

Исследование функции с помощью производной

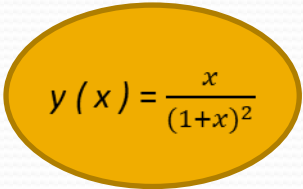
$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Вариант №6

Презентацию подготовили: Гладышева Анастасия и Кучинов Даниил
ученики 11 класса «Б»

1. Область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; -1); (-1; +\infty).$$


$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

2. Множество значений функции:

$$E(y) = (-\infty; 0,25].$$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

3. Исследование на четность:

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2};$$

$$y(-x) = \frac{-x}{(1-x)^2} = -\frac{x}{(1-x)^2} \neq y(x) \neq y(-x).$$

Т. к. не выполняются равенства

$$y(-x) = -y(x),$$

$$y(-x) = y(x),$$

то это функция общего вида, а значит график функции не симметричен ни оси ординат, ни началу координат.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

4. Исследование на периодичность:

Функция не является периодической.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

5. Нули функции:

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2};$$

$$y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(1+x)^2} = 0;$$

$$x = 0.$$

Уравнение имеет корень $x = 0$. Следовательно, график функции пересекает ось OX в точке $(0;0)$.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

6. Пересечение с осью OY:

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2};$$

$$y(0) = \frac{0}{(1+0)^2} = 0.$$

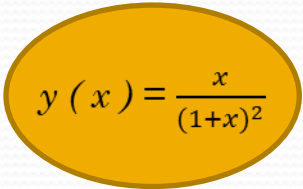
$x = 0$ при $y = 0$, следовательно, точка пересечения с осью OY – $(0;0)$.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

7. Первая производная функции:

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right)' = \frac{(x)'(1+x)^2 - x((1+x)^2)'}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{(1+x)(1+x-2x)}{(1+x)^4} = \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$


$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

8. Критические точки функции (первая производная):

$$y'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3};$$

$$D(y) = (-\infty; -1); (-1; +\infty)$$

$\Rightarrow x = -1$ – критическая точка особого вида.

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{(1+x)^3} = 0;$$

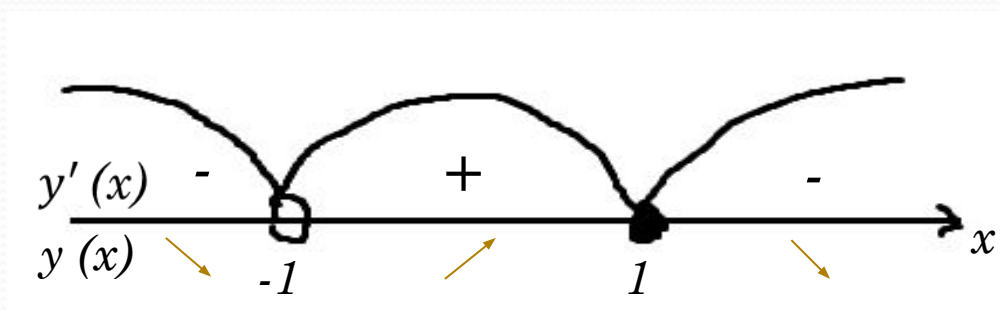
$$1-x=0;$$

$x=1$. Стационарная точка.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

9. Промежутки монотонности функции:

$$y'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3};$$



$$y'(0) > 0;$$

$$y'(2) < 0;$$

$$y'(-2) < 0.$$

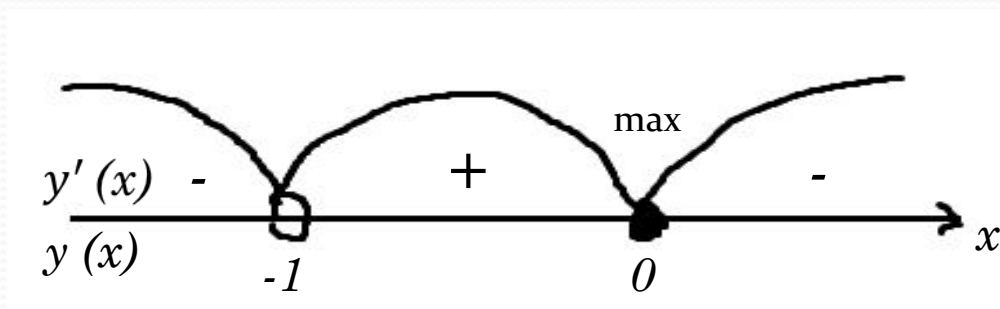
Значит, промежутки монотонности:

$$\begin{aligned} &\uparrow (-1; 1]; \\ &\downarrow (-\infty; -1); [1; +\infty). \end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

10. Точки экстремумов и экстремумы функции:

$$y'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3};$$



$$x_{max} = 1.$$

$$y_{max} = 0,25.$$

$$\max(1; 0,25).$$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

11. Вторая производная функции:

$$y'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3};$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{1-x}{(1+x)^3} \right)' = \frac{(1-x)'(1+x)^3 - (1-x)((1+x)^3)'}{(1+x)^6} = \frac{-(1+x)^3 - 3(1-x)(1+x)^2}{(1+x)^6} = \\ &= \frac{(1+x)^2(-1-x-3+3x)}{(1+x)^6} = \frac{2x-4}{(1+x)^4}; \end{aligned}$$

$$y''(x) = \frac{2x-4}{(1+x)^4}.$$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

12. Критические точки функции (вторая производная):

$$y''(x) = \frac{2x-4}{(1+x)^4};$$

$$y''(x) = 0 \iff \frac{2x-4}{(1+x)^4} = 0.$$

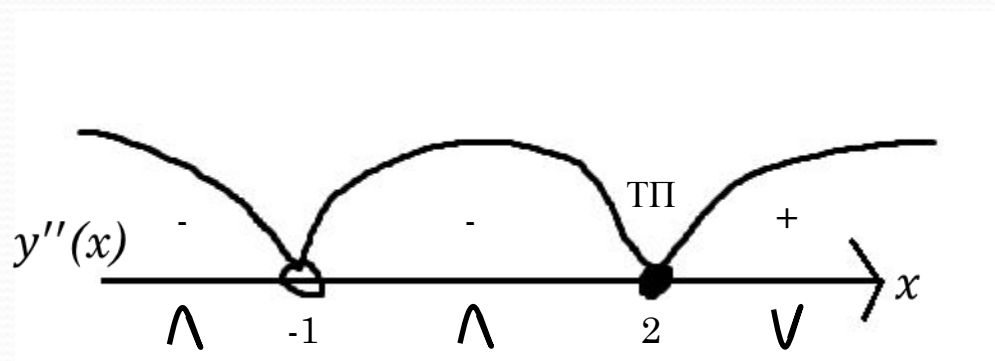
$$2x-4=0;$$

$$2x=4;$$

$x=2$. Стационарная точка 2-й производной.

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

13. Точки перегиба:



$$y''(-2) < 0;$$

$$y''(1) < 0;$$

$$y''(3) > 0.$$

$$x_{\text{ТП}} = 2.$$

$$y_{\text{ТП}} = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9}.$$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

14. Асимптоты функции (вертикальная, горизонтальная, наклонная):

1) Вертикальная: $x = a$, $D(y) = (-\infty; -1); (-1; +\infty)$,
 $x = -1$.

2) Горизонтальная: $y = b$,
 $y = b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x)^2} = 0;$

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

3) Наклонная:

Наклонной асимптоты нет (см. слайд 15)

$$y(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

15. Эскиз графика функции:

