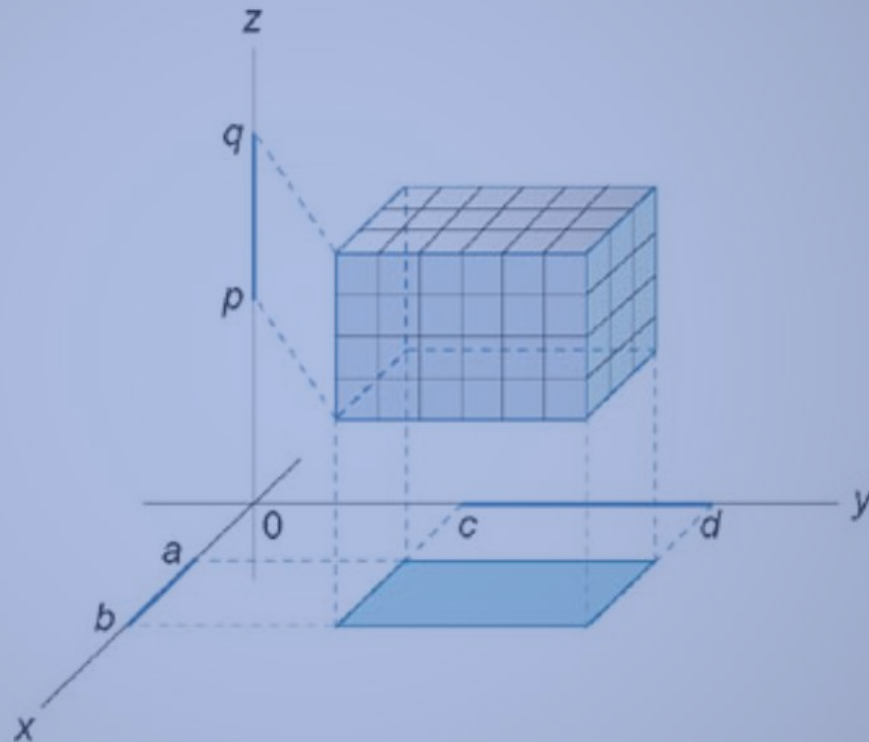


## Определение и свойства тройных интегралов

### Определение тройного интеграла

Формально определение тройного интеграла можно ввести аналогично двойному интегралу как предел суммы Римана. Начнем с простейшего случая, когда область интегрирования  $U$  имеет вид параллелепипеда  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  (рисунок 1).

Рис.1



Пусть множество чисел  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  разбивает отрезок  $[a, b]$  на малые интервалы, так что справедливо соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично построим разбиение отрезка  $[c, d]$  вдоль оси  $Oy$  и  $[p, q]$  вдоль оси  $Oz$  :

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$p = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{\ell-1} < z_{\ell} = q.$$

Сумма Римана функции  $f(x, y, z)$  над разбиением  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Здесь  $(u_i, v_j, w_k)$  – некоторая точка в параллелепипеде  $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$ , а приращения равны

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Тройной интеграл от функции  $f(x, y, z)$  в параллелепипеде  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  определяется как предел суммы Римана, при котором максимальное значение приращений  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  и  $\Delta z_k$  стремятся к нулю:

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Чтобы определить тройной интеграл в произвольной области  $U$ , выберем параллелепипед  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ , включающий заданную область  $U$ . Введем функцию  $g(x, y, z)$ , такую, что

$$\begin{cases} g(x, y, z) = f(x, y, z), & \text{если } f(x, y, z) \in U \\ g(x, y, z) = 0, & \text{если } f(x, y, z) \notin U \end{cases}.$$

Тогда тройной интеграл от функции  $f(x, y, z)$  в произвольной области  $U$  определяется в виде:

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} g(x, y, z) dV.$$

### Основные свойства тройного интеграла

Пусть функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы в области  $U$ .

Тогда справедливы следующие свойства:

$$1. \iiint_U [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_U f(x, y, z) dV + \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

$$2. \iiint_U [f(x, y, z) - g(x, y, z)] dV = \iiint_U f(x, y, z) dV - \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

$$3. \iiint_U kf(x, y, z) dV = k \iiint_U f(x, y, z) dV, \text{ где } k - \text{ константа};$$

$$4. \text{ Если } f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \text{ в любой точке области } U, \text{ то } \iiint_U f(x, y, z) dV \leq \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

5. Если область  $U$  является объединением двух непересекающихся областей  $U_1$  и  $U_2$ , то

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_{U_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{U_2} f(x, y, z) dV;$$

6. Пусть  $m$  - наименьшее и  $M$  - наибольшее значение непрерывной функции  $f(x, y, z)$  в области  $U$ . Тогда для тройного интеграла справедлива оценка:

$$m \cdot V \leq \iiint_U f(x, y, z) dV \leq M \cdot V,$$

где  $V$  - объем области интегрирования  $U$ .

