Тема 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ АВИАЦИОННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

6.2 Байесовские процедуры принятия решений о состоянии объектов авиационного оборудования

В общем случае ошибочные решения могут привести к различным последствиям (потерям). Например, замена исправного блока как неисправного приведет к задержке вылета самолета, а выпуск в полет самолета с неисправным блоком может привести к невыполнению полетного задания. Кроме того, потери могут быть приписаны и правильным решениям.

В этом случае для принятия решения о состоянии объекта используется критерий байесовского риска, а соответствующие правила выбора решения называются байесовскими правилами.

При проверке гипотезы о состоянии объекта контроля возможны четыре ситуации и следующие, связанные с ними, потери:

C_{00} – потери при принятии гипотезы ϑ_0, когда на самом деле справедлива гипотеза ϑ_0;

C_{01} – потери при принятии гипотезы ϑ_0, когда на самом деле справедлива гипотеза ϑ_1;

C_{10} – потери при принятии гипотезы ϑ_1, когда на самом деле справедлива гипотеза ϑ_0;

C_{11} – потери при принятии гипотезы ϑ_1, когда на самом деле справедлива гипотеза ϑ_1.

Определим байесовский риск B как среднее значение потерь в указанных четырех ситуациях. Тогда можно записать

$$B = C_{00}P(\vartheta_0,\vartheta_0) + C_{01}P(\vartheta_0,\vartheta_1) + C_{10}P(\vartheta_1,\vartheta_0) + C_{11}P(\vartheta_1,\vartheta_1), \qquad (15.6)$$

где $P(\vartheta_0,\vartheta_0)$ – совместная вероятность принятия гипотезы ϑ_0 и справедливости гипотезы ϑ_0;

$P(\vartheta_0,\vartheta_1)$ – совместная вероятность принятия гипотезы ϑ_0 и справедливости гипотезы ϑ_1;

$P(\vartheta_1,\vartheta_0)$ – совместная вероятность принятия гипотезы ϑ_1 и справедливости гипотезы ϑ_0;

$P(\vartheta_1,\vartheta_1)$ – совместная вероятность принятия гипотезы ϑ_1 и справедливости гипотезы ϑ_1.

Воспользуемся правилом Байеса для умножения вероятностей

$$P(A,B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A), \qquad (15.7)$$

где $P(A,B)$ – вероятность совместного появления событий A и B;

$P(A/B)$ – вероятность появления события A при условии появления события B;

$P(B)$ – вероятность появления события B.

В этом случае выражение для риска B можно переписать следующим образом:

$$B = C_{00}P(\vartheta_0/\vartheta_0)P(\vartheta_0) + C_{01}P(\vartheta_0/\vartheta_1)P(\vartheta_1) +$$
$$+ C_{10}P(\vartheta_1/\vartheta_0)P(\vartheta_0) + C_{11}P(\vartheta_1/\vartheta_1)P(\vartheta_1),$$

где $P(\vartheta_0/\vartheta_0)$ – условная вероятность принятия гипотезы ϑ_0, когда справедлива гипотеза ϑ_0;

$P(\vartheta_0/\vartheta_1)$ – условная вероятность принятия гипотезы ϑ_0, когда справедлива гипотеза ϑ_1;

$P(\vartheta_1/\vartheta_0)$ – условная вероятность принятия гипотезы ϑ_1, когда справедлива гипотеза ϑ_0;

$P(\vartheta_1/\vartheta_1)$ – условная вероятность принятия гипотезы ϑ_1, когда справедлива гипотеза ϑ_1;

$P(\vartheta_0)$ – вероятность справедливости гипотезы ϑ_0;

$P(\vartheta_1)$ – вероятность справедливости гипотезы ϑ_1.

