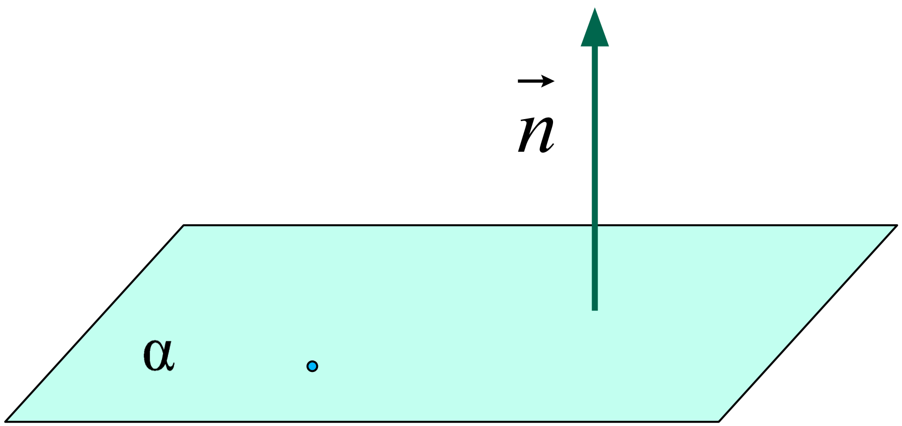
# Решение задач по теме «Углы между прямыми и плоскостями (координатный метод)».

Геометрия, 11 класс

Сегодня, 23 октября, пройдёт школьный тур ВОШ по математике. Логины можно взять у Анны Михайловны.

# Уравнение плоскости




$Ax + By + Cz + D = 0$ - уравнение плоскости α,

где A, B, C, D – некоторые числа. (одновр. не равны 0)

$\vec{n} \perp \alpha$ ;

$\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости α;

$\vec{n}\,\{A; B; C\}$ - координаты вектора нормали.

# Алгоритм построения уравнения плоскости

1. **Найдем координаты трех точек, принадлежащих плоскости** *$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.*

2. **Подставив координаты найденных точек в уравнение плоскости** *$Ax+By+Cz+D=0$,* **и решая систему**

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \end{cases}$$

***находим коэффициенты A, B, C и D.***

Составьте уравнение плоскости и найдите координаты вектора нормали, если плоскость проходит через точки A(1; 0; -2), P(-3; 1; 0) и K(0; -1; 1).

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$A(1;0;-2):\ A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot(-2)+D=0$

$P(-3;1;0):\ A\cdot(-3)+B\cdot 1+C\cdot 0+D=0$

$K(0;-1;1):\ A\cdot 0+B\cdot(-1)+C\cdot 1+D=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-2C+D=0 \\ -3A+B+D=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=2C-D \\ -3A+B+D=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ -3(2C-D)+B+D=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ -6C+4D+B=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ B=6C-4D \\ -B+C+D=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ B=6C-4D \\ -(6C-4D)+C+D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ B=6C-4D \\ -6C+4D+C+D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ B=6C-4D \\ -5C+5D=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2C-D \\ B=6C-4D \\ C=D \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=2D-D \\ B=6D-4D \\ C=D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=D \\ B=2D \\ C=D \end{cases}$$

$Ax+By+Cz+D=0$

$Dx+2Dy+Dz+D=0 \mid :D\neq 0$

$x+2y+z+1=0$ – ур-ние пл-ти (APK)

$\vec{n}\{1;2;1\}$ – вектор нормали (APK)

$C(4;-1;-3)\in(APK)$

$M(3;2;-4)\in(APK)$ – ?

$x+2y+z+1=0$

$3+2\cdot 2-4+1=0 \Rightarrow M\notin(APK)$

$4\neq 0$

**Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5) и найти координаты вектора нормали.**

***Решение.***

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

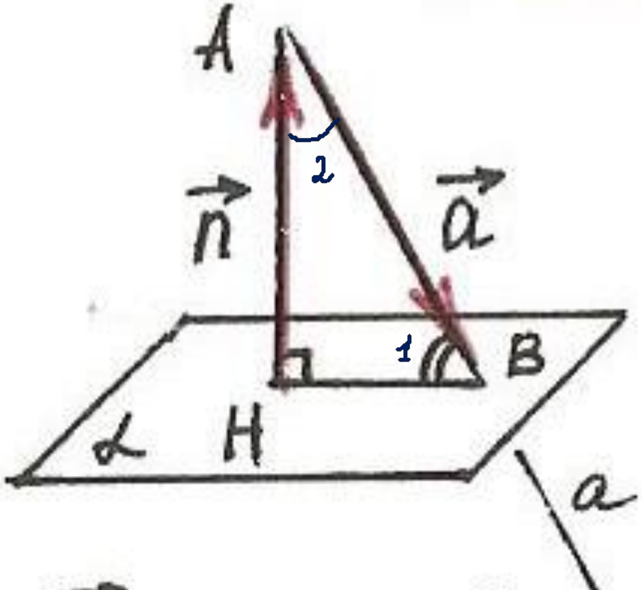
$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

$$\vec{n}\{15\ ;10\ ;6\}$$

## б) Угол между прямой и плоскостью

$\cos\angle 2 = \cos(90 - \angle 1) = \sin\angle 1$



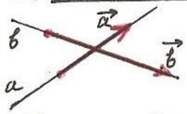

$$\sin(\widehat{a;\alpha}) = |\cos(\vec{a};\vec{n})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$$