7. *Теорема о среднем значении тройного интеграла.*

Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в области  $U$ , то существует точка  $M_0 \in U$ , такая, что

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = f(M_0) \cdot V,$$

где  $V$  - объем области  $U$ .

### Пример 1

Оценить максимальное значение тройного интеграла

$$I = \iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{100 - x^2 - y^2 - z^2}},$$

где  $U$  представляет собой шар с центром в начале координат и радиусом  $R = 6$ .

*Решение.*

Уравнение шара имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ .

Используя свойство 6, можно записать  $I \leq M \cdot V$ ,

где объем шара  $V$  равен

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 288\pi.$$

Максимальное значение  $M$  подынтегральной функции равно

$$M = \frac{1}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{1}{8}.$$

Отсюда получаем верхнюю оценку тройного интеграла:

$$I \leq \frac{1}{8} \cdot 288\pi = 36\pi.$$

## Пример 2

Оценить максимальное и минимальное значение тройного интеграла

$$\iiint_U \frac{dV}{\ln(e + x + y + z)},$$

где область  $U$  является параллелепипедом:

$$U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

*Решение.*

Сначала вычислим объем области интегрирования  $U$  :  $V = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

Оценка интеграла выглядит как  $m \cdot V \leq I \leq M \cdot V$ .

Здесь минимальное значение  $m$  подынтегральной функции равно

$$m = \frac{1}{\ln(e + 1 + 2 + 3)} = \frac{1}{\ln(e + 6)}.$$

Соответственно, максимальное значение  $M$  составляет

$$M = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

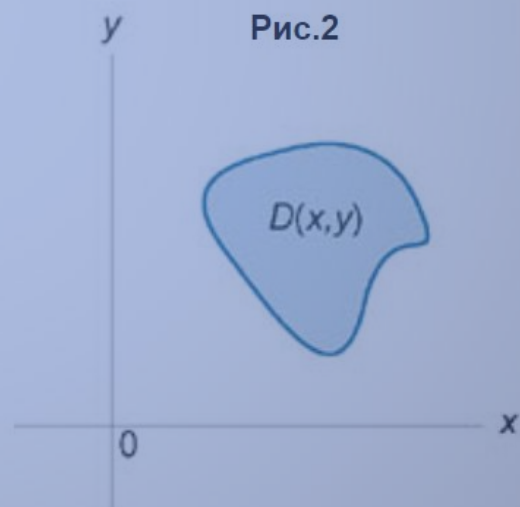
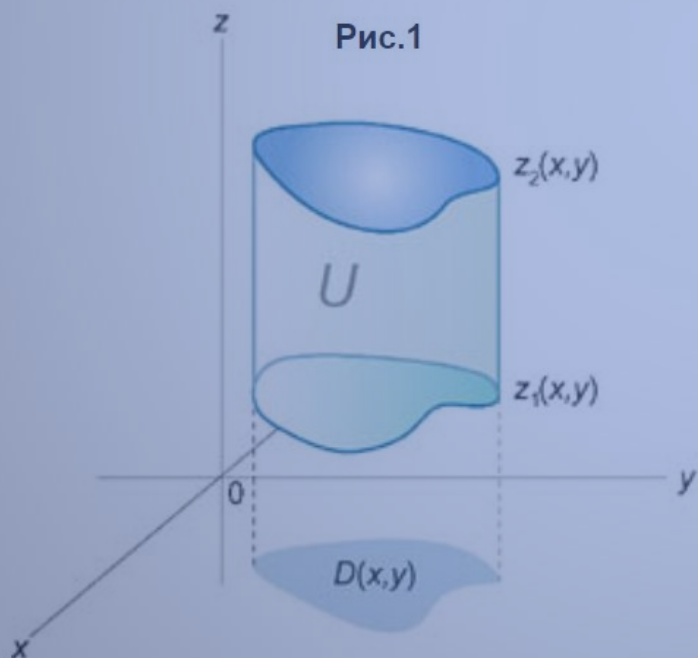
Таким образом, оценка интеграла имеет вид

$$\frac{6}{\ln(e + 6)} \leq I \leq 6.$$

## Тройные интегралы в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Рассмотрим случай, когда область интегрирования  $U$  является *элементарной относительно оси  $Oz$* , т.е. любая прямая, параллельная оси  $Oz$ , пересекает границу области  $U$  не более, чем в двух точках. Пусть область  $U$  ограничена снизу поверхностью  $z = z_1(x, y)$ , а сверху – поверхностью  $z = z_2(x, y)$  (рисунок 1). Проекцией тела  $U$  на плоскость  $Oxy$  является область  $D$  (рисунок 2). Будем предполагать, что функции  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  непрерывны в области  $D$ .





