

# Моделирование систем и процессов

Лабораторная работа №1.

**Формирование вероятностно-статистических моделей объектов эксплуатации летательных аппаратов**

# Исходные данные и порядок формирования вер.-стат. модели эксплуатации

Исходными данными для формирования вер.-стат. модели являются экспериментальные результаты исследований параметров компонент эксплуатации.

На основании исходных данных строится гистограмма распределений (плотности распределения или частоты). По виду этой гистограммы выдвигается гипотеза о виде закона распределения исследуемого параметра. Эта гипотеза проверяется с помощью критерия согласия. При подтверждении гипотезы она принимается, а в случае отказа в подтверждении гипотезы - корректируется вер.-стат. модель.

# Законы распределения непрерывных случайных величин, используемые при формировании вер.-стат. моделей

В практике эксплуатации АТ встречаются следующие непрерывные распределения вероятностей:

- нормальное,
- экспоненциальное,
- Вейбулла,
- гамма-распределение,
- логарифмически-нормальное

# Ход работы

1. Получить исходные данные. Исходным материалом являются статистические данные, вариационный ряд - набор чисел в порядке возрастания
2. Выбрать математическую модель, которая наиболее полно соответствует вариационному ряду. Модель соответствует одному из распределения непрерывных случайных величин: нормальный, экспоненциальный или Вейбулла.

# Пример

Таблица исходных данных:

<b>70</b>	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	<b>2730</b>

1. Сгруппируем статистические данные (из таблицы своего варианта) в интервалы. Длины интервала определяется формуле (6.1.1).

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,2 \cdot \lg N} = 464,48$$

$N = 30$  - общее число значений случайной величины (число значений в таблице)

Найдем границы всех интервалов:

1-ый интервал – от **70** до  $70+464=534$

2-ой интервал – от **534** до  $534+464=998$

3-ий интервал – от **998** до **1463**

4-ый интервал – от **1463** до **1927**

5-ый интервал – от **1927** до **2392**

6-ый интервал – от **2392** до **2856**

$k = 6$  - число интервалов разбиения

70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730

2. Посчитаем значение  $n_i$  – количество чисел из таблицы, попавших в каждый интервал.

1-ый интервал – от 70 до 534

2-ой интервал – от 534 до 998

3-ий интервал – от 998 до 1463

4-ый интервал – от 1463 до 1927

5-ый интервал – от 1927 до 2392

6-ый интервал – от 2392 до 2856

1-ом интервале –  $\Delta n_1 = 10$

2-ом интервале –  $\Delta n_2 = 8$

3-ем интервале –  $\Delta n_3 = 6$

4-ом интервале –  $\Delta n_4 = 4$

5-ом интервале –  $\Delta n_5 = 1$

6-ом интервале –  $\Delta n_6 = 1$

70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730

3. Значения статистической плотности распределения  $f_i^*$  в  $i$ -м интервале рассчитывается по формуле (6.1.2)