$\vec{a}$ - направляющий вектор пр. a

$\vec{n} \perp \alpha$ - вектор нормали

## I Нахождение углов

### а) Угол между прямыми



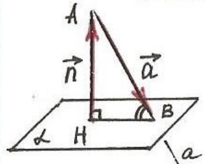

$\cos\angle(a;b) = |\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})| =$

$= \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$\vec{a}$ - направл. вектор пр. а

$\vec{b}$ - напр. вектор пр. в.

### б) Угол между прямой и плоскостью



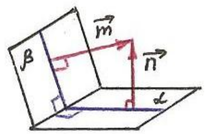

$\sin(\widehat{a;\alpha}) = |\cos(\vec{a};\vec{n})| =$

$= \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$

$\vec{a}$ - направляющий вектор пр а

$\vec{n}\perp\alpha$ - вектор нормали

### в) Угол между плоскостями




$\cos(\widehat{\alpha;\beta}) = |\cos(\widehat{\vec{m};\vec{n}})|$

$= \dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$

$\vec{m}$ - вектор нормали к $\beta$ ($\vec{m}\perp\beta$)

$\vec{n}$ - вектор нормали к $\alpha$ ($\vec{n}\perp\alpha$)

## Уравнение плоскости

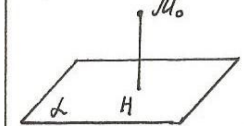
$ax+by+cz+d=0$ - уравнение плоскости

$(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

$\vec{n}\{a;b;c\}$ - вектор нормали данной пл-ти

## II Нахождение расстояний

### а) Расстояние от точки до пл-ти



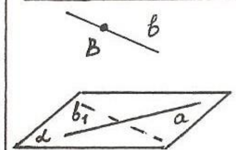

$M_0(x_0;y_0;z_0)$

$ax+by+cz+d=0$ - ур-ние пл-ти

$\rho(M_0;\alpha) = M_0H = \dfrac{|x_0\cdot a+y_0\cdot b+z_0 c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

расстояние от $M_0$ до $\alpha$

### б) Расстояние между скрещивающимися прямыми



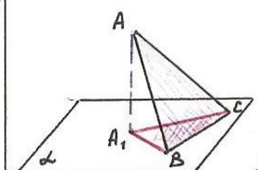

а,в - скрещив. прямые

$\left.\begin{matrix} b_1 \parallel b; \\ b_1 \cap a \end{matrix}\right\}$ проведем $\alpha$ через $a$ и $b_1$

тогда $b\parallel\alpha$ и выберем т$B\in b$

$\rho(a;b) = \rho(b;\alpha) = \rho(B;\alpha) = \ldots$ (п.а)

## III Нахождение площади сечения




$A_1$ - проекция т А на $\alpha$ ($AA_1\perp\alpha$)

$\triangle A_1BC$ - проекция $\triangle ABC$ на $\alpha$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1BC}} = \cos(\widehat{(ABC);(A_1BC)})$

### Пример составления уравнения плоскости, содержащей т. A,B,C

$A(1;0;0)$; $B(1;1;1)$; $C(0;0;1)$

$ax+by+cz+d=0$ - ур-ние пл-ти

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix}\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0. \end{cases} \begin{cases} a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=d \\ c=-d \end{cases}$$

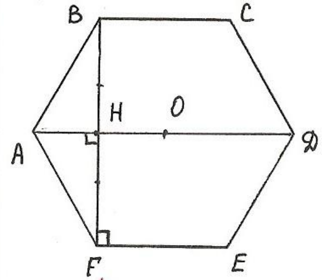
Подставим в ур-ние пл-ти:

$-dx+dy-dz+d=0 \quad |:(-d)$

$x-y+z-1=0$ - ур-ние пл-ти (ABC)

$\vec{n}\{1;-1;1\}$ - вектор нормали к (ABC)