Тогда для любой непрерывной в области  $U$  функции  $f(x, y, z)$  можно записать соотношение

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iint_D \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла, в котором подынтегральной функцией является однократный интеграл. В рассмотренном случае сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной  $z$ , а затем – двойной интеграл в области  $D$  по переменным  $x$  и  $y$ .

Если область  $D(x, y)$  является областью типа  $I$ , т.е. ограничена линиями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

где  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  – непрерывные функции в интервале  $[a, b]$  и  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то, записывая двойной интеграл в виде повторного, получаем

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (1)$$

В другом случае, когда область  $D(x, y)$  относится к типу  $II$  (является элементарной относительно оси  $Ox$ ) и ограничена линиями

$$y = c, \quad y = d, \quad x = \varphi_1(y), \quad x = \varphi_2(y),$$

где  $\varphi_1(y)$ ,  $\varphi_2(y)$ , – непрерывные на отрезке  $[c, d]$  функции, причем  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ , тройной интеграл представляется в виде

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называются *формулами сведения тройного интеграла к повторному*.

В частном случае, когда область интегрирования  $U$  представляет собой прямоугольный параллелепипед  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ , тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

Если исходная область интегрирования  $U$ , более сложная, чем рассмотренная выше, то ее нужно разбить на конечное число более простых областей, в которых уже можно вычислить тройные интегралы методом сведения к повторным.

### Пример 1

Вычислить интеграл

$$\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz dx dy dz.$$

*Решение.*

Найдем последовательно все три интеграла:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz dx dy dz = \int_0^2 dz \int_0^z dy \int_0^y xyz dz = \int_0^2 dz \int_0^z dy \left[ \left( \frac{x^2 y z}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y} \right] = \int_0^2 dz \int_0^z \frac{y^3 z}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 dz \int_0^z y^3 z dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dz \left[ \left( \frac{y^4 z}{4} \right) \Big|_{y=0}^{y=z} \right] = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{z^5}{4} dz = \frac{1}{8} \int_0^2 z^5 dz = \frac{1}{8} \left( \frac{z^6}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

## Пример 2

Вычислить интеграл

$$\iiint_U (1 - x) dx dy dz,$$

где область  $U$  расположена в первом октанте ниже плоскости  $3x + 2y + z = 6$ .

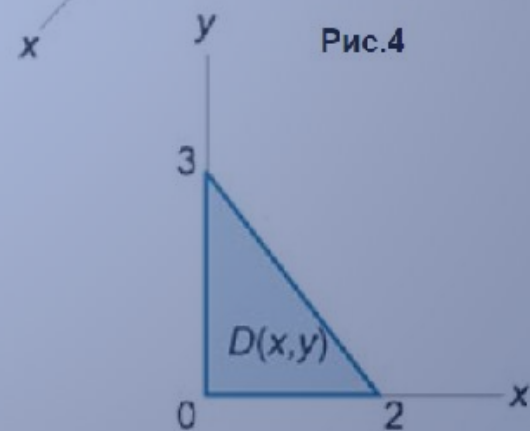
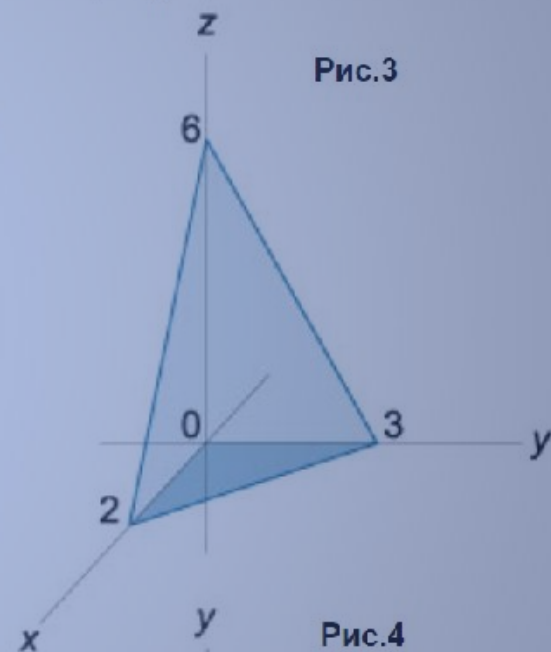
*Решение.*

Записывая уравнение плоскости  $3x + 2y + z = 6$  в отрезках:

$$3x + 2y + z = 6, \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1,$$

изобразим область интегрирования  $U$  (рисунок 3).

Пределы интегрирования по  $z$  изменяются от  $z = 0$  до  $z = 6 - 3x - 2y$ . Рассматривая проекцию  $D$  в плоскости  $Oxy$ , находим, что переменная  $y$  изменяется от  $y = 0$  до  $y = 3 - \frac{3}{2}x$  (рисунок 4). При этом переменная  $x$  "пробегает" от 0 до 2.