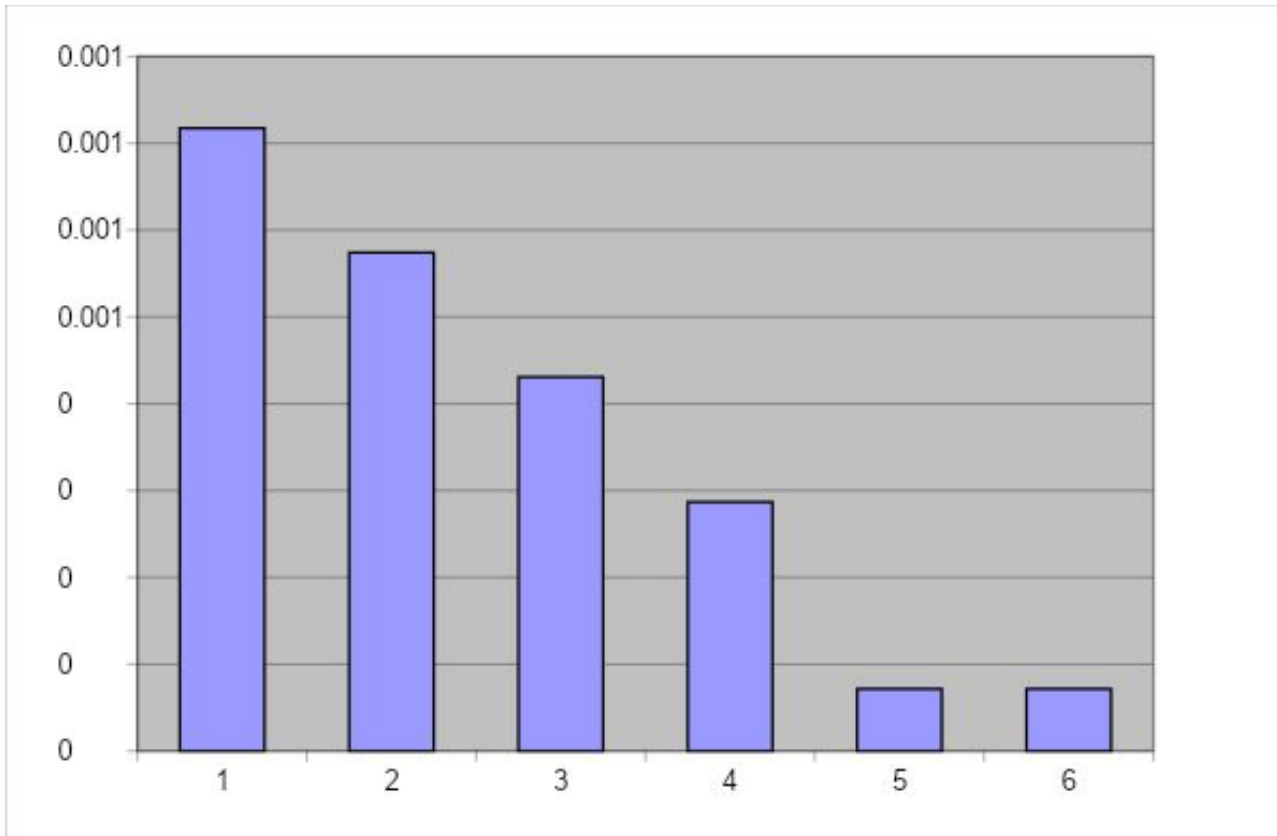
$$f_i(x) = \frac{\Delta n_i}{N \Delta x}$$

4. Значения частот  $P_i^*$  показывают вероятность нахождения случайной величины в каждом интервале (6.1.3).

$$P_i^* = \frac{\Delta n_i}{N}$$

1-ом интервале – $\Delta n_1=10$	$f_1=0,00071$	$P_1^*=0,3333$
2-ом интервале – $\Delta n_2=8$	$f_2=0,00057$	$P_2^*=0,2666$
3-ем интервале – $\Delta n_3=6$	$f_3=0,00043$	$P_3^*=0,2$
4-ом интервале – $\Delta n_4=4$	$f_4=0,00028$	$P_4^*=0,1333$
5-ом интервале – $\Delta n_5=1$	$f_5=0,000071$	$P_5^*=0,0333$
6-ом интервале – $\Delta n_6=1$	$f_6=0,000071$	$P_6^*=0,0333$

По значениям  $P_i^*$  построим гистограмму частот.

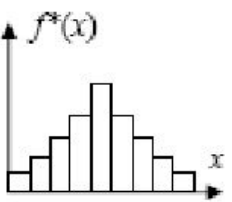
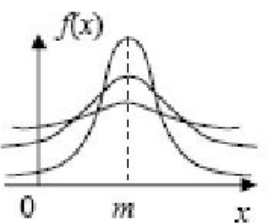
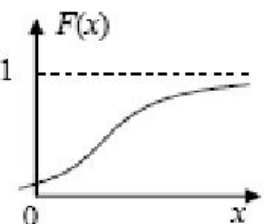
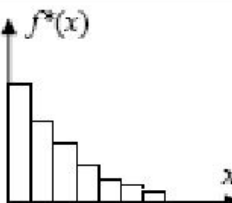
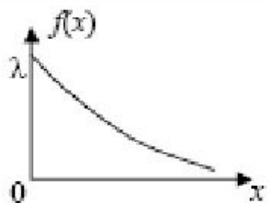
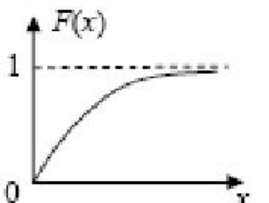
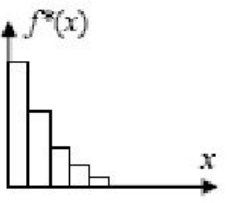
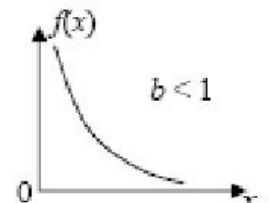
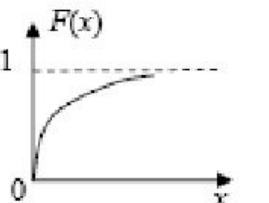
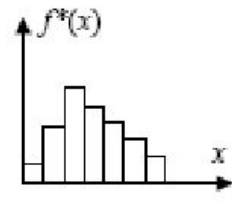
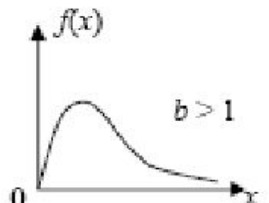
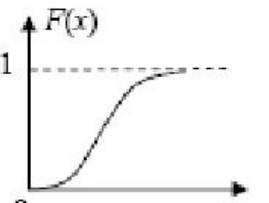


