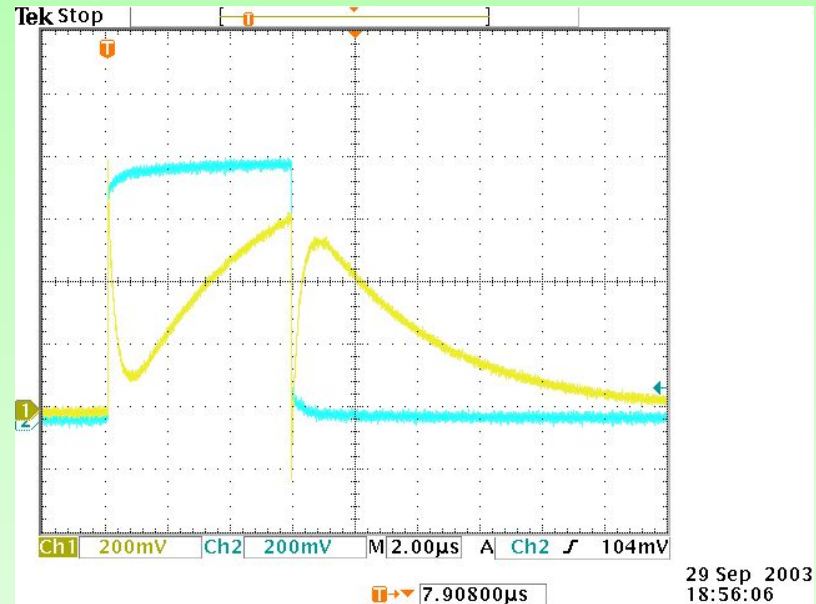
Результат вычислений для:

$R=300 \text{ Ом}$, $C=3.3 \text{ нФ}$, $\tau=1 \text{ мкс}$, $T=6 \text{ мкс}$

Моделирование, реальное измерение



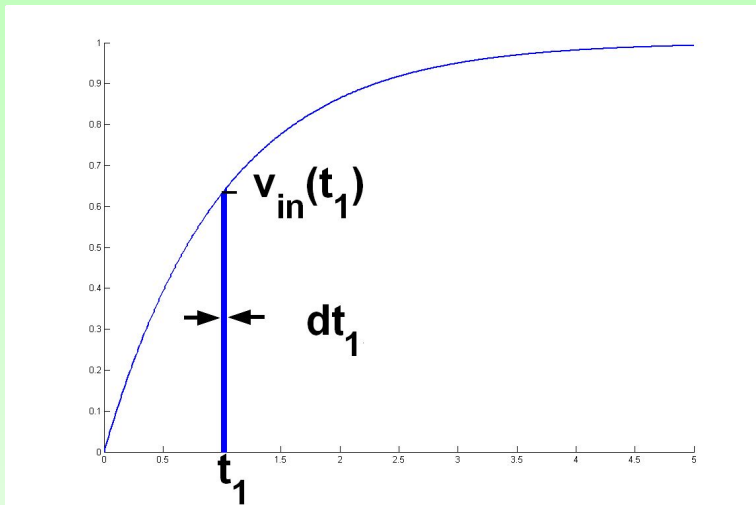
Моделирование



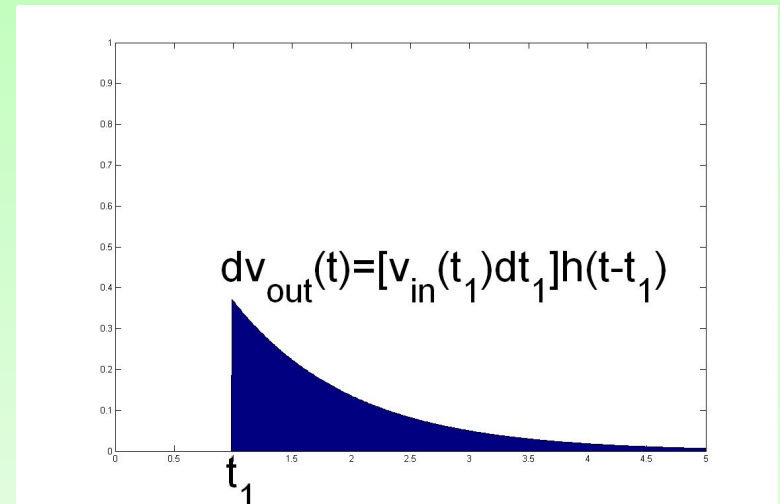
Реальное измерение

2.4 Интеграл суперпозиции

Разобьем входной сигнал на маленькие части. Найдем реакцию на каждую часть. Сложим реакции—получим выходной сигнал



Входной сигнал



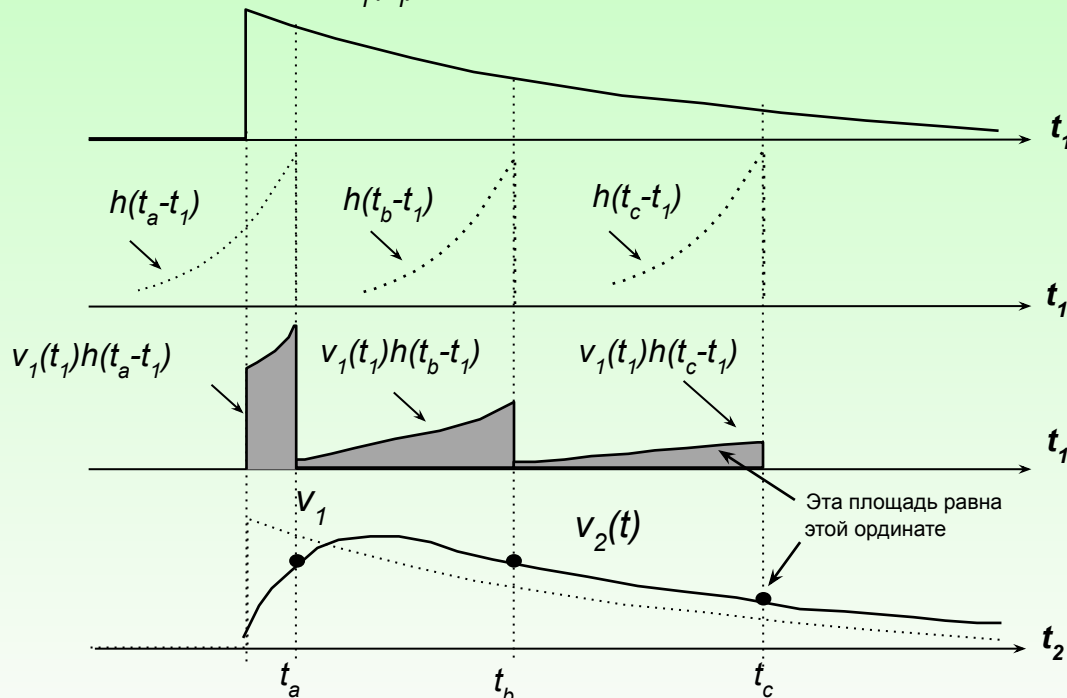
Реакция системы на отдельную часть

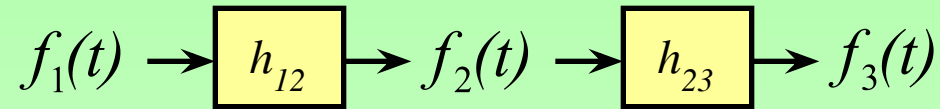
$$v_{\text{out}}(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} v_{\text{in}}(t_1)h(t_2 - t_1)dt_1 - \text{интеграл суперпозиции}$$

Меняя пределы интегрирования можно получить другую формы записи:

$$v_{\text{out}}(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau) v_{\text{in}}(t - \tau) d\tau, \text{ если ввести время памяти системы } \tau = t_2 - t_1$$

$$v_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^t v_{\text{in}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\text{in}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = v_{\text{in}}(t) \otimes h(t)$$

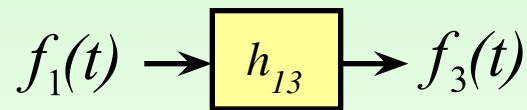




$$f_2(t) = f_1(t) \otimes h_{12}(t); \quad f_3(t) = f_2(t) \otimes h_{23}(t)$$

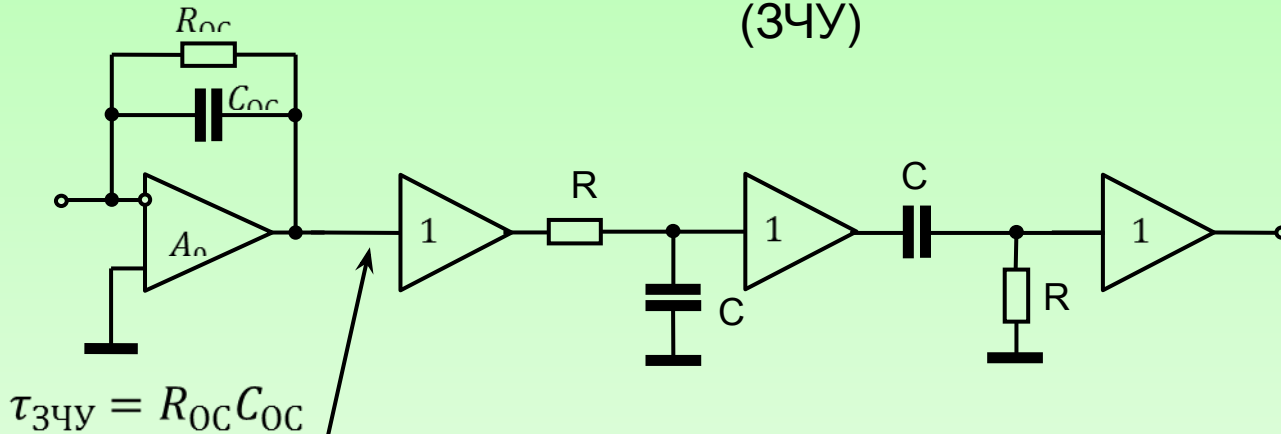
$$f_3(t) = (f_1(t) \otimes h_{12}(t)) \otimes h_{23}(t) = f_1(t) \otimes (h_{12}(t) \otimes h_{23}(t)) = f_1(t) \otimes h_{13}(t)$$

$$h_{13}(t) = h_{12}(t) \otimes h_{23}(t)$$



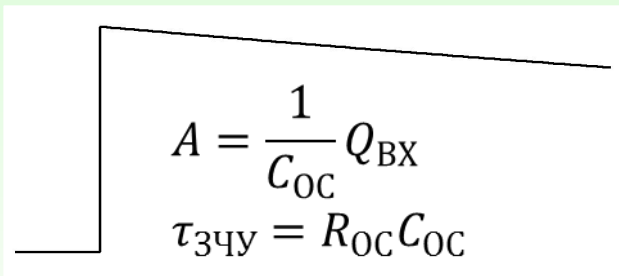
RC-CR фильтр

Задача: рассчитать реакцию фильтра RC-CR на сигнал с зарядо-чувствительного усилителя (ЗЧУ)

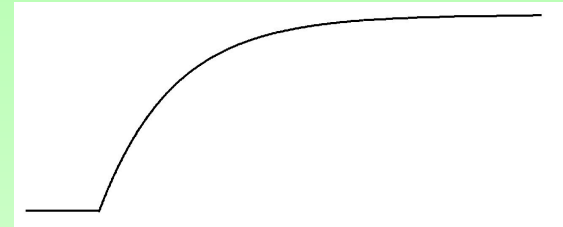
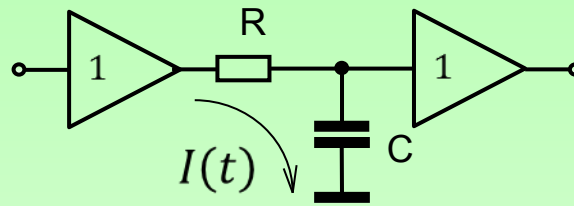
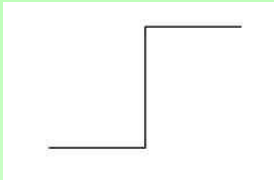


$\tau = RC \ll \tau_{\text{ЗЧУ}}$ - в первом приближении на входе RC-CR фильтра прямоугольный импульс напряжения

Реакция на такой сигнал – переходная функция линейной системы



RC-фильтр (интегратор)



$$V_{\text{BX}}(t) = 0, t < 0$$

$$I(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{ВЫХ}}(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{BX}}(t) = V_0 = 1\text{B}, t \geq 0$$

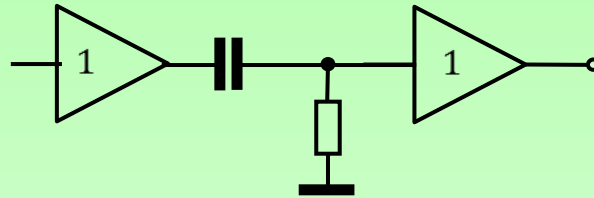
$$V_{\text{BX}}(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt'$$

$$0 = R \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{C} I(t)$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$V_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' = \frac{V_0}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-t'/\tau} dt' = V_C - V_0 e^{-t/\tau} = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

RC-фильтр (дифференциатор)



$$V_{\text{ВХ}}(t) = 0, t < 0$$

$$I(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{ВЫХ}}(t) = 0, t < 0$$

$$V_{\text{ВХ}}(t) = V_0 = 1\text{В}, t \geq 0$$

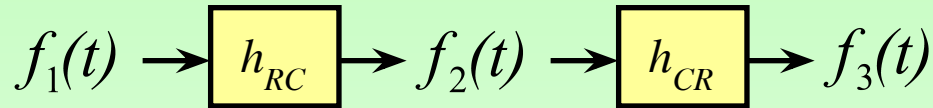
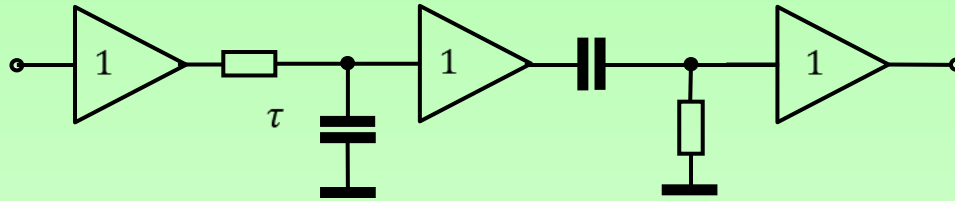
$$V_{\text{ВХ}}(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt'$$

$$0 = R \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{C} I(t)$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$V_{\text{ВЫХ}} = RI(t) = R \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} = V_0 e^{-t/\tau}$$

RC-CR фильтр



$$F_{RC}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$h_{RC}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$F_{CR}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$h_{CR}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$h_{RC-CR}(t) = h_{RC}(t) \otimes h_{RC}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(t') - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt', \quad t' \geq 0, t - t' \geq 0$$

$$h_{RC-CR}(t) = \int_0^t \left(\delta(t') - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t \left(\delta(t') e^{-\frac{t'}{\tau}} - \frac{1}{\tau} \right) dt' = \frac{\tau - t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}, t' \geq 0$$

$$F_{RC-CR}(t) = \int_{-\infty}^t h_{RC-CR}(t') dt' = \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

Устойчивость

Линейная система *устойчива*, если для любого входного сигнала, конечной энергии, энергия выходного сигнала тоже конечна

$$|v_{\text{out}}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_{\text{in}}(\tau)h(t-\tau)|^2 d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |v_{\text{in}}(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v_{\text{in}}(t)|^2 dt < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau < +\infty \Rightarrow |v_{\text{out}}(t)|^2 < +\infty$$

Если импульсная характеристика линейной системы абсолютно интегрируема, то система устойчива

2.5. Интеграл суперпозиции как корреляционная операция

$m(t) = h(-t)$ — Функция памяти

$$v_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^t v_{\text{in}}(\tau) m(\tau - t) d\tau = \psi_{1m}(t)$$

Линейная система является коррелятором прошлого входного сигнала и функции памяти системы

Резюме

- Линейная система. Свойства линейной системы
- Методы описания линейной системы
- Методы расчета линейных систем. Классический метод, интеграл Фурье, метод интеграла суперпозиции