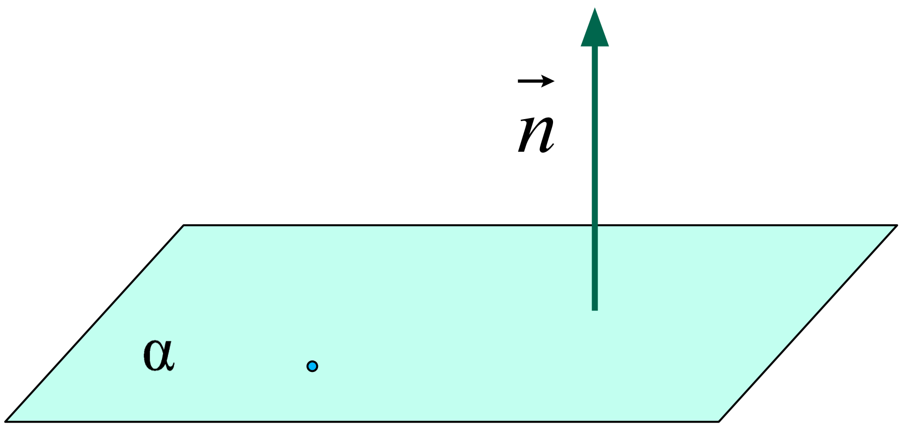
Решение задач по теме «Углы между прямыми и плоскостями (координатный метод)».

Геометрия, 11 класс

Сегодня, 23 октября, пройдёт школьный тур ВОШ по математике. Логины можно взять у Анны Михайловны.

Уравнение плоскости



Ax + By + Cz + D = 0 - уравнение плоскости α,

где A, B, C, D – некоторые числа. (одновр не равны 0)

$\vec{n} \perp \alpha$;

$\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости α;

$\vec{n}\,\{A;B;C\}$ - координаты вектора нормали.

Алгоритм построения уравнения плоскости

1. **Найдем координаты трех точек, принадлежащих плоскости** $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

2. **Подставив координаты найденных точек в уравнение плоскости** $Ax+By+Cz+D=0$, **и решая систему**

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \end{cases}$$

находим коэффициенты A, B, C и D.

Составьте уравнение плоскости и найдите координаты вектора нормали, если плоскость проходит через точки А(1; 0; -2), Р(-3; 1; 0) и К(0; -1; 1).

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$A(1;\ 0;\ -2):\quad A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot(-2) + D = 0$

$P(-3;\ 1;\ 0):\quad A\cdot(-3) + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0$

$K(0;\ -1;\ 1):\quad A\cdot 0 + B\cdot(-1) + C\cdot 1 + D = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 2C + D = 0 \\ -3A + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2C - D \\ -3A + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ -3(2C - D) + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ -6C + 4D + B = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -B + C + D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -(6C - 4D) + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -6C + 4D + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -5C + 5D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ C = D \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 2D - D \\ B = 6D - 4D \\ C = D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = D \\ B = 2D \\ C = D \end{cases}$$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$Dx + 2Dy + Dz + D = 0 \quad | : D \neq 0$

$x + 2y + z + 1 = 0$ – ур-ние пл-ти (APK)

$\vec{n}\{1; 2; 1\}$ – вектор нормали (APK)

$M(3;\ 2;\ -4) \in (APK)$ – ?

$x + 2y + z + 1 = 0$

$3 + 2\cdot 2 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow M \notin (APK)$

$4 \neq 0$

$C(4;\ -1;\ -3) \in (APK)$

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5) и найти координаты вектора нормали.

Решение.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

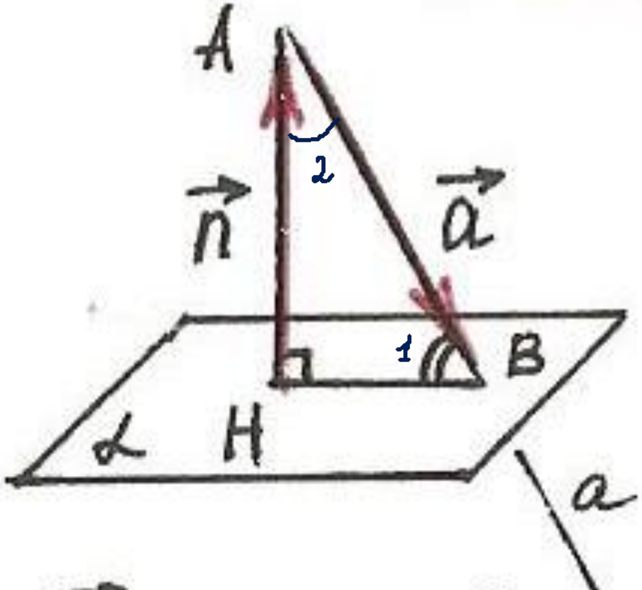
$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

$$\vec{n}\,\{15\ ;10\ ;6\}$$

б) Угол между прямой и плоскостью

$\cos\angle 2 = \cos(90 - \angle 1) = \sin\angle 1$



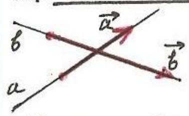
$$\sin(\widehat{a;\alpha}) = |\cos(\vec{a};\vec{n})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$$

