

Решение задач по теме «Углы между прямыми и плоскостями (координатный метод)».

Геометрия, 11 класс

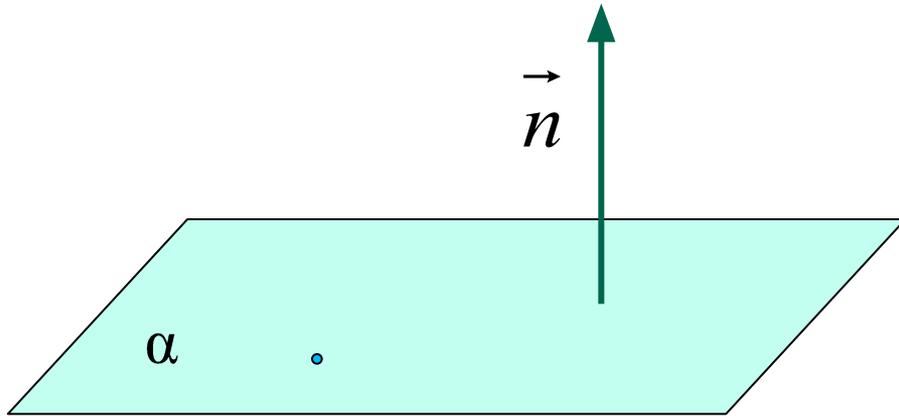




Сегодня, 23 октября, пройдёт
школьный тур ВОШ по
математике. Логины можно взять
у Анны Михайловны.



Уравнение плоскости



$Ax + By + Cz + D = 0$ - уравнение плоскости α ,

где A, B, C, D – некоторые числа. (одни из них не равны 0)

$\vec{n} \perp \alpha$;

\vec{n} - вектор нормали к плоскости α ;

$\vec{n} \{A; B; C\}$ - координаты вектора нормали.

Алгоритм построения уравнения плоскости

1. Найдем координаты трех точек, принадлежащих плоскости $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.
2. Подставив координаты найденных точек в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, и решая систему

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \end{cases}$$

находим коэффициенты A, B, C и D .



Составьте уравнение плоскости и найдите координаты вектора нормали, если плоскость проходит через точки $A(1; 0; -2)$, $P(-3; 1; 0)$ и $K(0; -1; 1)$.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} : A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot (-2) + D = 0$$

$$P(-3; 1; 0) : A \cdot (-3) + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$K(0; -1; 1) : A \cdot 0 + B \cdot (-1) + C \cdot 1 + D = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 2C + D = 0 \\ -3A + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2C - D \\ -3A + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ -3(2C - D) + B + D = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ -6C + 4D + B = 0 \\ -B + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -B + C + D = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -(6C - 4D) + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -6C + 4D + C + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ -5C + 5D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2C - D \\ B = 6C - 4D \\ C = D \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 2D - D \\ B = 6D - 4D \\ C = D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = D \\ B = 2D \\ C = D \end{cases}$$

$$M(3; 2; -4) \in (APK) - ?$$

$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$$3 + 2 \cdot 2 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow M \notin (APK)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Dx + 2Dy + Dz + D = 0 \quad | : D \neq 0$$

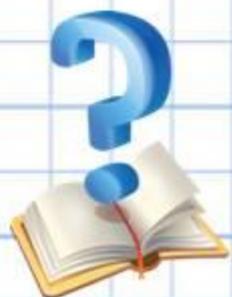
$$x + 2y + z + 1 = 0 - \text{ур-ние}$$

пл-сти (APK)

$\vec{n} \{1; 2; 1\}$ - вектор нормали (APK)

$$C(4; -1; -3) \in (APK)$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;3;5)$, $B(4;-3;0)$, $C(0;6;-5)$ и найти координаты вектора нормали.



Решение.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

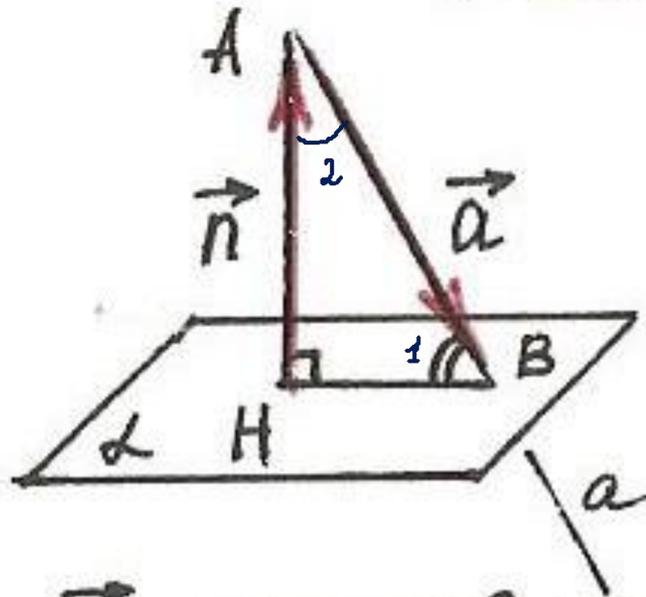
$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

$$\vec{n} \{ 15 \ ; 10 \ ; 6 \}$$

б) Угол между прямой и
плоскостью

$$\cos \angle 2 = \cos (90 - \angle 1) = \sin \angle 1$$



$$\begin{aligned} \sin(\hat{a}; \alpha) &= |\cos(\vec{a}; \vec{n})| = \\ &= \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \end{aligned}$$