Итак, тройной интеграл выражается через повторный в виде

$$I = \iiint_U (1-x) dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{6-3x-2y} (1-x) dz.$$

Вычисляем последовательно все три интеграла и находим ответ:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{6-3x-2y} (1-x) dz = \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \left[ (z - zx) \Big|_{z=0}^{z=6-3x-2y} \right] \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [6 - 3x - 2y - (6 - 3x - 2y)x] dy = \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 3x - 2y - 6x + 3x^2 + 2xy) dy \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 9x - 2y + 3x^2 + 2xy) dy = \int_0^2 dx \left[ \left( 6y - 9xy - \frac{2y^2}{2} + 3x^2y + \frac{2xy^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} \right] \\ &= \int_0^2 \left( 9 - 18x + \frac{45}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^3 \right) dx = \left( 9x - \frac{18}{2}x^2 + \frac{45}{12}x^3 - \frac{9}{16}x^4 \right) \Big|_0^2 = 18 - 36 + 30 - 9 = 3. \end{aligned}$$

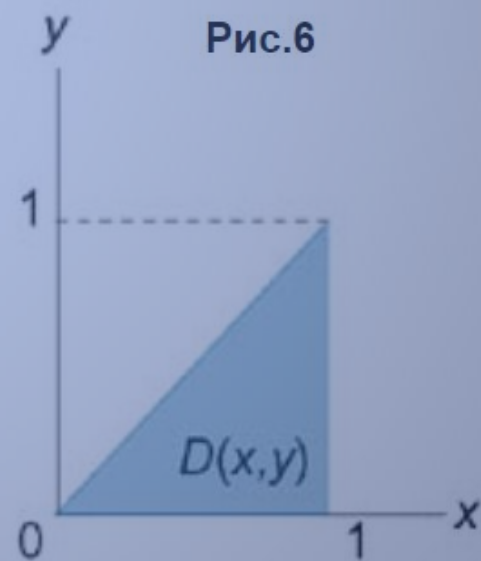
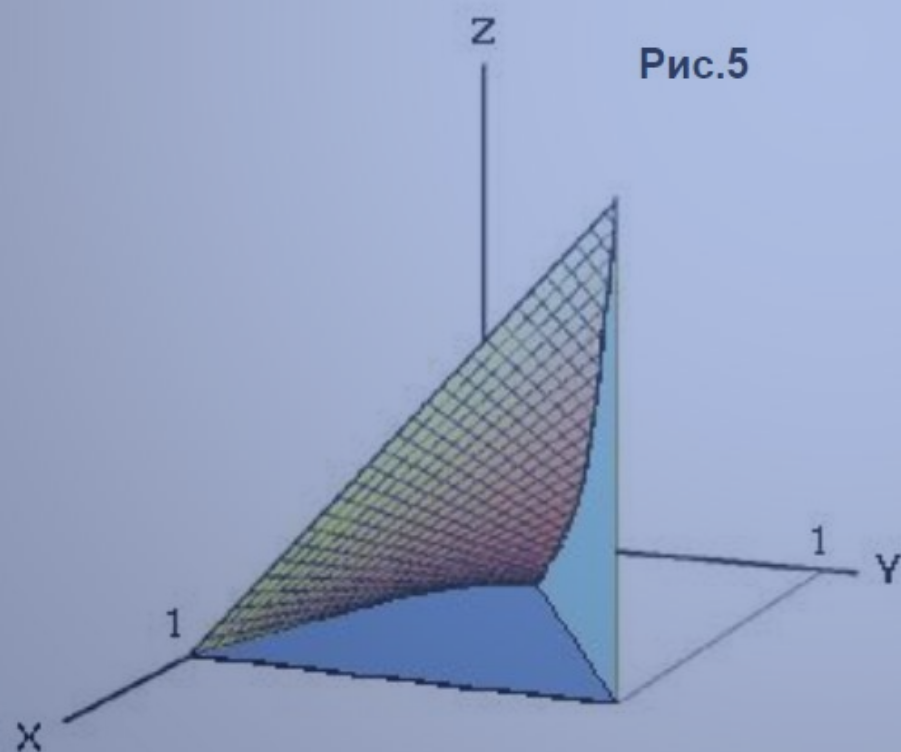
### Пример 3

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_U xy^2 z^3 dx dy dz,$$

где область  $U$  (рисунок 5) ограничена поверхностями

$$z = xy, \quad y = x, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad z = 0.$$