$\vec{a}$ - направляющий вектор пр. a

$\vec{n} \perp \alpha$ - вектор нормали

I Нахождение углов

а) Угол между прямыми

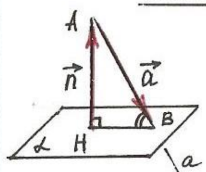


$$\cos\angle(a;b) = |\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$\vec{a}$ - направл. вектор пр. а

$\vec{b}$ - напр. вектор пр. в.

б) Угол между прямой и плоскостью

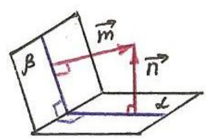


$$\sin(\widehat{a;\alpha}) = |\cos(\vec{a};\vec{n})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}$$

$\vec{a}$ - направляющий вектор пр а

$\vec{n}\perp\alpha$ - вектор нормали

в) Угол между плоскостями



$$\cos(\widehat{\alpha;\beta}) = |\cos(\widehat{\vec{m};\vec{n}})| = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$$

$\vec{m}$ - вектор нормали к β ($\vec{m}\perp\beta$)

$\vec{n}$ - вектор нормали к α ($\vec{n}\perp\alpha$)

Уравнение плоскости

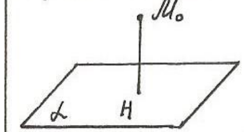
$ax+by+cz+d=0$ - уравнение плоскости

$(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

$\vec{n}\{a;b;c\}$ - вектор нормали данной пл-ти

II Нахождение расстояний

а) Расстояние от точки до пл-ти



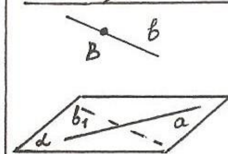
$M_0(x_0;y_0;z_0)$

$ax+by+cz+d=0$ - ур-ние пл-ти

$$\rho(M_0;\alpha) = M_0H = \frac{|x_0\cdot a + y_0\cdot b + z_0 c + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

расстояние от M_0 до α

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми



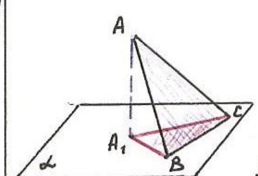
а, в - скрещив. прямые

$b_1 \parallel b$; $b_1 \cap a$ } проведем α через a и b_1

тогда $b \parallel \alpha$ и выберем т $B\in b$

$\rho(a;b) = \rho(b;\alpha) = \rho(B;\alpha) = \ldots$ (п.а)

III Нахождение площади сечения



A_1 - проекция т A на α ($AA_1\perp\alpha$)

$\triangle A_1BC$ - проекция $\triangle ABC$ на α

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BC}} = \cos(\widehat{(ABC);(A_1BC)})$$

Пример составления уравнения плоскости, содержащей т. A, B, C

$A(1;0;0)$; $B(1;1;1)$; $C(0;0;1)$

$ax+by+cz+d=0$ - ур-ние пл-ти

$$\begin{aligned} A&: \\ B&: \\ C&: \end{aligned}\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0. \end{cases} \quad \begin{cases} a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=d \\ c=-d \end{cases}$$

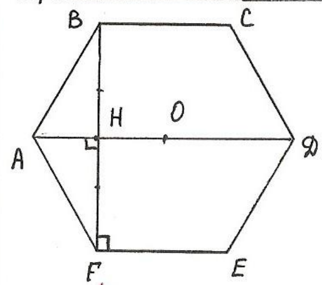
Подставим в ур-ние пл-ти:

$-dx+dy-dz+d=0 \quad |:(-d)$

$x-y+z-1=0$ - ур-ние пл-ти (ABC)

$\vec{n}\{1;-1;1\}$ - вектор нормали к (ABC)