\vec{a} - направляющий вектор пр. a
 $\vec{n} \perp \alpha$ - вектор нормали

I Нахождение углов

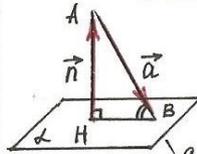
а) Угол между прямыми



$$\cos(\alpha; \beta) = |\cos(\vec{a}; \vec{b})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

\vec{a} - направл. вектор пр. a
 \vec{b} - напр. вектор пр. b

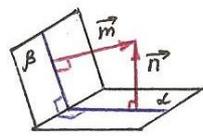
б) Угол между прямой и плоскостью



$$\sin(\alpha; \Delta) = |\cos(\vec{a}; \vec{n})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

\vec{a} - направляющий вектор пр. a
 $\vec{n} \perp \Delta$ - вектор нормали

в) Угол между плоскостями



$$\cos(\alpha; \beta) = |\cos(\vec{m}; \vec{n})| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$

\vec{m} - вектор нормали к β ($\vec{m} \perp \beta$)
 \vec{n} - вектор нормали к Δ ($\vec{n} \perp \Delta$)

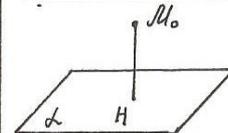
Уравнение плоскости

$ax + by + cz + d = 0$ - уравнение плоскости
 ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

$\vec{n} \{a; b; c\}$ - вектор нормали данной пл-ти

II Нахождение расстояний

а) Расстояние от точки до пл-ти

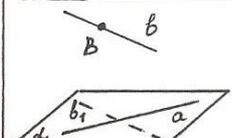


$M_0(x_0; y_0; z_0)$
 $ax + by + cz + d = 0$ - уравнение пл-ти

$$\rho(M_0; \Delta) = M_0N = \frac{|x_0 \cdot a + y_0 \cdot b + z_0 \cdot c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

расстояние от M_0 до Δ

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми

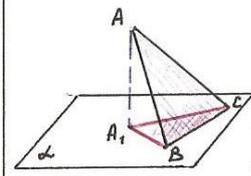


a, b - скрещив. прямые
 $b_1 \parallel b, \} \text{ проведем } \Delta$
 $b_1 \perp a, \} \text{ через } a \text{ и } b_1$

тогда $b \parallel \Delta$ и выберем $T \in b$

$$\rho(a; b) = \rho(b; \Delta) = \rho(T; \Delta) = \dots \text{ (п.а.)}$$

III Нахождение площади сечения



A_1 - проекция τA на Δ ($AA_1 \perp \Delta$)
 $\Delta A_1B_1C_1$ - проекция ΔABC на Δ

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \cos(\angle ABC; \angle A_1B_1C_1)$$

Пример составления уравнения плоскости, содержащей т. А, В, С

$A(1; 0; 0); B(1; 1; 1); C(0; 0; 1)$

$ax + by + cz + d = 0$ - уравнение пл-ти

$A: a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow a + d = 0$

$B: a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$

$C: a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow c + d = 0$

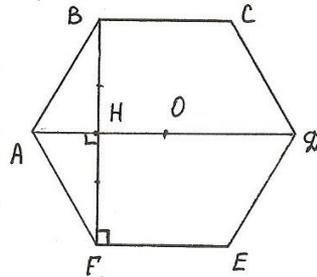
Подставим в уравнение пл-ти:

$-dx + dy - dz + d = 0 \quad | :(-d)$

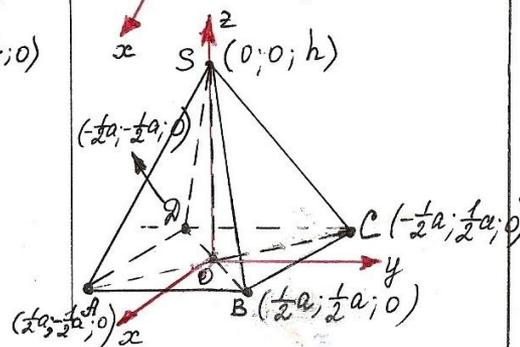
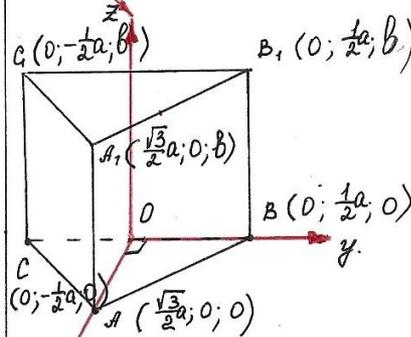
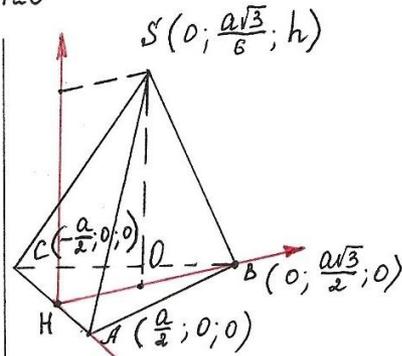
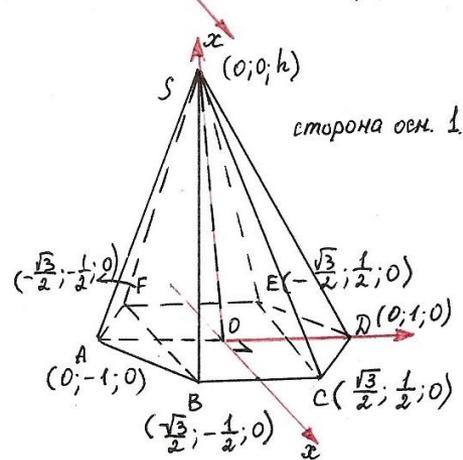
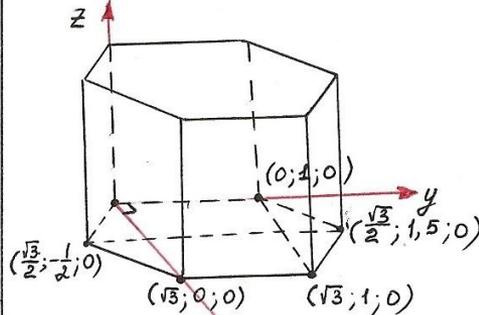
$x - y + z - 1 = 0$ - уравнение пл-ти (ABC)

$\vec{n} \{1; -1; 1\}$ - вектор нормали к (ABC)

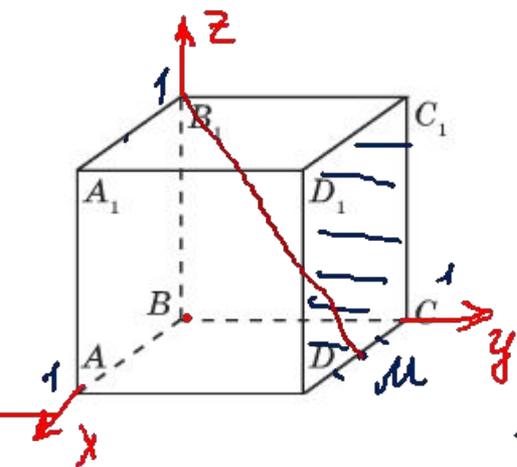
Правильные 3, 4, 6-угольные призма, пирамида



$AD = 2a$ - большая диагональ
 $BF = a\sqrt{3}$ - малая диагональ
 $BF \perp FE$; $BF \perp AD$
 $AD \parallel FE \parallel BC$
 $AH = \frac{1}{2}a$; $HD = \frac{3}{2}a$
 $\angle A = 120^\circ$



В единичном кубе $A...D$ найдите угол между прямой B_1M и плоскостью (DCC_1) .



1) Поместили куб в прямоуг. сист. коорд, как показано на рисунке

2) \vec{BC} - вектор нормали пл. π -ти (DCC_1)

$$\begin{array}{l} B(0; 0; 0) \\ C(0; 1; 0) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} B \\ C \end{array}} \right\} \vec{BC} \{0; 1; 0\} \\ |\vec{BC}| = \sqrt{0+1+0} = 1$$

3) $\vec{B_1M}$ - направл. вект. пр B_1

$$\begin{array}{l} B_1(0; 0; 1) \\ M(0,5; 1; 0) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} B_1 \\ M \end{array}} \right\} \vec{B_1M} \{0,5; 1; -1\} \\ |\vec{B_1M}| = \sqrt{0,25 + 1 + 1} = 1,5$$

$$\begin{aligned} 4) \sin(\widehat{B_1M; (DCC_1)}) &= |\cos(\vec{B_1M}; \vec{BC})| = \frac{|\vec{B_1M} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{B_1M}| \cdot |\vec{BC}|} = \\ &= \frac{|0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{1 \cdot 1,5} = \frac{1}{1,5} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\angle(\vec{B_1M}; (DCC_1)) = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{2}{3}$$

Спасибо за внимание!

