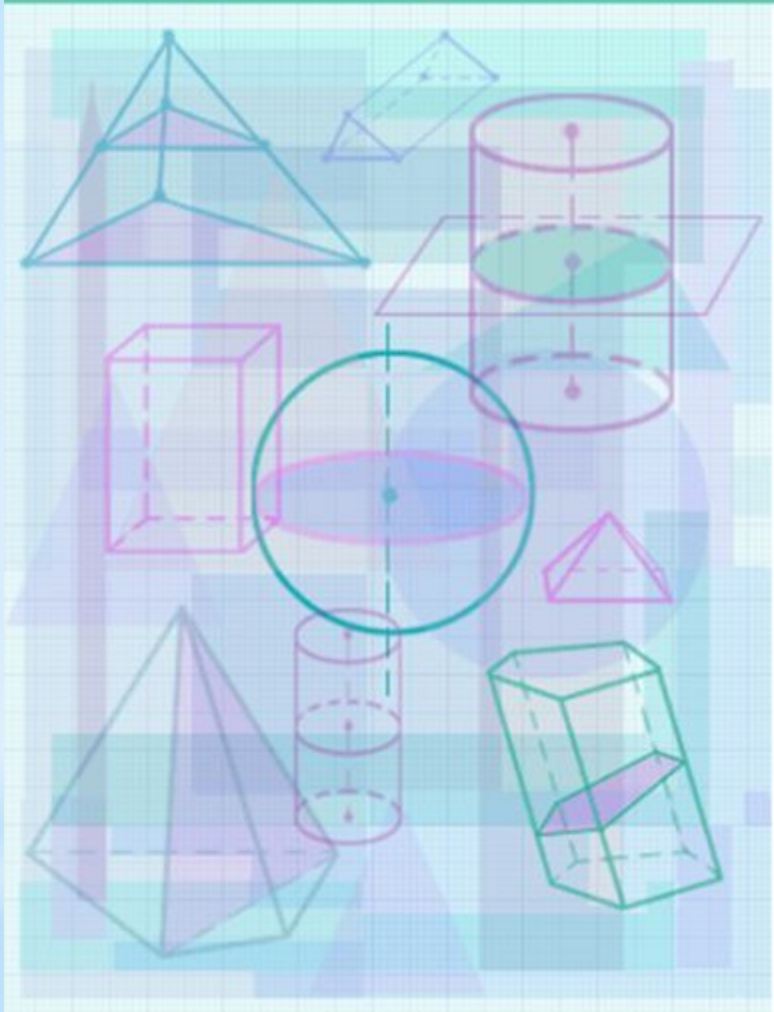
* **Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.**



Аксиомы стереометрии.

Некоторые следствия из аксиом.

Геометрия

Планиметрия

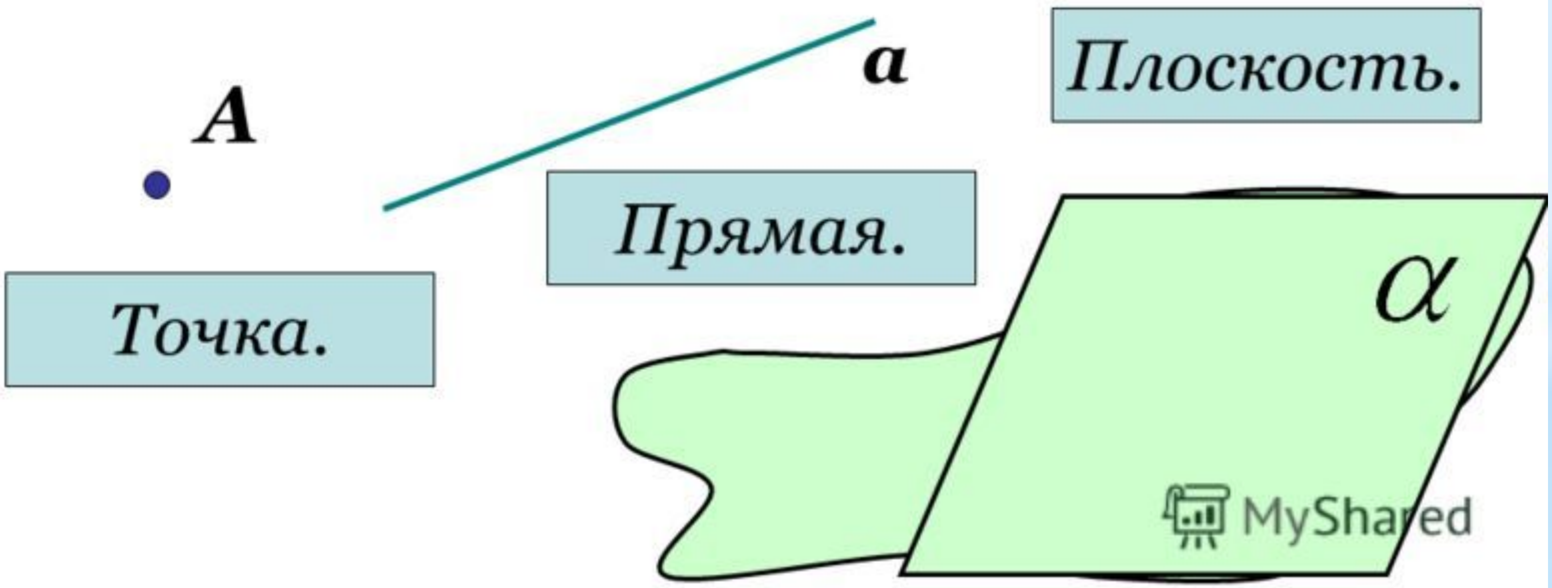
Стереометрия

stereos телесный, твердый, объемный, пространственный

Стереометрия.

-Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

Основные фигуры в пространстве:



СТЕРЕОМЕТРИЯ

точка $A, B, C, \ldots$

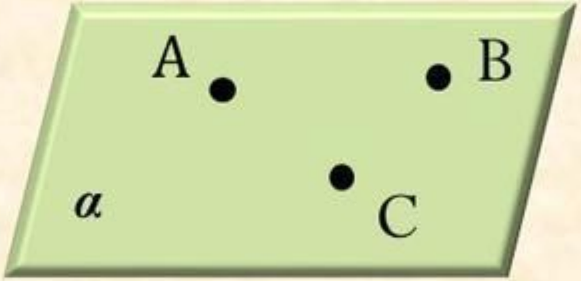
прямая $a, b, c, \ldots$

или $AB, BC, CD, \ldots$

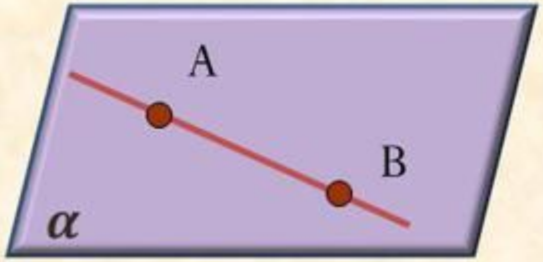
плоскость $\alpha, \beta, \gamma,$

АКСИОМЫ стереометрии

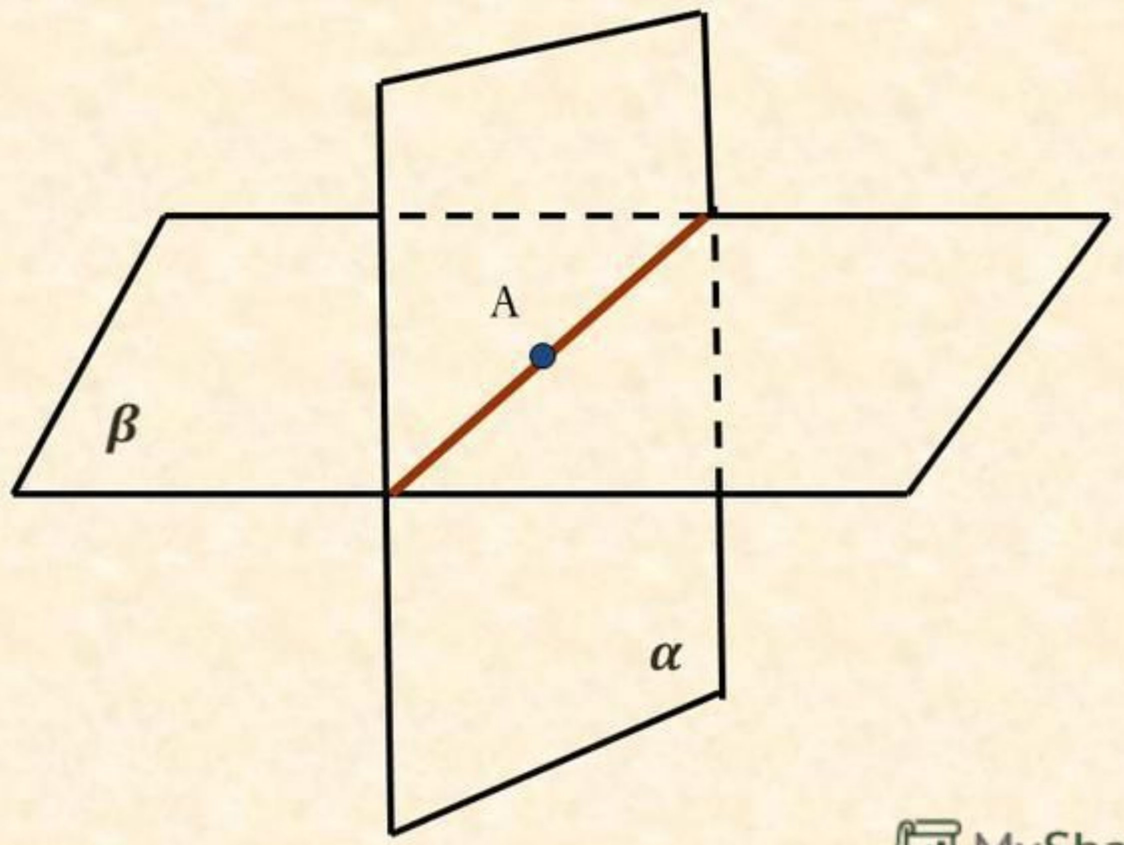
A1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