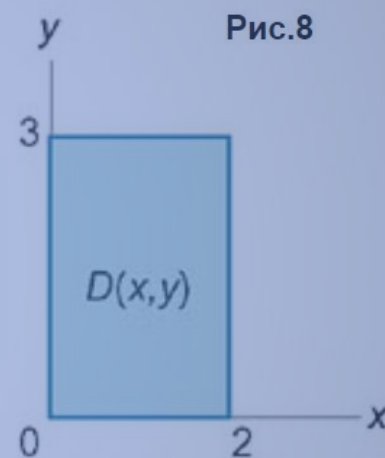
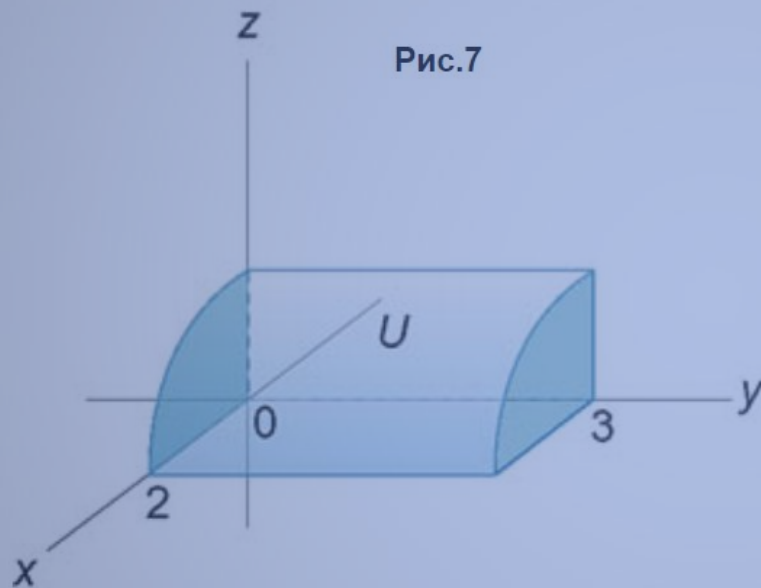
*Решение.*

Проекция области  $U$  на плоскость  $Oxy$  имеет вид, показанный на рисунке 6. Учитывая это, найдем соответствующие повторные интегралы:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[ \left( \frac{xy^2 z^4}{4} \right) \Big|_{z=0}^{z=xy} \right] \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \left( xy^2 \frac{x^4 y^4}{4} \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^x x^5 y^6 dy = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \left[ \left( \frac{x^5 y^7}{7} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} \right] = \frac{1}{4} \int_0^1 \left( x^5 \frac{x^7}{7} \right) dx \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{28} \left( \frac{x^{13}}{13} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

#### Пример 4

Выразить тройной интеграл  $\iiint_U dx dy dz$  через повторные интегралы шестью различными способами. Область  $U$  расположена в первом октанте и ограничена цилиндром  $x^2 + z^2 = 4$  и плоскостью  $y = 3$  (рисунок 7). Найти значение интеграла.





Решение.

Если порядок интегрирования имеет вид  $z - y - x$ , то повторный интеграл выглядит как

$$I_1 = \iiint_U dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz.$$

Аналогично записывается повторный интеграл для последовательности интегрирования  $z - x - y$ :

$$I_2 = \int_0^3 dy \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz.$$

Теперь рассмотрим случай  $x - y - z$ , т.е. когда первый внутренний интеграл берется по переменной  $x$ . Тогда

$$I_3 = \int_0^2 dz \int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{4-z^2}} dx.$$

Поскольку проекция тела на плоскость  $Oyz$  представляет собой прямоугольник (рисунок 8), то меняя порядок интегрирования по  $y$  и  $z$ , получаем

$$I_4 = \int_0^3 dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} dx.$$

Наконец, повторный интеграл при интегрировании в порядке  $y - x - z$  (начиная с внутреннего интеграла) имеет вид:

$$I_5 = \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} dx \int_0^3 dy.$$

Последний шестой вариант записывается в виде:

$$I_6 = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \int_0^3 dy.$$

Мы можем использовать любой из шести повторных интегралов, чтобы вычислить значение тройного интеграла. Например, используя последний интеграл, получаем:

$$\begin{aligned} I = I_6 &= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \int_0^3 dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \cdot \left[ y \Big|_0^3 \right] = 3 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz = 3 \int_0^2 dx \left[ z \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} \right] \\ &= 3 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx. \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$x = 2 \sin t, \Rightarrow dx = 2 \cos t dt,$$

$$x = 0, \Rightarrow t = 0,$$

$$x = 2, \Rightarrow \sin t = 1, \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Находим окончательный ответ:

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2 \sin t)^2} \cdot 2 \cos t dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 6 \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что данное значение в точности равно  $\frac{1}{4}$  объема цилиндра, по которому проводилось интегрирование.

