Тема урока:

Тригонометрические уравнения. Арксинус.

Что такое арксинус?

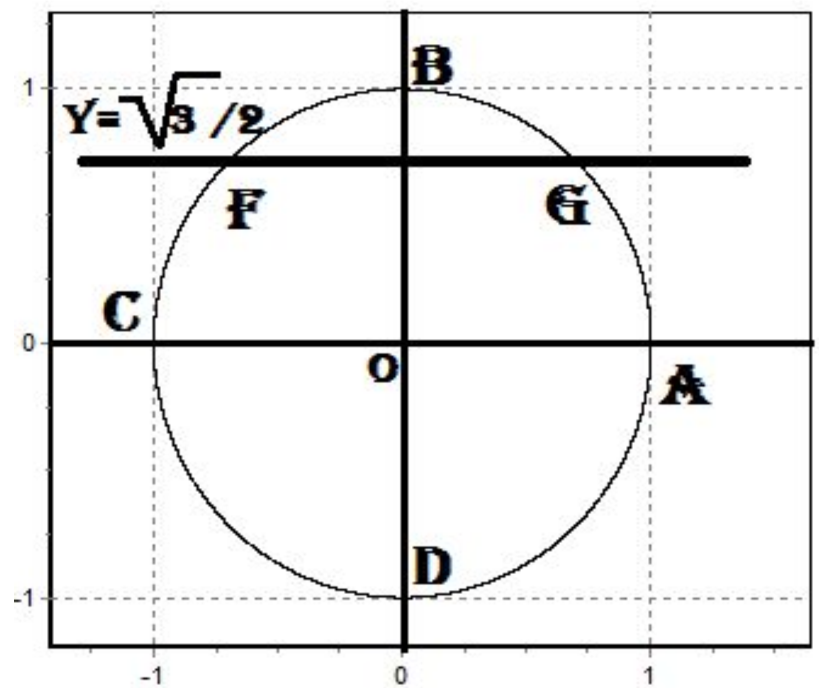
Рассмотрим sin(x)= √3/2.

Для решения нашего уравнения требуется построить прямую y= √3/2 и посмотреть в каких точках она пересекает числовую окружность.

Видно что прямая пересекает окружность в двух точках F и G, эти точки и будут решениями уравнения, переобозначим F как x1, а G как x2. Решение нашего уравнения мы находили и получили

x1 = π/3 + 2πk, а x2= 2π/3+2πk.

Решить данное уравнение довольно таки просто, но как решить например уравнение sin(x)=5/6. Очевидно что это уравнение будет иметь так же два корня, но какие значения будут соответствовать решению на числовой окружности?



Обозначение арксинуса

Давайте внимательно посмотрим на наше уравнение sin(x)=5/6

Решениями нашего уравнения будут две точки F= x1+2πk и G=x2+2πk.

x1 – длина дуги AF, x2 – длина дуги AG.

Заметим: x2= π-x1, т.к. AF=AC-FC, но FC=AG, AF=AC-AG= π-x1

Но, что это за точки?

Столкнувшись с подобной ситуацией, математики придумали новый символ – arcsin(x). Читается как арксинус.

Тогда решения нашего уравнения запишутся как:

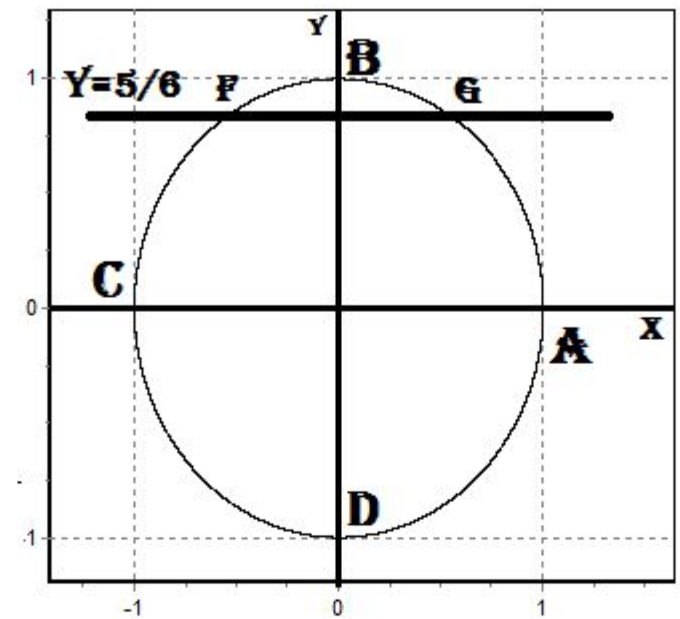
x1=arcsin (5/6)

x2= π -arcsin (5/6)

Тогда решение в общем виде:

X = arcsin (5/6) +2πk и x = π - arcsin (5/6) +2πk

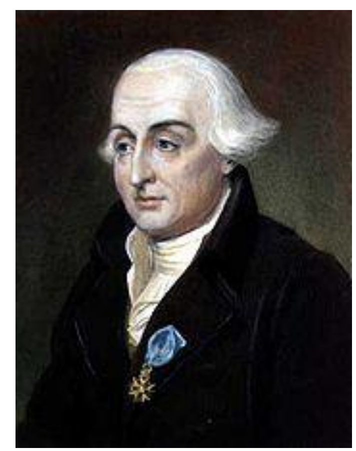
Арксинус это угол(длина дуги AF, AG) синус которого равен 5/6



Немного истории.