A2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



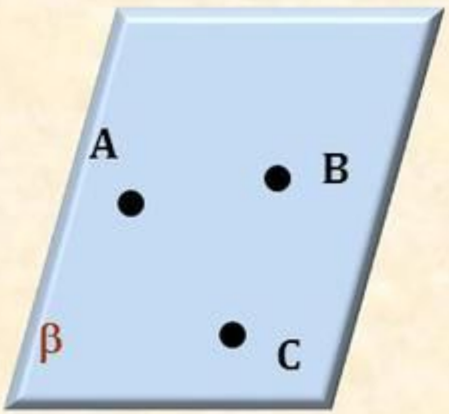
A3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



Аксиомы стереометрии описывают:

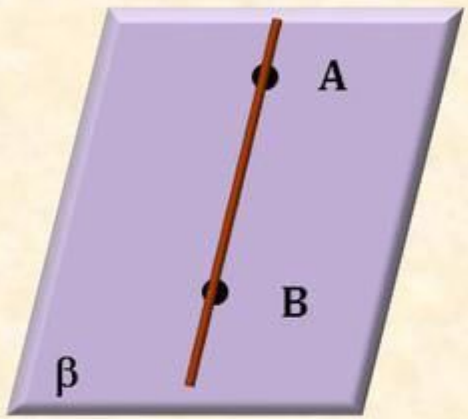
А1

Способ задания плоскости



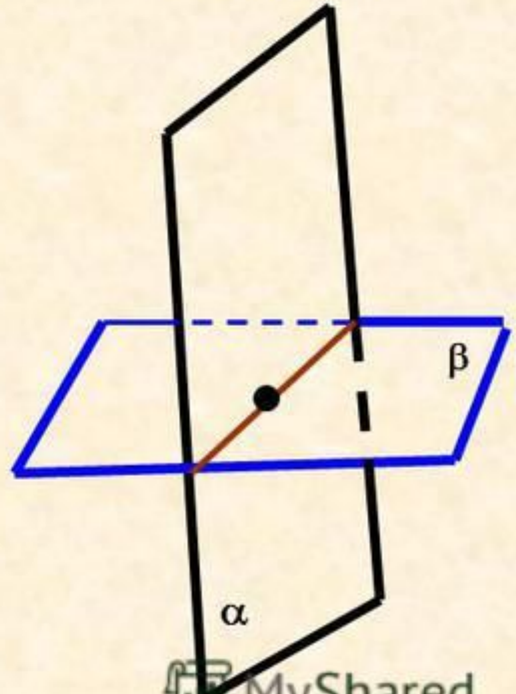
А2

Взаимное расположение прямой и плоскости

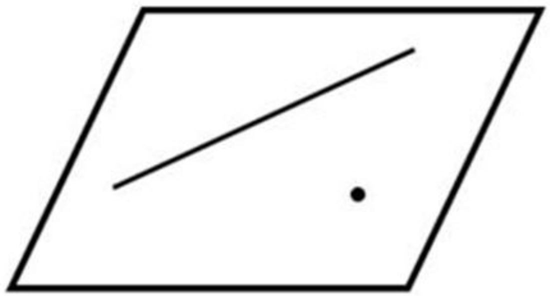
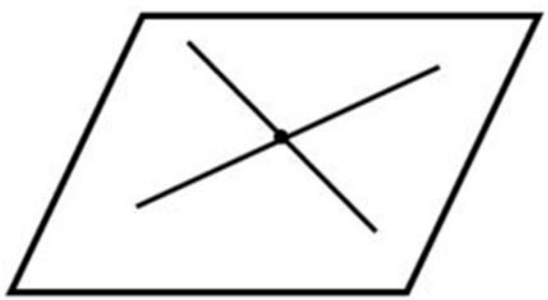


А3

Взаимное расположение плоскостей

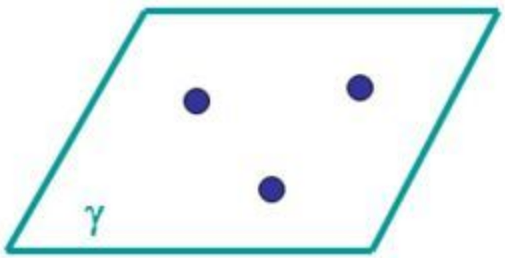


Следствия из аксиом стереометрии.

Следствие	Чертеж	формулировка
№ 1 (Т)		Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
№ 2 (Т)		Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

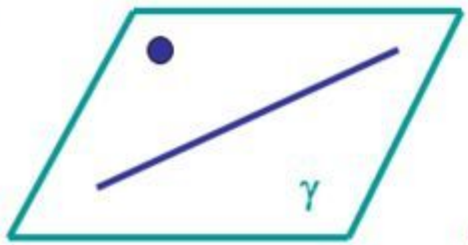
Способы задания плоскости

1. Плоскость можно провести через три точки.



Аксиома 1

2. Можно провести через прямую и не лежащую на ней точку.