## Замена переменных в тройных интегралах

При вычислении тройного интеграла, как и двойного, часто удобно сделать замену переменных. Это позволяет упростить вид области интегрирования или подынтегральное выражение.

Пусть исходный тройной интеграл задан в декартовых координатах  $x, y, z$  в области  $U$  :

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz.$$

Требуется вычислить данный интеграл в новых координатах  $u, v, w$ . Взаимосвязь старых и новых координат описывается соотношениями:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w).$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1. Функции  $\varphi, \psi, \chi$  непрерывны вместе со своими частными производными;
2. Существует взаимно-однозначное соответствие между точками области интегрирования  $U$  в пространстве  $xyz$  и точками области  $U'$  в пространстве  $uvw$ ;
3. *Якобиан преобразования*  $I(u, v, w)$ , равный

$$I(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

отличен от нуля и сохраняет постоянный знак всюду в области интегрирования  $U$ .

Тогда *формула замены переменных в тройном интеграле* записывается в виде:

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{U'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |I(u, v, w)| du dv dw.$$

В приведенном выражении  $|I(u, v, w)|$  означает абсолютное значение якобиана.

### Пример 1

Найти объем области  $U$ , заданной неравенствами

$$0 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq y + z \leq 5, \quad 0 \leq x + y + z \leq 10.$$

*Решение.*

Очевидно, что данная область является наклонным параллелепипедом. Удобно сделать такую замену переменных, при которой наклонный параллелепипед преобразуется в прямоугольный. В этом случае тройной интеграл сразу распадается на произведение трех однократных интегралов.

Сделаем следующую замену:

$$u = x + y + z, \quad v = y + z, \quad w = z.$$

Область интегрирования  $U'$  в новых переменных  $u, v, w$  ограничена неравенствами

$$0 \leq u \leq 10, \quad 0 \leq v \leq 5, \quad 0 \leq w \leq 2.$$

Объем тела равен

$$V = \iiint_U dx dy dz = \iiint_{U'} |I(u, v, w)| du dv dw.$$

Вычислим якобиан данного преобразования. Чтобы не выражать старые переменные  $x, y, z$  через новые  $u, v, w$ , найдем сначала якобиан обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Тогда

$$|I(u, v, w)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \left( \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1} \right| = 1.$$

Следовательно, объем тела равен

$$V = \iiint_{U'} |I(u, v, w)| \, dudvdw = \iiint_{U'} dudvdw = \int_0^{10} du \int_0^5 dv \int_0^2 dw = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100.$$

## Пример 2

Найти объем наклонного параллелепипеда, заданного неравенствами

$$0 \leq 2x - 3y + z \leq 5,$$

$$1 \leq x + 2y \leq 4,$$

$$-3 \leq x - z \leq 6.$$

*Решение.*

Введем новые переменные

$$u = 2x - 3y + z, \quad v = x + 2y, \quad w = x - z.$$

Вычислим якобиан обратного преобразования:

$$\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$



Раскладывая определитель по третьей строке, находим его значение:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9.$$

Тогда модуль якобиана прямого преобразования равен

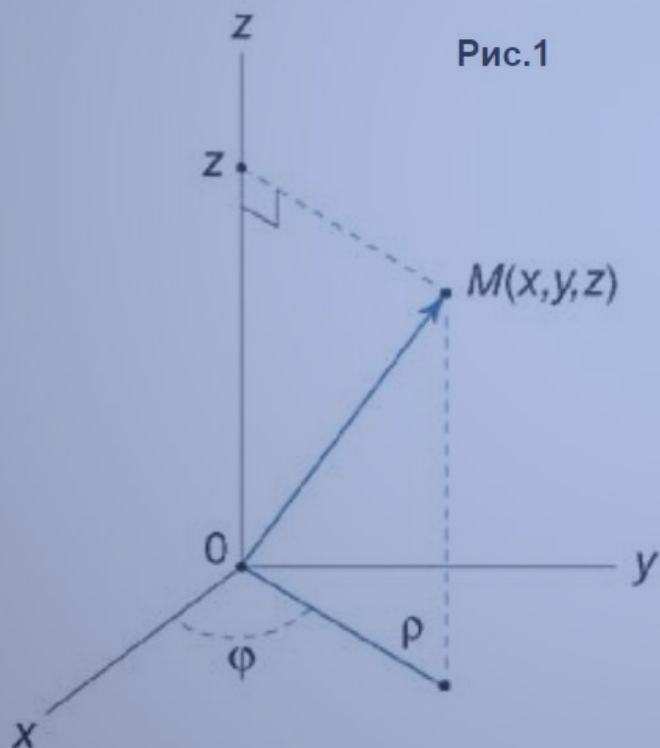
$$|I(u, v, w)| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \left( \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1} \right| = \left| \frac{1}{-9} \right| = \frac{1}{9}.$$

