Моделирование систем и процессов

Лабораторная работа №1.

Формирование вероятностно-статистических моделей объектов эксплуатации летательных аппаратов

Исходные данные и порядок формирования вер.-стат. модели эксплуатации

Исходными данными для формирования вер.-стат. модели являются экспериментальные результаты исследований параметров компонент эксплуатации.

На основании исходных данных строится гистограмма распределений (плотности распределения или частости). По виду этой гистограммы выдвигается гипотеза о виде закона распределения исследуемого параметра. Эта гипотеза проверяется с помощью критерия согласия. При подтверждении гипотезы она принимается, а в случае отказа в подтверждении гипотезы - корректируется вер.-стат. модель.

Законы распределения непрерывных случайных величин, используемые при формировании вер.-стат. моделей

В практике эксплуатации АТ встречаются следующие непрерывные распределения вероятностей:

- нормальное,
- экспоненциальное,
- Вейбулла,
- гамма-распределение,
- логарифмически-нормальное

Ход работы

1. Получить исходные данные. Исходным материалом являются статистические данные, вариационный ряд - набор чисел в порядке возрастания

2. Выбрать математическую модель, которая наиболее полно соответствует вариационному ряду. Модель соответствует одному из распределения непрерывных случайных величин: нормальный, экспоненциальный или Вейбулла.

Пример

Таблица исходных данных:

70	**133**	**178**	**212**	**283**	**317**	**420**	**460**	**500**	**532**
595	**645**	**742**	**788**	**822**	**856**	**929**	**995**	**1079**	**1126**
1193	**1279**	**1366**	**1432**	**1497**	**1624**	**1719**	**1863**	**2195**	**2730**

1. Сгруппируем статистические данные (из таблицы своего варианта) в интервалы. Длины интервала определяется формуле (6.1.1).

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,2 \cdot lg\, N} = 464,48$$

N = 30 - общее число значений случайной величины (число значений в таблице)

Найдем границы всех интервалов:

1-ый интервал – от **70** до 70+464=**534**

2-ой интервал – от **534** до 534+464=**998**

3-ий интервал – от **998** до **1463**

4-ый интервал – от **1463** до **1927**

5-ый интервал – от **1927** до **2392**

6-ый интервал – от **2392** до **2856**

k = 6 - число интервалов разбиения

70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730

2. Посчитаем значение n_i – количество чисел из таблицы, попавших в каждый интервал.

1-ый интервал – от 70 до 534
2-ой интервал – от 534 до 998
3-ий интервал – от 998 до 1463
4-ый интервал – от 1463 до 1927
5-ый интервал – от 1927 до 2392
6-ый интервал – от 2392 до 2856

1-ом интервале – $\Delta n_1=10$
2-ом интервале – $\Delta n_2=8$
3-ем интервале – $\Delta n_3=6$
4-ом интервале – $\Delta n_4=4$
5-ом интервале – $\Delta n_5=1$
6-ом интервале – $\Delta n_6=1$

70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730

3. Значения статистической плотности распределения f^*_i в *i*-м интервале рассчитывается по формуле (6.1.2)