Теорема 1

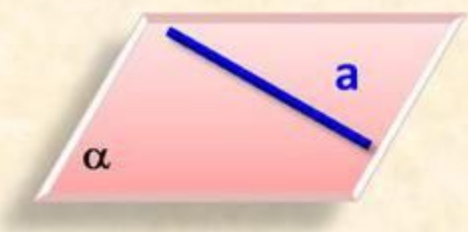
3. Можно провести через две пересекающиеся прямые.

Теорема 2

A_1

Взаимное расположение прямой и плоскости:

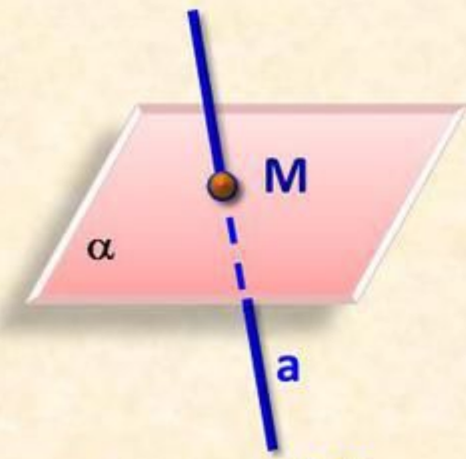
Прямая лежит в плоскости.



$a \in \alpha$

Множество общих точек.

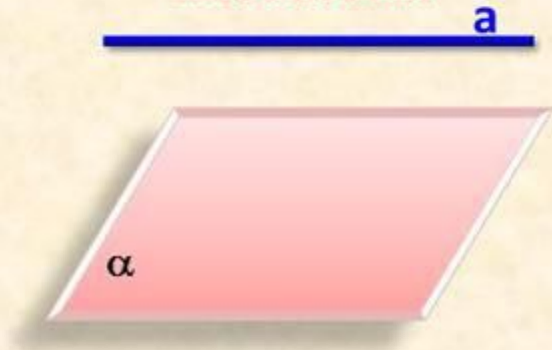
Прямая пересекает плоскость.



$a \cap \alpha = M$

Единственная общая точка.

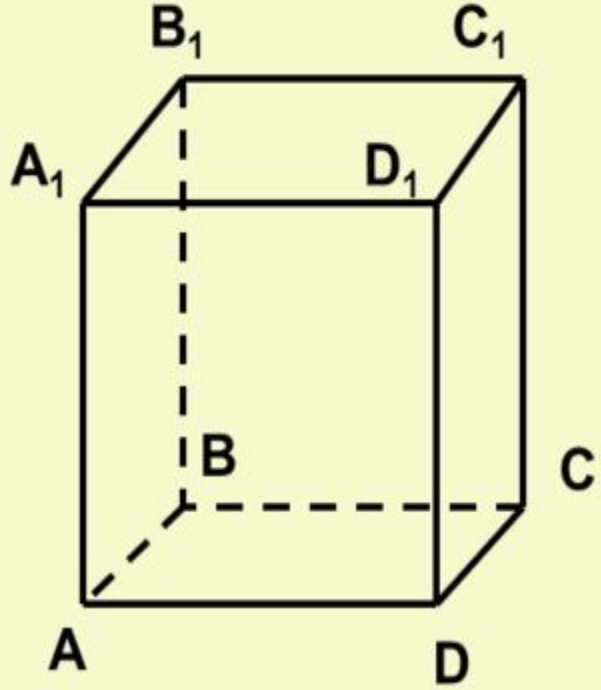
Прямая не пересекает плоскость.



$a \notin \alpha$

Нет общих точек.

- **Пользуясь данным рисунком, назовите:**
- **а)** три плоскости, содержащие прямую B_1C; прямую AB_1;
- **б)** прямую, по которой пересекаются плоскости
- B_1CD и AA_1D_1 ; плоскости ADC_1 и A_1B_1B ;
- **в)** плоскость, не пересекающуюся с прямой CD_1 ; с прямой BC_1