Теперь легко вычислить объем тела:

$$V = \iiint_{U'} |I(u, v, w)| \, dudvdw = \iiint_{U'} \frac{1}{9} \, dudvdw = \frac{1}{9} \int_0^5 du \int_1^4 dv \int_{-3}^6 dw = \frac{1}{9} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 15.$$

## Тройные интегралы в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах положение точки  $M(x, y, z)$  в пространстве  $Oxyz$  определяется тремя числами –  $\rho, \varphi, z$ , где  $\rho$  – длина радиуса-вектора проекции точки  $M$  на плоскость  $Oxy$ ,  $\varphi$  – угол, образованный этим радиусом-вектором с осью  $Ox$  (рисунок 1),  $z$  – проекция на ось  $Oz$  (ее значение одинаково в декартовых и цилиндрических координатах).



Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Здесь предполагается, что

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим равен

$$I(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0.$$

Тогда формула замены переменных при данном преобразовании имеет вид:

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{U'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

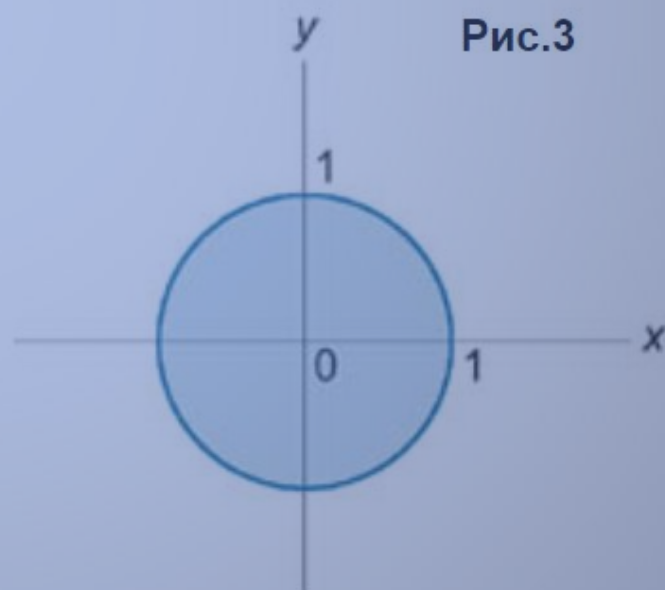
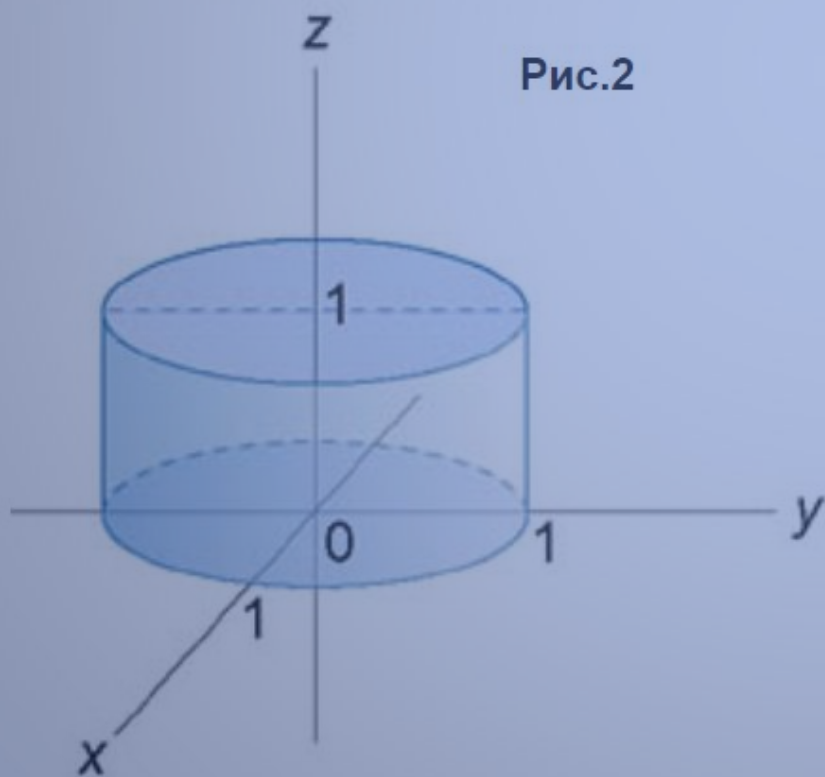
Переход к цилиндрическим координатам упрощает вычисление тройного интеграла в случаях, когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

## Пример 1

Вычислить интеграл

$$\iiint_U (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy dz,$$

где область  $U$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 \leq 1$  и плоскостями  $z = 0, z = 1$  (рисунок 2).