История происхождения нашего символа совершенно такая же как и у arccos:
Символ arcsin появляется впервые в работах математика Шерфера и известного французского ученого Ж.Л. Лагранжа, несколько ранее понятие арксинус уже рассматривал Д. Бернули, правда записывал другими символами.
Общепринятыми эти символы стали лишь в конце XVIII столетия. Приставка «arc» происходит от латинского «arcus» (лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: arcsin x, например, - это угол (а можно сказать и дуга), синус которого равен x.

Жозе́ф Луи́ Лагра́нж



Определение.

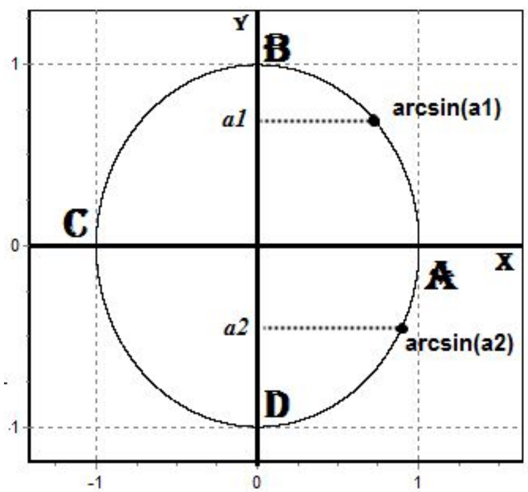
***Определение.* Если |a|≤ 1, то arcsin(a) – это такое число из отрезка [- π/2; π/2], синус которого равен a.**

если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Если |a|≤ 1, то уравнение sin(x) = a имеет решение:

x= arcsin(a) + 2πk и x= π -arcsin(a) + 2πk



Перепишем:

x= π -arcsin(a) + 2πk= -arcsin(a) + π(1+2k)

Ребята, посмотрите внимательно на два наших решения, как думаете можно ли их записать общей формулой?

Заметим, если перед арксинусом стоит знак “плюс”, то π умножается на четное число 2πk, а если знак “минус”, то множитель нечетный 2k+1. Тогда запишем общую формула решения для уравнения sin(x)=a

$$x = (-1)^n \arcsin(a) + \pi n$$

Определение.

Есть три случая в которых предпочитают записывать более простым способом решения:

$$\sin(x)=0,\ \text{то}\ x=\pi k$$

$$\sin(x)=1,\ \text{то}\ x=\pi/2+2\pi k$$

$$\sin(x)=-1,\ \text{то}\ x=-\pi/2+2\pi k$$

Для любого $-1 \le a \le 1$ ***выполняется равенство***

$$\arcsin(-a)=-\arcsin(a)$$

Таблица значений арксинуса.

Таблица значений синуса:

T	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SIN(T)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Таблица значений арксинуса:

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Пример

Вычислить а) arcsin(√3/2) б) arcsin(-1/2) в) arcsin(0)

Решение:

а) ***Пусть arcsin(√3/2)= x, тогда sin(x)= √3/2 и по определению - π/2≤ x≤ π/2, посмотрим значения синуса в таблице:***
x=π/3, т.к. sin(π/3)= √3/2 и –π/2 ≤ π/3 ≤ π/2
Ответ: arcsin(√3/2)=π/3

б) ***Пусть arcsin(-1/2) = x, тогда sin (x)= -1/2 и по определению - π/2≤ x≤ π/2, посмотрим значения синуса в таблице:***
x=-π/6, т.к. sin(-π/6)= -1/2 и - π/2≤ -π/6≤ π/2
Ответ: arcsin(-1/2)=-π/6

в) ***Пусть arcsin(0) = x, тогда sin(x)= 0и по определению - π/2≤ x≤ π/2, посмотрим значения синуса в таблице:***
значит x=0, т.к. sin(0)= 0 и - π/2≤ 0 ≤ π/2
Ответ: arcsin(0)=0

Пример

Решить уравнение: а) sin(x) = -√2/2   б) sin(x) = 0

Решение:

а) Воспользуемся определением, тогда решение запишется в виде:
x= arcsin(-√2/2) + 2πk и x= π - arcsin(-√2/2) + 2πk

Посмотрим в таблице значение: arcsin (-√2/2)= -π/4

Ответ: x= -π/4 + 2πk и x= 5π/4 + 2πk

б) Воспользуемся определением, тогда решение запишется в виде:
x= arcsin(0) + 2πk и x= π - arcsin(0) + 2πk

Посмотрим в таблице значение: arcsin(0)= 0

$x = (-1)^n \arcsin(3/5) + \pi n$

Ответ: x= 2πk и x= π + 2πk