5. По виду гистограммы, сравнивая ее с графиками приведенными в таблице 2.1, делаем предположение о виде закона распределения (экспоненциальный закон, нормальный закон или Вейбулла).

Выбрав теоретическое выражение для вероятностно-статистической модели определим ее параметры.



Формирование вероятностно-статистической модели по виду гистограмм

Вид гистограмм	Предполагаемый закон распределения	Параметры закона	Математические выражения		Теоретические графики	
			Плотность распределения	Функции распределения	Плотность распределения	Функции распределения
	Нормальный	$m$ $\sigma$	$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$		
	Экспоненциальный	$\lambda = \frac{1}{m}$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$		
	Вейбулла	$a$ $b$	$f(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$	$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$		
	Вейбулла	$a$ $b$	$f(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$	$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$		

6. Определим математическое ожидание  $m$  (6.1.4), дисперсию (6.1.5)

и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  (6.1.6).

$$m = \sum_{i=1}^k X_i P_i^* \quad D[X] = \sum_{i=1}^k (X_i - m)^2 P_i^* \quad \sigma = \sqrt{D[X]}$$

Где  $X_i$  - расстояние от середины интервала до начала координат

$X_1 = 70 + (464/2) = 302$  - расстояние от середины 1-го интервала до 0

$X_2 = 534 + (464/2) = 766$  - расстояние от середины 2-го интервала до 0

$X_3 = 998 + (464/2) = 1231$  - расстояние от середины 3-го интервала до 0

$X_4 = 1463 + (464/2) = 1695$  - расстояние от середины 4-го интервала до 0

$X_5 = 1927 + (464/2) = 2160$  - расстояние от середины 5-го интервала до 0

$X_6 = 2392 + (464/2) = 2624$  - расстояние от середины 6-го интервала до 0

$$m = X_1 \cdot P^*_1 + X_2 \cdot P^*_2 + X_3 \cdot P^*_3 + X_4 \cdot P^*_4 + X_5 \cdot P^*_5 + X_6 \cdot P^*_6 = 937$$

$$D = (X_1 - m)^2 \cdot P^*_1 + (X_2 - m)^2 \cdot P^*_2 + (X_3 - m)^2 \cdot P^*_3 + \\ + (X_4 - m)^2 \cdot P^*_4 + (X_5 - m)^2 \cdot P^*_5 + (X_6 - m)^2 \cdot P^*_6 = 380910$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{380910} = 617$$

7. Определить параметры модели:

а) **Экспоненциальный закон распределения** - один параметр  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{m} \quad \lambda = \frac{1}{m} = 0,001067$$

б) **Нормальный закон распределения** - два параметра: математическое ожидание  $m$  (6.1.5) и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  (6.1.6)

$$m = 937 \quad \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{380910} = 617$$

в) **Распределение Вейбулла** – два параметра: величины  $a$  и  $b$  (6.1.9, 6.1.10 и табл 6.1.1)

$$v = \frac{\sigma}{m} = \frac{C_b}{K_b} \quad a = \frac{m}{K_b}, \quad \text{или} \quad a = \frac{\sigma}{C_b}$$

$v$  - коэффициент вариации = 0,65

$K_b=0,897$

$C_b=0,574$

**$b=1,6$        $a=1044$**

# Окончательное выражение

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

а) Экспоненциальный закон распределения  $x^2$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

б) Нормальный закон распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0,001067x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

в) Распределение Вейбулла

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} = 1 - e^{-\left(\frac{x}{1044}\right)^{1,6}}$$

# Лабораторная работа №2

## Проверка соответствия выбранной модели экспериментальным данным с помощью критериев согласия

Проверяем соответствие выбранной модели экспериментальным данным.