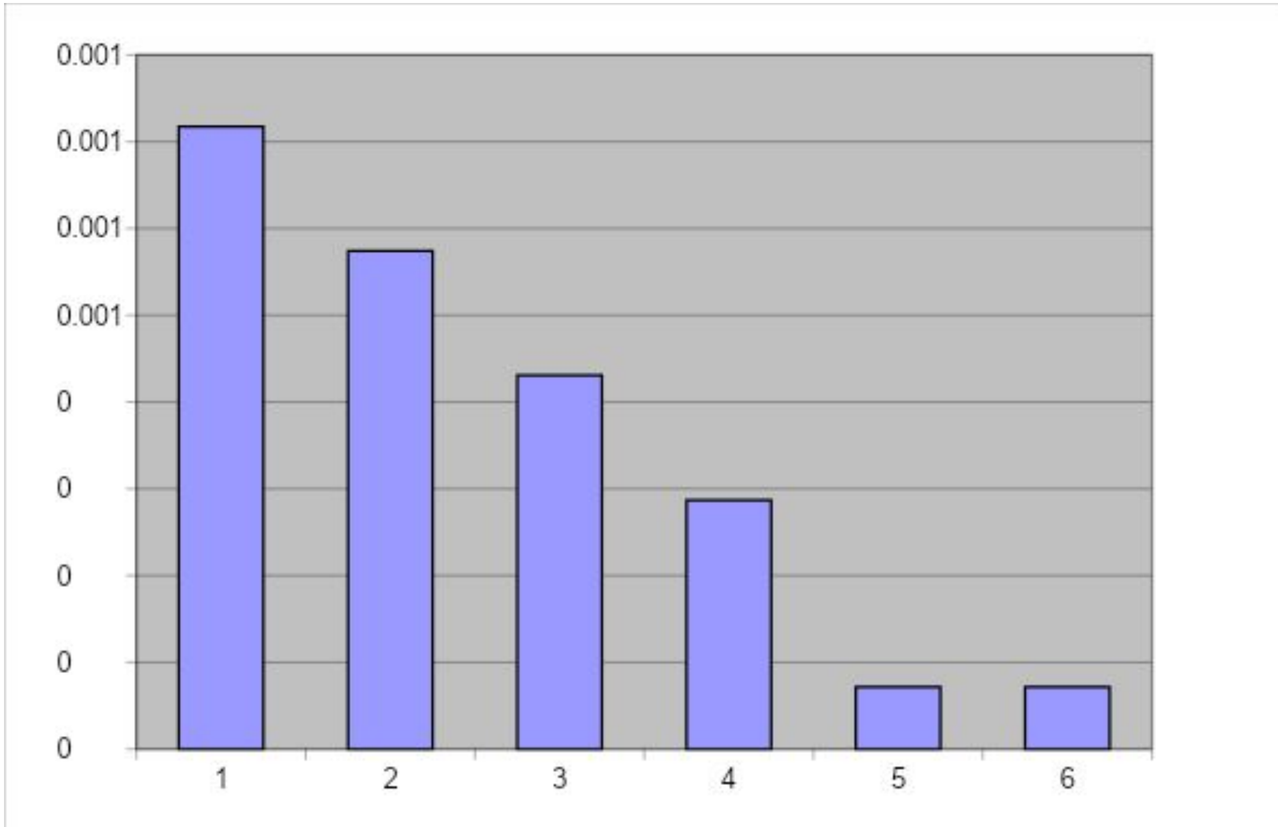
$$f_i\ (x) = \frac{\Delta n_i}{N \Delta x}$$

4. Значения частостей P_i^* показывают вероятность нахождения случайной величины в каждом интервале (6.1.3).

$$P_i^* = \frac{\Delta n_i}{N}$$

1-ом интервале – Δn_1=10 f_1=0,00071 P^*_1=0,3333
2-ом интервале – Δn_2=8 f_2=0,00057 P^*_2=0,2666
3-ем интервале – Δn_3=6 f_3=0,00043 P^*_3=0,2
4-ом интервале – Δn_4=4 f_4=0,00028 P^*_4=0,1333
5-ом интервале – Δn_5=1 f_5=0,000071 P^*_5=0,0333
6-ом интервале – Δn_6=1 f_6=0,000071 P^*_6=0,0333

По значениям P_i^* построим гистограмму частостей.