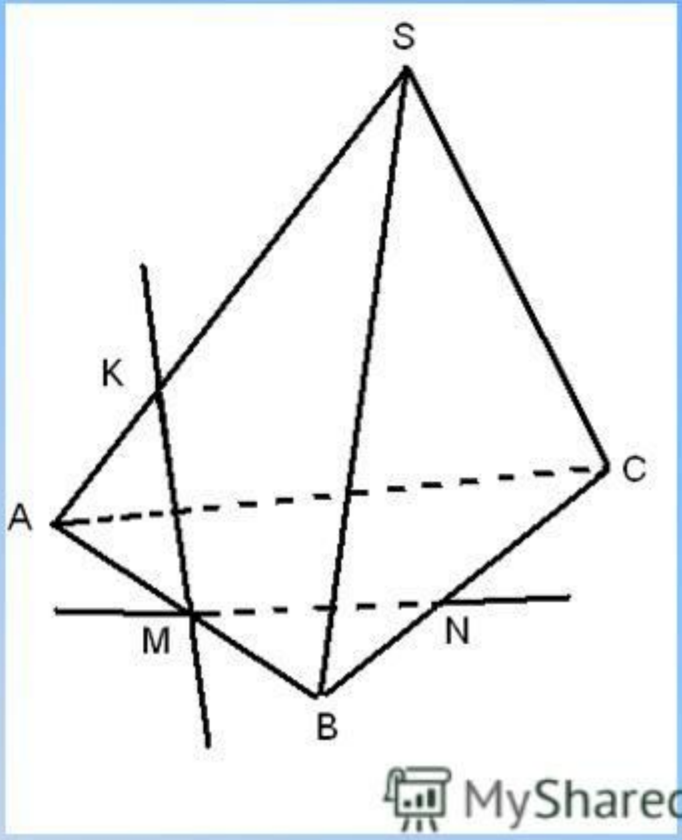
Задача

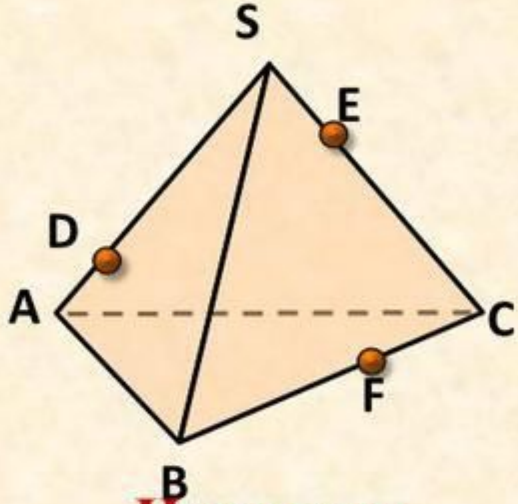
Пользуясь данным рисунком, назовите:

1)четыре точки, лежащие в плоскости SAB, в плоскости ABC;

2)плоскость, в которой лежит прямая MN, прямая KM;

3)Прямую, по которой пересекаются плоскости ASC и SBC; плоскости SAC и CAB.





1 вариант.

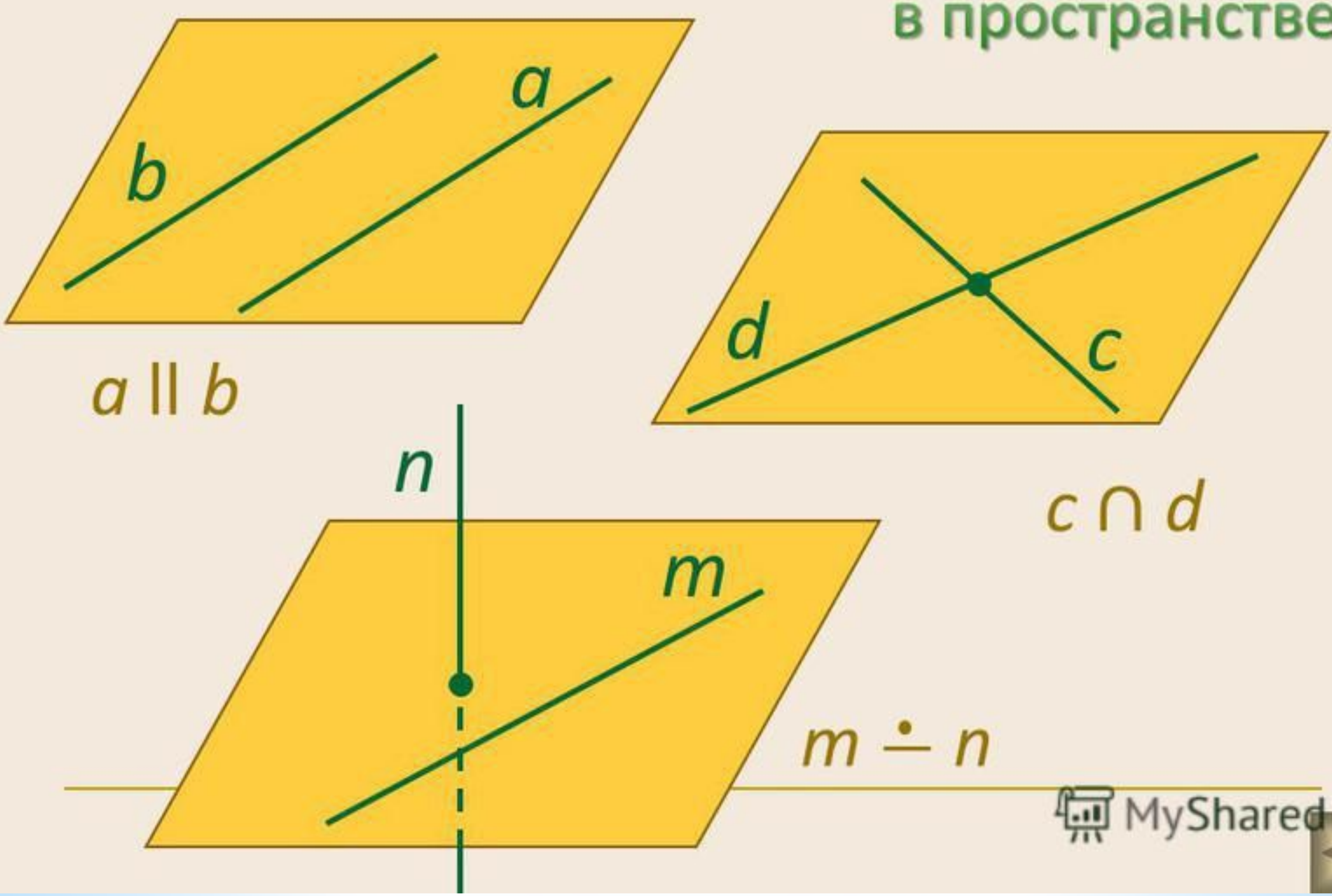
Назовите:

2 вариант.

1) Две плоскости, содержащие прямую DE.	1) Две плоскости, содержащие прямую EF.
2) Прямую по которой пересекаются плоскости AEF и SBC.	2) Прямую по которой пересекаются плоскости BDE и SAC
3) Плоскость, которую пересекает прямая SB.	3) Плоскость, которую пересекает прямая SC.

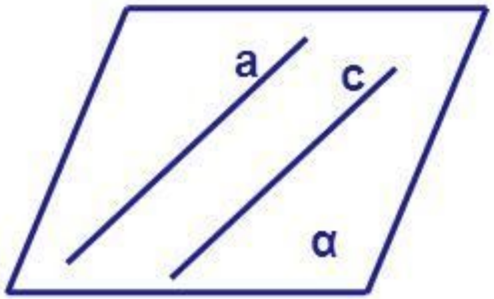
Параллельные прямые в пространстве

Взаимное расположение прямых в пространстве



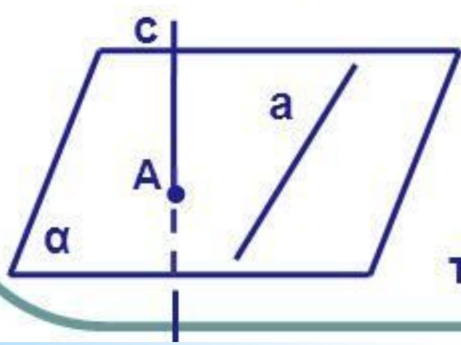
Определения

Две не пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, называются параллельными.



Прямые a и c лежат в плоскости α,
причём $a \not\cap c$,
тогда $a \parallel c$.

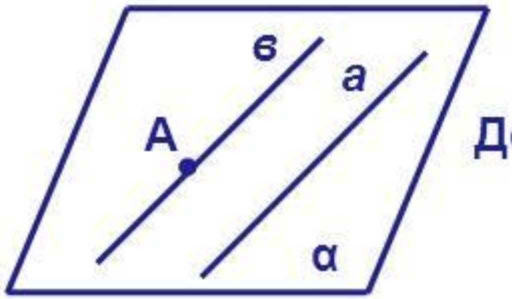
Две не пересекающиеся прямые, лежащие в разных плоскостях, называются скрещивающимися.



Прямые a и c не лежат в одной плоскости,
причём $a \not\cap c$,
тогда a и c – скрещивающиеся прямые.

Теорема

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, причём единственную.



Дано: прямая а и точка А, не лежащие на ней

Доказать: 1. Существует прямая *в*, проходящая через точку А и параллельная прямой а.

2. Прямая *в* – единственная.

Доказательство.

1. Проведём через прямую а и точку А плоскость α.

В плоскости α проведём прямую $в \parallel a$.

Существование прямой *в* доказано.

2. Через любую точку плоскости, не лежащую на прямой можно провести только одну прямую, параллельную , данной.

Это доказывает единственность прямой *в*.

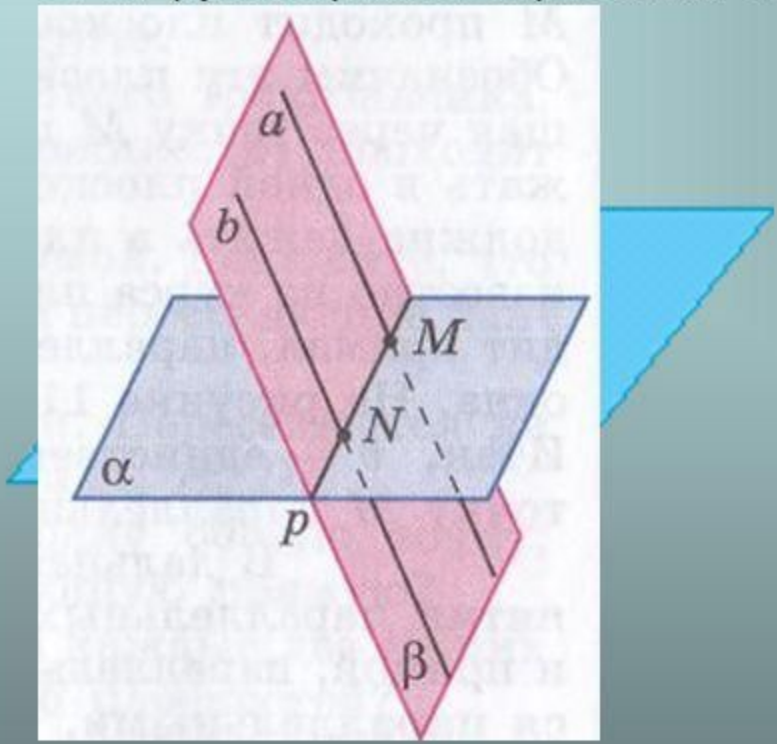
Параллельные отрезки, параллельные лучи в пространстве.

- Отрезки в пространстве называются параллельными, если …
- Лучи в пространстве называются параллельными, если …

...они лежат на параллельных прямых

Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми ($Л_1$)

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



Дано: $a \parallel b$, $a \cap \alpha = M$

Доказать: $b \cap \alpha$

Доказательство:

1) $a \parallel b$, β - един. плоскость

2) $\left.\begin{array}{l} M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array}\right\}$ **$\alpha \cap \beta = p$ (по A_3) , $M \in p$**

$\Rightarrow b \cap p = N$, $\Rightarrow N \in \alpha$

3) $b \cap \alpha = N$,

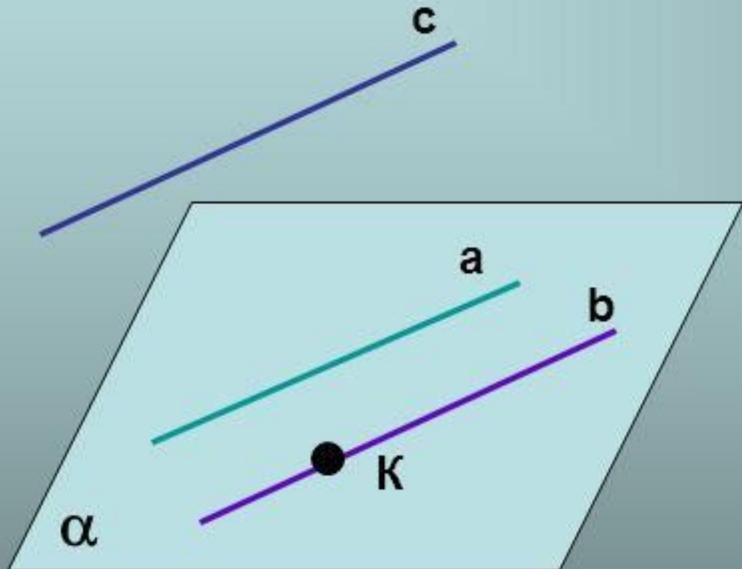
N – единственная точка

ч.т.д.

вернуться

Теорема о трех прямых в пространстве.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).



Дано: a || c, b || c

Доказать: a || b

(т.е. **a** и **b лежат в** одной плоскости α и **a** и **b не пересекаются**)

Доказательство:

1) Пусть К Є b, через a и К ∉ a проходит α - единственная плоскость (из C_1)

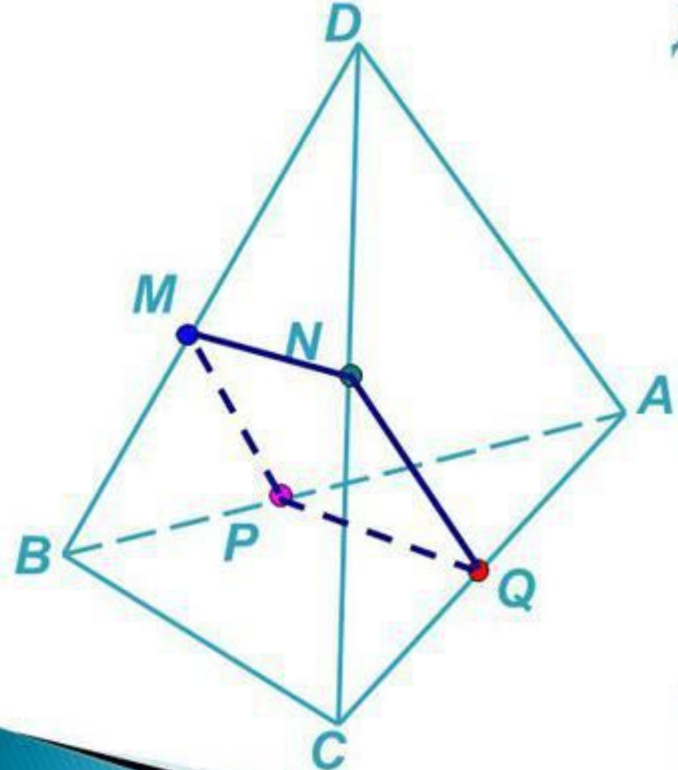
2) докажем, что b Є α (методом от противного):
если b || c и b ∩ α, то c ∩ α (по $Л_1$),
$\Rightarrow$ a ∩ α , что невозможно, т.к. $a \subset \alpha$

вернуться

3) (метод от противного) a ∩ b = P - противоречие , т.к. по Т (о параллельных прямых) через точку P проходит единственная прямая параллельная прямой c

Ч.т.д.

Задача №17.