1. Рассчитываем критерий Пирсона (критерий  $\chi^2_{\text{расч.}}$ ) по формуле (6.2.1) и сравниваем с значением  $\chi^2_{\text{табл.}}$  (таблица 6.2.2).

$$\chi^2_{\text{данных}} = \sum_{i=1}^k \frac{(\Delta n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i},$$

$$\chi^2_{\text{дàñ}} = \sum_{i=1}^k \frac{(\Delta n_i - N \cdot P_i)^2}{N \cdot P_i},$$

- $k, \Delta n_i, N$  рассчитаны ранее;
- $P_i$  – вероятность попадания случайной величины в  $i$ -й интервал в соответствии с теоретическим значением закона распределения выбранной модели (**не путать** со значением  $P_i^*$  из предыдущей лабораторной работы).

- а) Величина  $P_i$  при экспоненциальном распределении – формула (6.2.4)

$$P_i = e^{-\lambda \cdot x_i} - e^{-\lambda \cdot x_{i+1}}$$

$$P_1 = e^{-\lambda X_0} - e^{-\lambda X_1} = e^{-\lambda \cdot 70} - e^{-\lambda \cdot 534}$$

$$P_2 = e^{-\lambda X_1} - e^{-\lambda X_2} = e^{-\lambda \cdot 534} - e^{-\lambda \cdot 998}$$

$$P_3 = e^{-\lambda X_2} - e^{-\lambda X_3} = e^{-\lambda \cdot 998} - e^{-\lambda \cdot 1463}$$

$$P_4 = e^{-\lambda X_3} - e^{-\lambda X_4} = e^{-\lambda \cdot 1463} - e^{-\lambda \cdot 1927}$$

$$P_5 = e^{-\lambda X_4} - e^{-\lambda X_5} = e^{-\lambda \cdot 1927} - e^{-\lambda \cdot 2392}$$

$$P_6 = e^{-\lambda X_5} - e^{-\lambda X_6} = e^{-\lambda \cdot 2392} - e^{-\lambda \cdot 2856}$$

$X_i$  и  $X_{i+1}$  - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1)

$$P_i = F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

б) Нормальное распределение – формула (6.2.2), величины  $F(x_{i+1})$  и  $F(x_i)$  определяются с помощью таблицы (таблица 6.2.1). Вход в таблицу производится по значению величины

$$S = \frac{x - \langle m \rangle}{\sigma}$$

Если  $x <$ , то  $S < 0$  и  $F(-x) = 1 - F(x)$ , если  $S > 0$ , то берется непосредственно табличное значение.

$X_i$  и  $X_{i+1}$  - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1)



в) Распределение Вейбула – формула (6.2.7) – в учебнике в формуле ошибка!

$$P_i = e^{-\left(\frac{x_i}{a}\right)^b} - e^{-\left(\frac{x_{i+1}}{a}\right)^b}$$

$X_i$  и  $X_{i+1}$  - нижняя и верхняя границы интервала разбиения (Л.Р. №1)

2. Затем по таблице 6.2.2 необходимо определить значение число степеней свободы  $r$  рассчитываем как  $r = k - 1 - l$ .

а) Для экспоненциального закона распределения  $l = 1$

б) Для нормального закона  $l = 2$ ,

в) Для закона Вейбула  $l = 2$

$\gamma > 0,7$  Чем больше  $\gamma$ , тем лучше соответствует выбранная модель экспериментальным данным.

3. Сравнить  $\chi^2_{\text{расч}}$  и  $\chi^2_{\text{табл}}$ , и сделать вывод о соответствии выбранной модели опытным данным

Если  $\chi^2_{\text{расч}} \leq \chi^2_{\text{табл}}$ , выбранная вероятностно-статистическая модель соответствует экспериментальным данным.

Если  $\chi^2_{\text{расч}} > \chi^2_{\text{табл}}$ , то модель не соответствует экспериментальным данным.