

!Здравствуйте

Лекция №19

Ряд Тейлора функции многих переменных

Опять-таки, для простоты вывода, рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$ и получим для нее ряд Тейлора относительно точки (x_0, y_0) .

Напомним, что разложение в ряд Тейлора функции $f(x)$ одной переменной имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

А теперь рассмотрим $f(x, y)$ и **зафиксируем аргумент y** . Тогда разложение $f(x, y)$ около точки x_0 будет иметь вид

$$f(x, y) = f(x_0, y) + \frac{f'_x(x_0, y)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''_{xx}(x_0, y)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (1)$$

А теперь, когда в правой части x_0 фиксировано, разложим оставшиеся функции в ряд Тейлора по y относительно точки y_0 :

$$f(x_0, y) = f(x_0, y_0) + \frac{f'_y(x_0, y_0)}{1!}(y - y_0) + \frac{f''_{yy}(x_0, y_0)}{2!}(y - y_0)^2 + \dots,$$

$$f'_x(x_0, y) = f'_x(x_0, y_0) + \frac{f''_{xy}(x_0, y_0)}{1!}(y - y_0) + \dots,$$

$$f''_{xx}(x_0, y) = f''_{xx}(x_0, y_0) + \dots$$

Подставим все это в (1) и соберем слагаемые с одинаковыми степенями $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$. Тогда получим

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

В общем случае функции $f(x)$ от n переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(0)}) + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^{(0)})(x_j - x_j^{(0)}) + \dots$$

Безусловный экстремум функции многих переменных

Рассмотрим вопрос о нахождении экстремума функции $f(x)$ от n переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение. Говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум), если существует такой шар $R(x_0, \delta)$ с центром в точке x_0 и радиуса $\delta > 0$, что

$$\forall x \in R(x_0, \delta) \quad x \neq x_0 \quad f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Термины «локальный максимум» и «локальный минимум» объединяют в один термин «локальный экстремум»

Необходимое условие экстремума.

Пусть в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ функция $f(x)$ имеет, скажем, локальный максимум. Будем отходить от точки x_0 меняя лишь координату x_1 . Тогда

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) < f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

то есть $f(x)$ имеет локальный максимум по координате x_1 . Но тогда, как это изучалось для функции одной переменной, в точке x_0 должно выполняться условие

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0.$$

Аналогично можно рассуждать и в отношении всех остальных переменных. Рассматривая переменную x_i , запишем

$$f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) < f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0),$$

откуда следует, что $f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$

Таким образом, в точке локального экстремума должно выполняться условие

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} = 0; \dots; \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} = 0. \quad (2)$$

Эти условия дают систему n уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n . Решая ее, найдем точки, «подозрительные» на экстремум, то есть точки, где **может быть** локальный максимум или минимум.

Заметим, что необходимые условия локального экстремума (2) можно коротко записать так: в точке локального экстремума должно выполняться условие

$$\text{grad } f(x_0) = 0.$$

Достаточные условия локального экстремума.

Пусть выполнены условия (2). Во-первых, это еще не означает, что в точке x_0 имеет место локальный экстремум. Во-вторых, даже если там и имеется локальный экстремум, то надо установить его тип – максимум это или минимум. Ответить на этот вопрос помогают достаточные условия экстремума.

Для их вывода напомним сначала некоторые сведения из курса алгебры по вопросу о положительной и отрицательной определенности матрицы.

Пусть имеется симметричная квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$, в которой n строк и n столбцов. Пусть, далее, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ есть произвольные числа. Тогда выражение

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$$

называется квадратичной формой, соответствующей матрице A .

Матрица A называется **положительно определенной** матрицей, если $Q > 0$ когда хотя бы одно из чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ отлично от нуля и $Q = 0$ может быть тогда и только тогда, когда все $\xi_i = 0$. Если при тех же условиях $Q < 0$, то матрица A называется **отрицательно определенной**. Если $\exists \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такие, что $Q > 0$ и $\exists \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n$ такие, что $Q < 0$, то матрица A называется **неопределенной**.

Для определения типа матрицы A существует так называемый критерий Сильвестра. Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxtimes & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxtimes & a_{3n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \boxtimes & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим ее миноры

$$A_1 = a_{11}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxtimes & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxtimes & a_{3n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \boxtimes & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Если выполнено условие

$$A_1 > 0; \quad A_2 > 0; \quad A_3 > 0; \quad \dots; \quad A_n > 0,$$

то матрица A положительно определенная. Если выполнено условие

$$A_1 < 0; \quad A_2 > 0; \quad A_3 < 0; \quad \dots,$$

то есть все нечетные миноры меньше нуля, а все четные – больше нуля, то матрица A отрицательно определенная. Во всех остальных случаях расстановки знаков $>$ и $<$ матрица A неопределенная.

Конкретизируем теперь вид матрицы A . Пусть элементы матрицы A имеют вид

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3)$$

где все производные вычисляются в точке x_0 предполагаемого экстремума.

Теорема. Если матрица A положительно определенная, то в точке x_0 локальный минимум.

Если матрица A отрицательно определенная, то в точке x_0 локальный максимум.

Если матрица A неопределенная, то в точке x_0 нет ни локального максимума, ни локального минимума.

Доказательство. Мы докажем эту теорему не слишком строго.

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Обозначая $x_i - x_i^0 = \Delta x_i$ и вспоминая, что в точке x_0 имеет место $f'_{x_i}(x_0) = 0$, получим

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \dots,$$

где a_{ij} определены в (3).

Пусть теперь матрица $A = \|a_{ij}\|$ положительно определенная.

Тогда $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j > 0$, когда хотя бы одно из $\Delta x_i \neq 0$. Но тогда, по

крайней мере в некоторой окрестности точки x_0 , будет выполнено условие $f(x) > f(x_0)$ и в точке x_0 будет локальный минимум.

Если же матрица A отрицательно определенная, то

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j < 0$, и, по крайней мере в некоторой окрестности точки x_0

будет выполнено условие $f(x) < f(x_0)$ и в точке x_0 будет локальный максимум.

Если же матрица A неопределенная, то $\exists \Delta x_i$ такие, что

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j > 0$, и тогда $f(x) > f(x_0)$, но и $\exists \Delta x_i$ такие, что

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j < 0$, и тогда $f(x) < f(x_0)$. Поэтому в данном случае в

точке x_0 нет ни максимума, ни минимума.

В заключение еще раз отметим, что мы пренебрегли следующим членом в разложении $f(x)$ в ряд Тейлора. Поэтому все эти рассуждения верны лишь в некоторой окрестности точки x_0 и наши возможные минимум и максимум являются лишь локальными.