Правильные 3, 4, 6-угольные призма, пирамида



$AD = 2a$ – большая диагональ

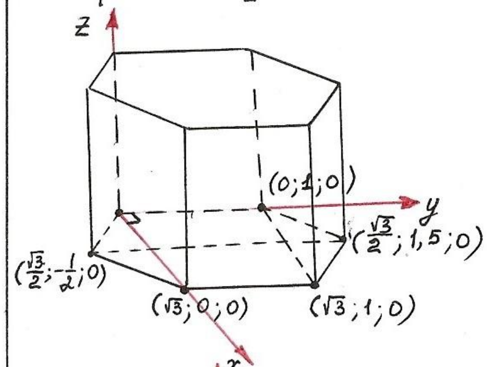
$BF = a\sqrt{3}$ – малая диагональ

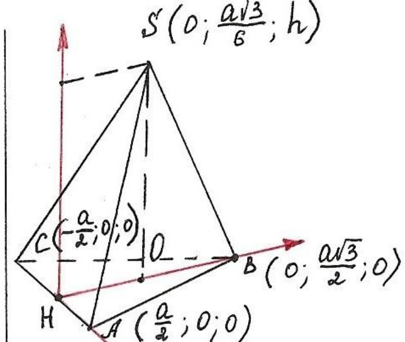
$BF \perp FE$; $BF \perp AD$

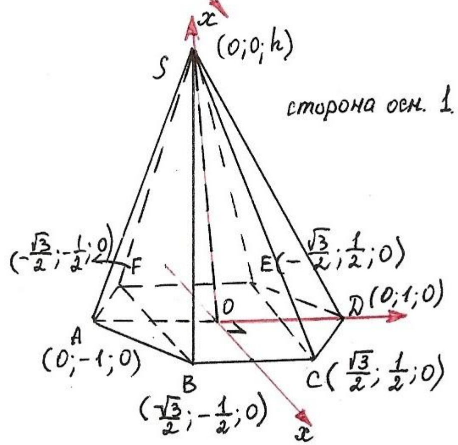
$AD \parallel FE \parallel BC$

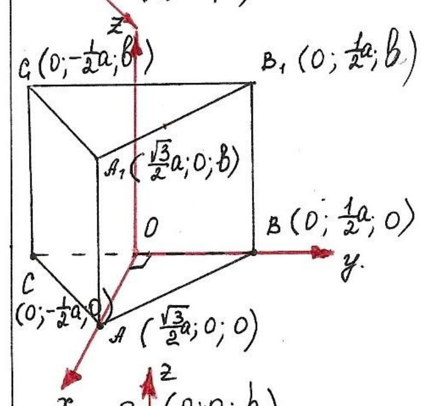
$AH = \frac{1}{2}a$; $HD = \frac{3}{2}a$

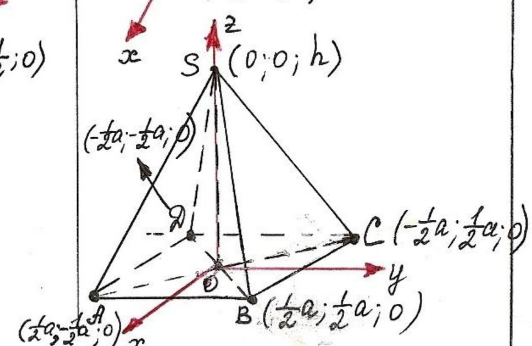
$\angle A = 120°$



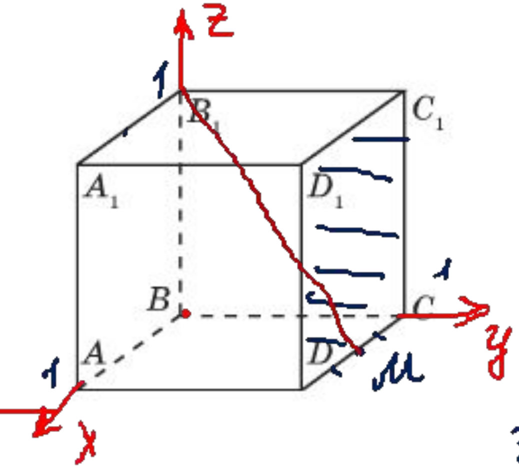








В единичном кубе A…D найдите угол между прямой B_1M и плоскостью (DCC_1).



1) Поместим куб в прямоуг. сист. коорд, как показано на рисунке

2) $\vec{BC}$ – вектор нормали пл-ти (DCC_1)

$\left.\begin{array}{l} B(0;0;0) \\ C(0;1;0) \end{array}\right\}$ $\vec{BC}\{0;1;0\}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{0+1+0} = 1$

3) $\vec{B_1M}$ – направл. вект. пр B_1

$\left.\begin{array}{l} B_1(0;0;1) \\ M(0,5;1;0) \end{array}\right\}$ $\vec{B_1M}\{0,5;1;-1\}$

$|\vec{B_1M}| = \sqrt{0,25+1+1} = 1,5$

4) $\sin(B_1M \widehat{;} (DCC_1)) = |\cos(\vec{B_1M}; \vec{BC})| = \dfrac{|\vec{B_1M} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{B_1M}| \cdot |\vec{BC}|} =$

$= \dfrac{|0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{1 \cdot 1,5} = \dfrac{1}{1,5} = 1 : \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\angle(B_1M; (DCC_1)) = \arcsin\dfrac{2}{3}$

Ответ: $\arcsin\dfrac{2}{3}$

Спасибо за внимание!