

**Тема урока:**

**Тригонометрические  
уравнения.  
Арксинус.**

# Что такое арксинус?

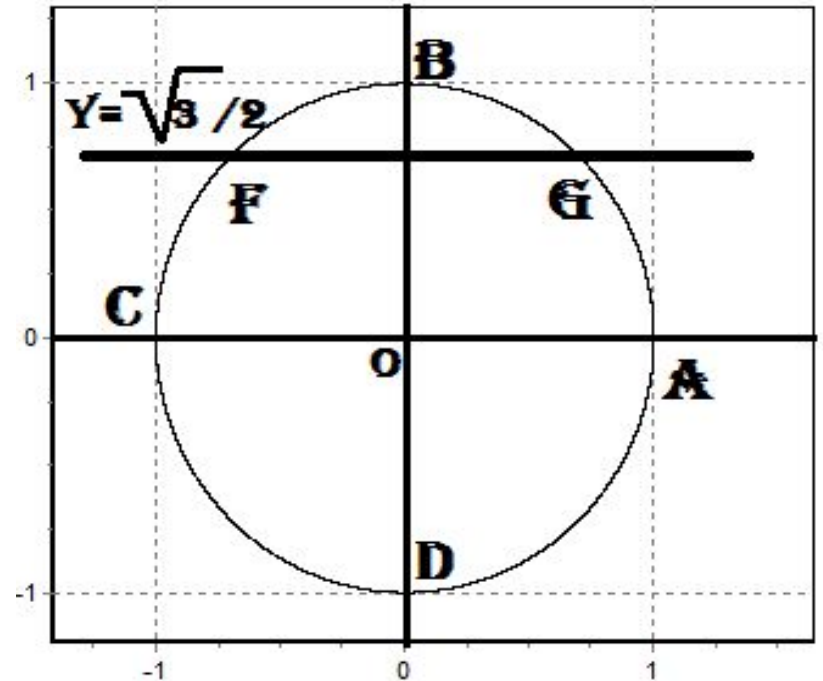
*Рассмотрим  $\sin(x) = \sqrt{3}/2$ .*

*Для решения нашего уравнения требуется построить прямую  $y = \sqrt{3}/2$  и посмотреть в каких точках она пересекает числовую окружность.*

*Видно что прямая пересекает окружность в двух точках F и G, эти точки и будут решениями уравнения, переобозначим F как  $x_1$ , а G как  $x_2$ . Решение нашего уравнения мы находили и получили*

$$x_1 = \pi/3 + 2\pi k, \text{ а } x_2 = 2\pi/3 + 2\pi k.$$

*Решить данное уравнение довольно таки просто, но как решить например уравнение  $\sin(x) = 5/6$ . Очевидно что это уравнение будет иметь так же два корня, но какие значения будут соответствовать решению на числовой окружности?*



# Обозначение арксинуса

Давайте внимательно посмотрим на наше уравнение  $\sin(x)=5/6$

Решениями нашего уравнения будут две точки  $F=x_1+2\pi k$  и  $G=x_2+2\pi k$ .

$x_1$  – длина дуги  $AF$ ,  $x_2$  – длина дуги  $AG$ .

Заметим:  $x_2=\pi-x_1$ , т.к.  $AF=AC-FC$ , но  $FC=AG$ ,  
 $AF=AC-AG=\pi-x_1$

Но, что это за точки?

Столкнувшись с подобной ситуацией, математики придумали новый символ –  **$\arcsin(x)$** . Читается как **арксинус**.

Тогда решения нашего уравнения запишутся как:

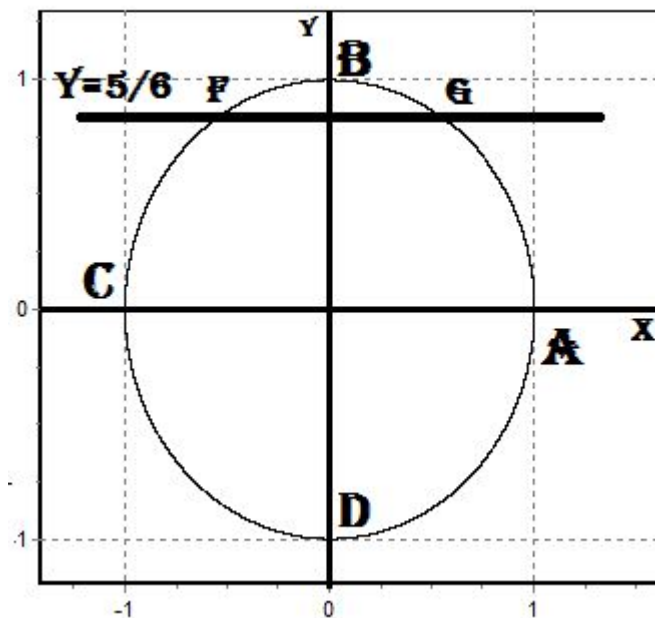
$$x_1=\arcsin(5/6)$$

$$x_2=\pi-\arcsin(5/6)$$

Тогда решение в общем виде:

$$X = \arcsin(5/6) + 2\pi k \text{ и } x = \pi - \arcsin(5/6) + 2\pi k$$

**Арксинус это угол(длина дуги  $AF$ ,  $AG$ ) синус которого равен  $5/6$**



# *Немного истории.*

*История происхождения нашего символа совершенно такая же как и у  $\arccos$ : Символ  $\arcsin$  появляется впервые в работах математика Шерфера и известного французского ученого Ж.Л. Лагранжа, несколько ранее понятие арксинус уже рассматривал Д. Бернули, правда записывал другими символами. Общепринятыми эти символы стали лишь в конце XVIII столетия. Приставка «arc» происходит от латинского «arcus» (лук, дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия:  $\arcsin x$ , например, - это угол (а можно сказать и дуга), синус которого равен  $x$ .*

*Жозе́ф Луи Лагранже́*



# Определение.

**Определение.** Если  $|a| \leq 1$ , то  $\arcsin(a)$  – это такое число из отрезка  $[-\pi/2; \pi/2]$ , синус которого равен  $a$ .

$$\text{если } |a| < 1, \text{ то}$$
$$\arcsin a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Если  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\sin(x) = a$  имеет решение:

$$x = \arcsin(a) + 2\pi k \text{ и } x = \pi - \arcsin(a) + 2\pi k$$

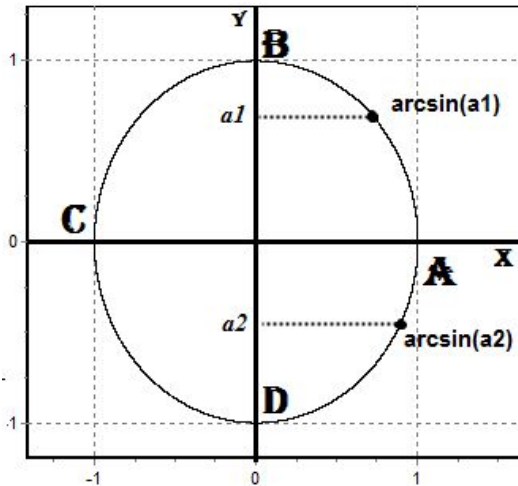
Перепишем:

$$x = \pi - \arcsin(a) + 2\pi k = -\arcsin(a) + \pi(1+2k)$$

Ребята, посмотрите внимательно на два наших решения, как думаете можно ли их записать общей формулой?

Заметим, если перед арксинусом стоит знак “плюс”, то  $\pi$  умножается на четное число  $2\pi k$ , а если знак “минус”, то множитель нечетный  $2k+1$ . Тогда запишем общую формулу решения для уравнения  $\sin(x)=a$

$$x = (-1)^n \arcsin(a) + \pi n$$



# Определение.

*Есть три случая в которых предпочитают записывать более простым способом решения:*

$$\sin(x)=0, \text{ то } x=\pi k$$

$$\sin(x)=1, \text{ то } x=\pi/2 + 2\pi k$$

$$\sin(x)=-1, \text{ то } x=-\pi/2 + 2\pi k$$

*Для любого  $-1 \leq a \leq 1$  выполняется равенство*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin(a)$$

# Таблица значений арксинуса.

*Таблица значений синуса:*

<b>T</b>	<b>0°</b>	<b>30°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>	<b>90°</b>	<b>180°</b>	<b>270°</b>	<b>360°</b>
	<b>0</b>	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
<b>SIN(T)</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>

*Таблица значений арксинуса:*

<i>a</i>	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin <i>a</i>	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

# Пример

Вычислить а)  $\arcsin(\sqrt{3}/2)$  б)  $\arcsin(-1/2)$  в)  $\arcsin(0)$

*Решение:*

а) Пусть  $\arcsin(\sqrt{3}/2) = x$ , тогда  $\sin(x) = \sqrt{3}/2$  и по определению  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , посмотрим значения синуса в таблице:

$x = \pi/3$ , т.к.  $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$  и  $-\pi/2 \leq \pi/3 \leq \pi/2$

Ответ:  $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$

б) Пусть  $\arcsin(-1/2) = x$ , тогда  $\sin(x) = -1/2$  и по определению  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , посмотрим значения синуса в таблице:

$x = -\pi/6$ , т.к.  $\sin(-\pi/6) = -1/2$  и  $-\pi/2 \leq -\pi/6 \leq \pi/2$

Ответ:  $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$

в) Пусть  $\arcsin(0) = x$ , тогда  $\sin(x) = 0$  и по определению  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , посмотрим значения синуса в таблице:

значит  $x = 0$ , т.к.  $\sin(0) = 0$  и  $-\pi/2 \leq 0 \leq \pi/2$

Ответ:  $\arcsin(0) = 0$



# Пример

Решить уравнение: а)  $\sin(x) = -\sqrt{2}/2$  б)  $\sin(x) = 0$

*Решение:*

а) Воспользуемся определением, тогда решение запишется в виде:  
 $x = \arcsin(-\sqrt{2}/2) + 2\pi k$  и  $x = \pi - \arcsin(-\sqrt{2}/2) + 2\pi k$

Посмотрим в таблице значение:  $\arcsin(-\sqrt{2}/2) = -\pi/4$

Ответ:  $x = -\pi/4 + 2\pi k$  и  $x = 5\pi/4 + 2\pi k$

б) Воспользуемся определением, тогда решение запишется в виде:  
 $x = \arcsin(0) + 2\pi k$  и  $x = \pi - \arcsin(0) + 2\pi k$

Посмотрим в таблице значение:  $\arcsin(0) = 0$

Ответ:  $x = 2\pi k$  и  $x = \pi + 2\pi k$