# Правильные 3, 4, 6-угольные призма, пирамида




$AD = 2a$ – большая диагональ

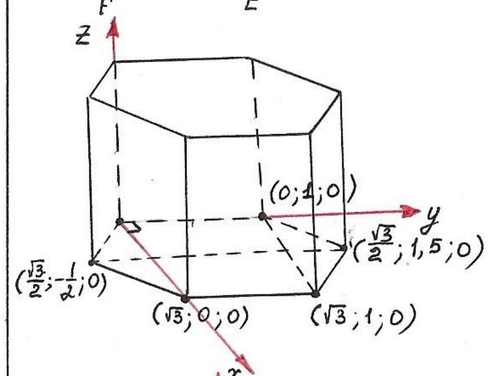
$BF = a\sqrt{3}$ – малая диагональ

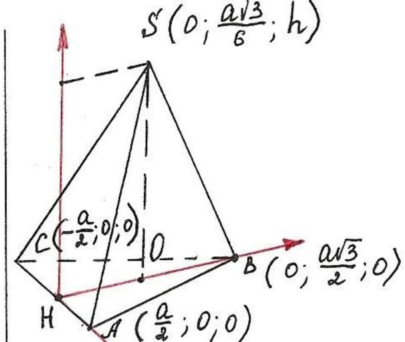
$BF \perp FE$ ; $BF \perp AD$

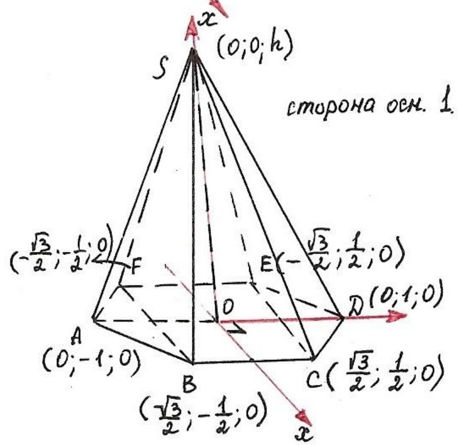
$AD \parallel FE \parallel BC$

$AH = \frac{1}{2}a$ ; $HD = \frac{3}{2}a$

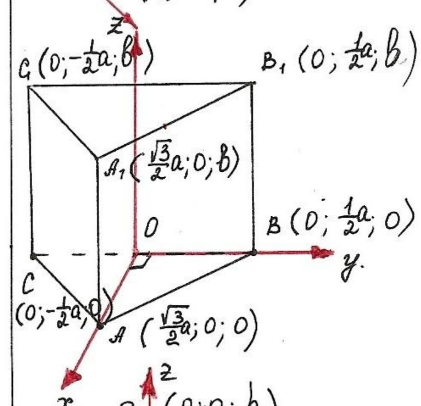
$\angle A = 120^\circ$

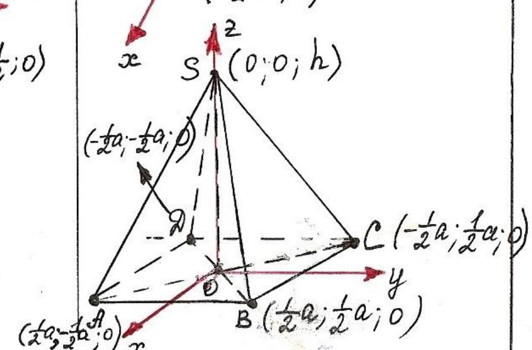


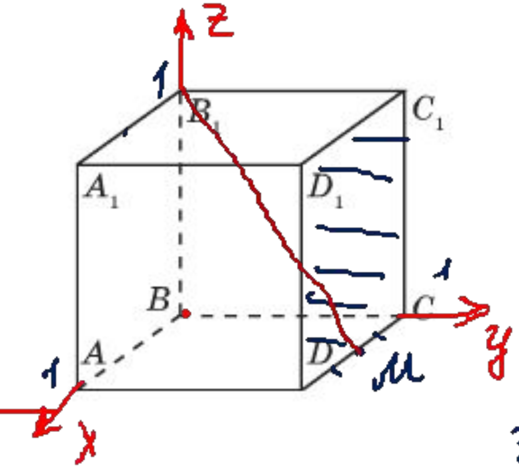




сторона осн. 1.



В единичном кубе A…D найдите угол между прямой $B_1M$ и плоскостью $(DCC_1)$.




1) Поместим куб в прямоуг. сист. коорд, как показано на рисунке

2) $\vec{BC}$ – вектор нормали пл-ти $(DCC_1)$

$B(0;0;0)$, $C(0;1;0)$ $\Big\}$ $\vec{BC}\{0;1;0\}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{0+1+0} = 1$

3) $\vec{B_1M}$ – направл. вект. пр $B_1$

$B_1(0;0;1)$, $M(0,5;1;0)$ $\Big\}$ $\vec{B_1M}\{0,5;1;-1\}$

$|\vec{B_1M}| = \sqrt{0,25+1+1} = 1,5$

4) $\sin(\widehat{B_1M;(DCC_1)}) = |\cos(\vec{B_1M};\vec{BC})| = \dfrac{|\vec{B_1M}\cdot\vec{BC}|}{|\vec{B_1M}|\cdot|\vec{BC}|} =$

$= \dfrac{|0\cdot 0,5 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1)|}{1\cdot 1,5} = \dfrac{1}{1,5} = 1 : \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\angle(B_1M;(DCC_1)) = \arcsin\dfrac{2}{3}$

Ответ: $\arcsin\dfrac{2}{3}$

# Спасибо за внимание!