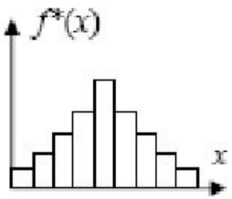
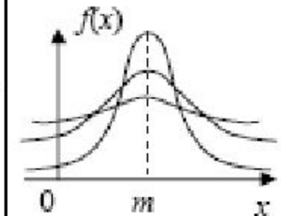
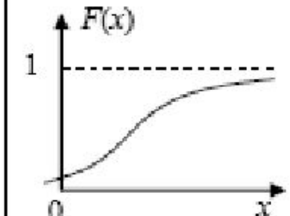
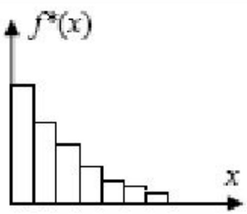
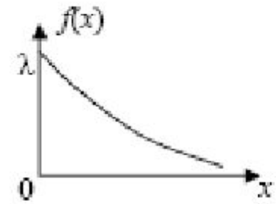
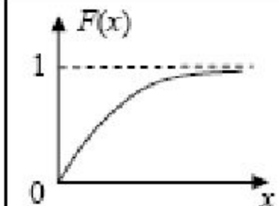
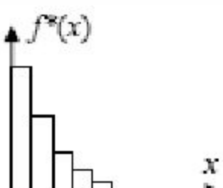
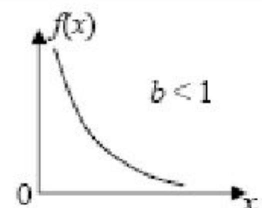
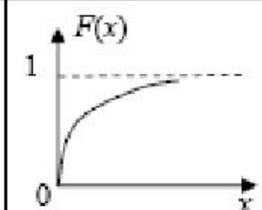
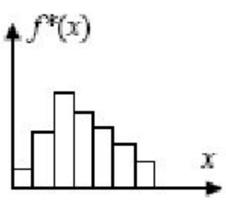
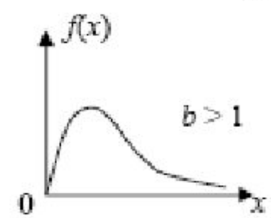
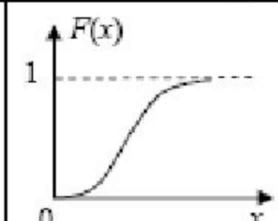


5. По виду гистограммы, сравнивая ее с графиками приведенными в таблице 2.1, делаем предположение о виде закона распределения (экспоненциальный закон, нормальный закон или Вейбулла).

Выбрав теоретическое выражение для вероятностно-статистической модели определим ее параметры.

Таблица 6.1

Формирование вероятностно-статистической модели по виду гистограмм

Вид гистограмм	Предполагаемый закон распределения	Параметры закона	Математические выражения		Теоретические графики	
			Плотность распределения	Функции распределения	Плотность распределения	Функции распределения
	Нормальный	m σ	$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$		
	Экспоненциальный	$\lambda = \frac{1}{m}$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$		
	Вейбулла	a b	$f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$	$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$		
	Вейбулла	a b	$f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$	$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$		

6. Определим математическое ожидание *m* (6.1.4), дисперсию (6.1.5)
и среднеквадратическое отклонение σ (6.1.6).

$$m = \sum_{i=1}^{k} X_i P_i^*$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{k} (X_i - m)^2 P_i^*$$

$$\sigma = \sqrt{D[X]}$$

Где X_i - расстояние от середины интервала до начала координат
X_1=70+(464/2)=302 – расстояние от середины 1-го интервала до 0
X_2=534+(464/2)=766 - расстояние от середины 2-го интервала до 0
X_3=998+(464/2)=1231 - расстояние от середины 3-го интервала до 0
X_4=1463+(464/2)=1695 - расстояние от середины 4-го интервала до 0
X_5=1927+(464/2)=2160 - расстояние от середины 5-го интервала до 0
X_6=2392+(464/2)=2624 - расстояние от середины 6-го интервала до 0

$$m = X_1 \cdot P*_1 + X_2 \cdot P*_2 + X_3 \cdot P*_3 + X_4 \cdot P*_4 + X_5 \cdot P*_5 + X_6 \cdot P*_6 = 937$$

$$D = (X_1 - m)^2 \cdot P*_1 + (X_2 - m)^2 \cdot P*_2 + (X_3 - m)^2 \cdot P*_3 +$$

$$+ (X_4 - m)^2 \cdot P*_4 + (X_5 - m)^2 \cdot P*_5 + (X_6 - m)^2 \cdot P*_6 = 380910$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{380910} = 617$$

7. Определить параметры модели:

а) Экспоненциальный закон распределения - один параметр *λ*

$$\lambda = \frac{1}{m} \qquad \lambda = \frac{1}{m} = 0{,}001067$$

б) Нормальный закон распределения - два параметра: математическое ожидание *m* (6.1.5) и среднеквадратическое отклонение *σ* (6.1.6)

$$m = 937 \qquad \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{380910} = 617$$