Правило выбора решения представляет собой сравнение результата наблюдения с пороговым значением, т.е. принимается гипотеза ϑ_1, если полученное наблюдение больше порога $z_{\text{п}}$, и принимается гипотеза ϑ_0, если полученное наблюдение меньше порога $z_{\text{п}}$. Поэтому для риска B можно записать следующее выражение (см. рисунок 15.1):

$$B = C_{00}P(\vartheta_0)\int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_0)dz + C_{01}P(\vartheta_1)\int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_1)dz +$$

$$+ C_{10}P(\vartheta_0)\int_{z_{\text{п}}}^{\infty} f(z/\vartheta_0)dz + C_{11}P(\vartheta_1)\int_{z_{\text{п}}}^{\infty} f(z/\vartheta_1)dz =$$

$$= C_{00}P(\vartheta_0)\int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_0)dz + C_{01}P(\vartheta_1)\int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_1)dz +$$

$$+ C_{10}P(\vartheta_0)[1 - \int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_0)dz] + C_{11}P(\vartheta_1)[1 - \int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} f(z/\vartheta_1)dz].$$

Группируя слагаемые полученного выражения, можно записать

$$B = C_{10}P(\vartheta_0) + C_{11}P(\vartheta_1) + (C_{00} - C_{10})P(\vartheta_0)\int_{-\infty}^{z_п} f(z/\vartheta_0)dz +$$

$$+ (C_{01} - C_{11})P(\vartheta_1)\int_{-\infty}^{z_п} f(z/\vartheta_1)dz. \qquad (15.8)$$

Значение порога $z_п$ необходимо выбрать так, чтобы минимизировать значение байесовского риска (15.8). Естественно, можно предположить, что потери при неправильных решениях будут больше, чем потери при правильных решениях (часто потери при правильных решениях принимают равными нулю), т.е. $C_{00} < C_{10}$ и $C_{11} < C_{01}$. Будем считать также, что потери при любых решениях неотрицательны.

В выражении для байесовского риска B (15.8) от порога $z_п$ зависит только значение интеграла. Дифференцируя риск B по z и приравнивая производную нулю, найдем такое значение $z_п$, при котором обеспечивается минимум потерь при принятии решения о состоянии ОК.

$$\left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_{z=z_{\text{п}}}=0\,.$$

Подставляя значение байесовского риска B из выражения (15.8), получим равенство

$$(C_{00}-C_{10})P(\vartheta_0)f(z_{\text{п}}/\vartheta_0)+(C_{01}-C_{11})P(\vartheta_1)f(z_{\text{п}}/\vartheta_1)=0\,.$$

Отсюда можно записать

$$\frac{f(z_{\text{п}}/\vartheta_1)}{f(z_{\text{п}}/\vartheta_0)}=\frac{(C_{10}-C_{00})P(\vartheta_0)}{(C_{01}-C_{11})P(\vartheta_1)}\,. \qquad (15.9)$$

Если левая часть равенства (15.9) – это значение отношения правдоподобия L (смотри выражение (15.5)) в точке $z=z_{\text{п}}$, то правую часть равенства (15.9) можно рассматривать как порог П для отношения правдоподобия L.

$$\Pi=\frac{(C_{10}-C_{00})P(\vartheta_0)}{(C_{01}-C_{11})P(\vartheta_1)}\,. \qquad (15.10)$$

Тогда правило принятия решения о состоянии ОК будет следующим. Если $L>\Pi$, принимается гипотеза ϑ_1 – ОК неисправен, если $L\le\Pi$, принимается гипотеза ϑ_0 – ОК исправен.

Часто при вычислениях используются значения натуральных логарифмов для отношения правдоподобия $\ln L$ и порога $\ln \Pi$. Это особенно удобно в том случае, когда обе рассматриваемые плотности вероятности являются нормальными.

В последующем анализе предполагается, что имеется вся информация, необходимая для вычисления порога П, т.е. известны потери C_{00}, C_{01}, C_{10}, C_{11} и априорные вероятности гипотез ϑ_0 и ϑ_1. В действительности значения потерь и априорных вероятностей обычно неизвестны и должны быть определены из каких-либо дополнительных соображений или на основе результатов дополнительной обработки реальных наблюдений. Значение отношения правдоподобия L определяется по экспериментальным данным.

Кроме того, на практике однократное наблюдение часто не позволяет обеспечить нужное для практических целей достаточно малое значение минимума байесовского риска. Это приводит к необходимости многократного проведения наблюдений.