*Решение.*

Данный интеграл удобно вычислить в цилиндрических координатах. Проекция области интегрирования на плоскость  $Oxy$  представляет собой круг  $x^2 + y^2 \leq 1$  или  $0 \leq \rho \leq 1$  (рисунок 3).

Заметим, что подынтегральное выражение записывается в виде

$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = (x^2 + y^2)^2 = (\rho^2)^2 = \rho^4.$$

Тогда интеграл будет равен

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int_0^1 dz.$$

Здесь во втором интеграле добавлен множитель  $\rho$  – якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические. Все три интеграла по каждой из переменной не зависят друг от друга. В результате тройной интеграл легко вычисляется:

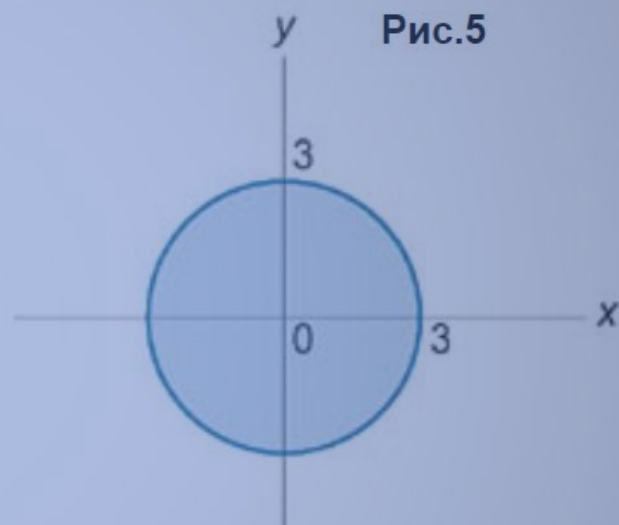
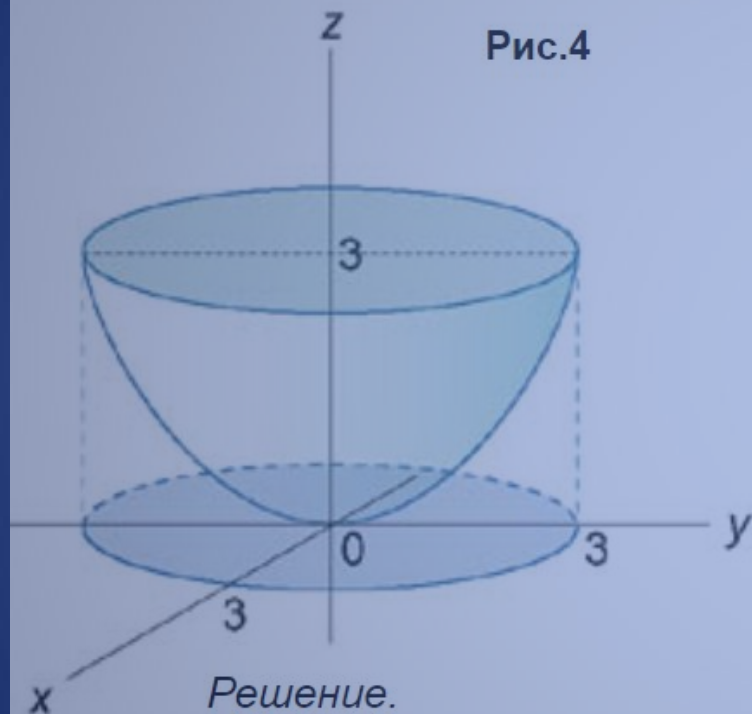
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho \int_0^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^1 dz = 2\pi \cdot 1 \cdot \int_0^1 \rho^5 d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

## Пример 2

Вычислить интеграл

$$\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где область  $U$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = 3z$ ,  $z = 3$  (рисунок 4).



*Решение.*

Область интегрирования изображена на рисунке 4. Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Дифференциал при этом равен  $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$  ( $\rho$  – якобиан).

Уравнение параболической поверхности принимает вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 3z \text{ или } \rho^2 = 3z.$$

Проекция области интегрирования  $U$  на плоскость  $Oxy$  представляет собой окружность  $x^2 + y^2 \leq 9$  радиусом  $\rho = 3$  (рисунок 5). Координата  $\rho$  изменяется в пределах от 0 до 3, угол  $\varphi$  – от 0 до  $2\pi$  и координата  $z$  – от  $\frac{\rho^2}{3}$  до 3. В результате интеграл будет равен

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{U'} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 d\rho \cdot \left[ z \Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^3 \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 \left( 3 - \frac{\rho^2}{3} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left( 3\rho^3 - \frac{\rho^5}{3} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[ \left( \frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{18} \right) \Big|_0^3 \right] \\ &= \left( \frac{3 \cdot 81}{4} - \frac{729}{18} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

