в) Распределение Вейбулла – два параметра: величины *a* и *b* (6.1.9, 6.1.10 и табл 6.1.1)

$$\nu = \frac{\sigma}{m} = \frac{C_b}{K_b} \qquad a = \frac{m}{K_b}, \quad \text{или} \quad a = \frac{\sigma}{C_b}$$

ν - коэффициент вариации = 0,65

Kb=0,897

Cb=0,574

b=1,6 a=1044

Окончательное выражение

$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$

а) **Экспоненциальный закон распределения**

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dt$$

б) **Нормальный закон распределения**

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{0,001067x}$$

в) **Распределение Вейбулла**

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} = 1 - e^{-\left(\frac{x}{1044}\right)^{1,6}}$$

Лабораторная работа №2
Проверка соответствия выбранной модели экспериментальным данным с помощью критериев согласия

Проверяем соответствие выбранной модели экспериментальным данным.

1. Рассчитываем критерий Пирсона (критерий $\chi^2_{расч}$.)по формуле (6.2.1) и сравниваем с значением $\chi^2_{табл}$. (таблица 6.2.2).

$$\chi^2_{\text{ðàñ}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\Delta n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i},$$

$$\chi^2_{\text{ðàñ}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\Delta n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i},$$

- k, Δn_i, N рассчитаны ранее;
- P_i – вероятность попадания случайной величины в *i*-й интервал в соответствии с теоретическим значением закона распределения выбранной модели (**не путать** со значением P^*_i из предыдущей лабораторной работы).

- а) Величина *Pi* при экспоненциальном распределении – формула (6.2.4)

$$P_i = e^{-\lambda \cdot x_i} - e^{-\lambda \cdot x_{i+1}}$$

$P_1=e^{-\lambda X0}- e^{-\lambda X1}= e^{-\lambda * 70} - e^{-\lambda * 534}$
$P_2=e^{-\lambda X1}- e^{-\lambda X2}= e^{-\lambda * 534} - e^{-\lambda * 998}$
$P_3=e^{-\lambda X2}- e^{-\lambda X3}= e^{-\lambda * 998} - e^{-\lambda * 1463}$
$P_4=e^{-\lambda X3}- e^{-\lambda X4}= e^{-\lambda * 1463} - e^{-\lambda * 1927}$
$P_5=e^{-\lambda X4}- e^{-\lambda X5}= e^{-\lambda * 1927} - e^{-\lambda * 2392}$
$P_6=e^{-\lambda X5}- e^{-\lambda X6}= e^{-\lambda * 2392} - e^{-\lambda * 2856}$

X_i и X_{i+1} - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1)

$$P_i = F(x_{i+1}) - F(x_i),$$

б) Нормальное распределение – формула (6.2.2), величины *F*(*xi+1*) и *F*(*xi*) определяются с помощью таблицы (таблица 6.2.1). Вход в таблицу производится по значению величины

$$S = \frac{x - \langle m \rangle}{\sigma}$$

Если *x*<, то *S*<0 и *F*(–*x*)=1–*F*(*x*), если *S*>0, то берется непосредственно табличное значение.

X_i и X_{i+1} - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1) в) Распределение Вейбула – формула (6.2.7) – в учебнике в формуле ошибка!

$$P_i = e^{-\left(\frac{x_i}{a}\right)^b} - e^{-\left(\frac{x_{i+1}}{a}\right)^b}$$

X_i и X_{i+1} - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1)

2. Затем по таблице 6.2.2 необходимо определить значение число степеней свободы *r* рассчитываем как *r*=*k*–1–*l*.

а) Для экспоненциального закона распределения *l* = 1

б) Для нормального закона *l* = 2,

в) Для закона Вейбула *l* = 2

γ >0,7 Чем больше γ, тем лучше соответствует выбранная модель экспериментальным данным.

3. Сравнить $\chi^2_{расч}$ и $\chi^2_{табл}$, и сделать вывод о соответствии выбранной модели опытным данным

Если $\chi^2_{\text{ðàñ}} \leq \chi^2_{\text{òàá}}$, то выбранная вероятностно-статистическая модель соответствует экспериментальным данным.

Если $\chi^2_{\text{ðàñ}} > \chi^2_{\text{òàá}}$, то модель не соответствует экспериментальным данным.