Дано: M – середина BD

N – середина CD

Q – середина AC

P – середина AB

AD = 12 см; BC = 14 см

Найти: P_{MNQP}.

Ответ: 26 см

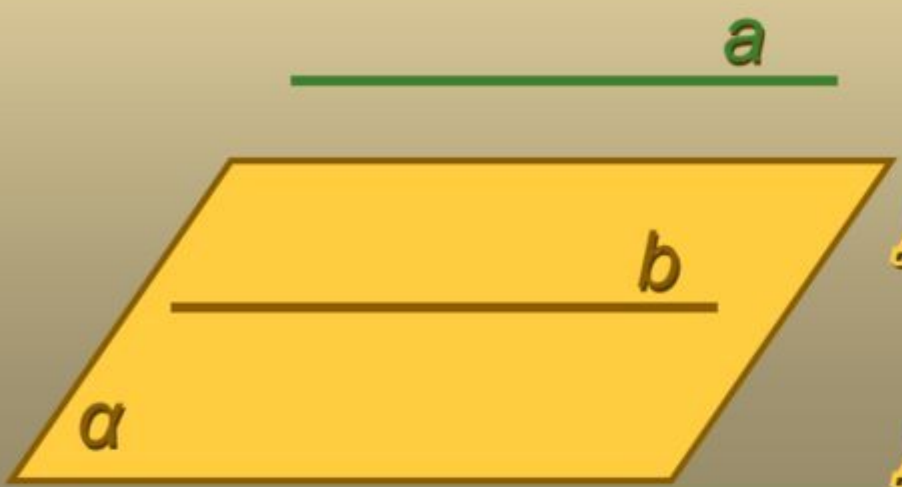
Определение параллельных прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

$c \parallel \alpha$

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

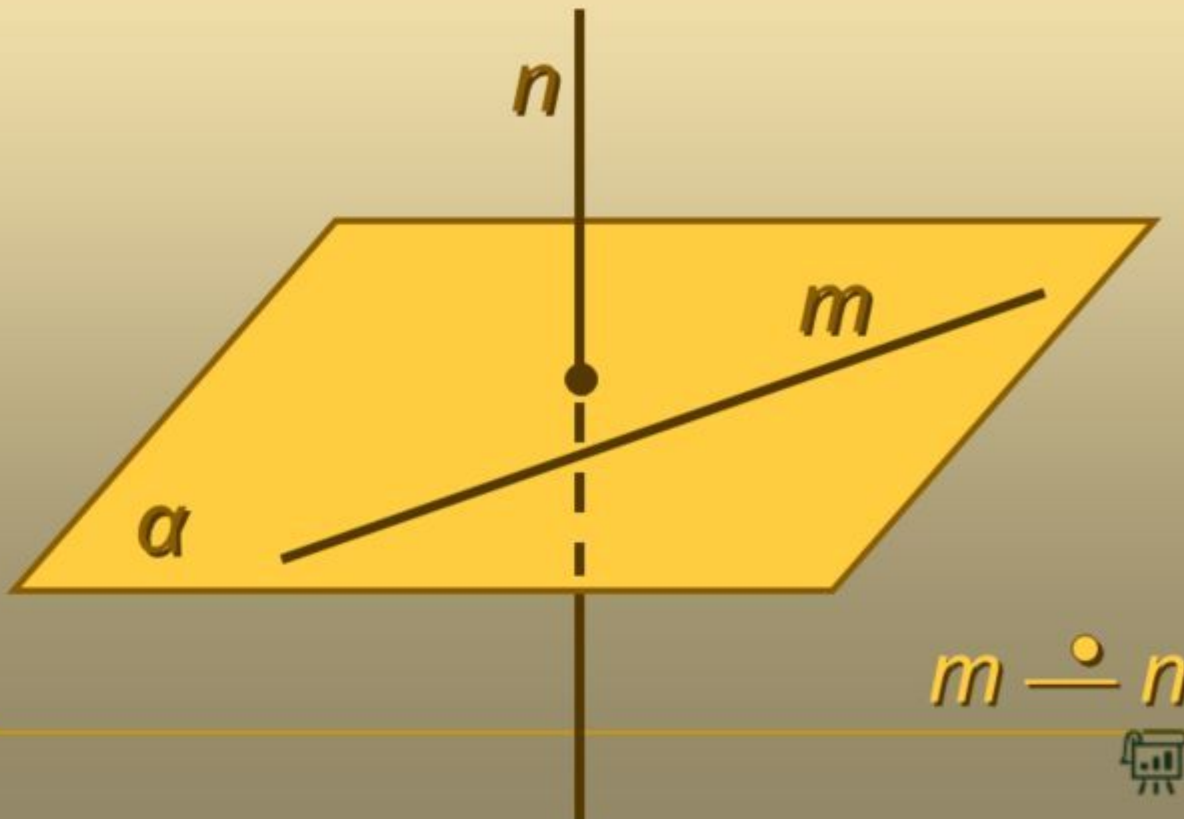


<u>Дано:</u> a, α, $a \not\subset \alpha$,
$b \subset \alpha$, $a \parallel b$

<u>Доказать:</u> $a \parallel \alpha$

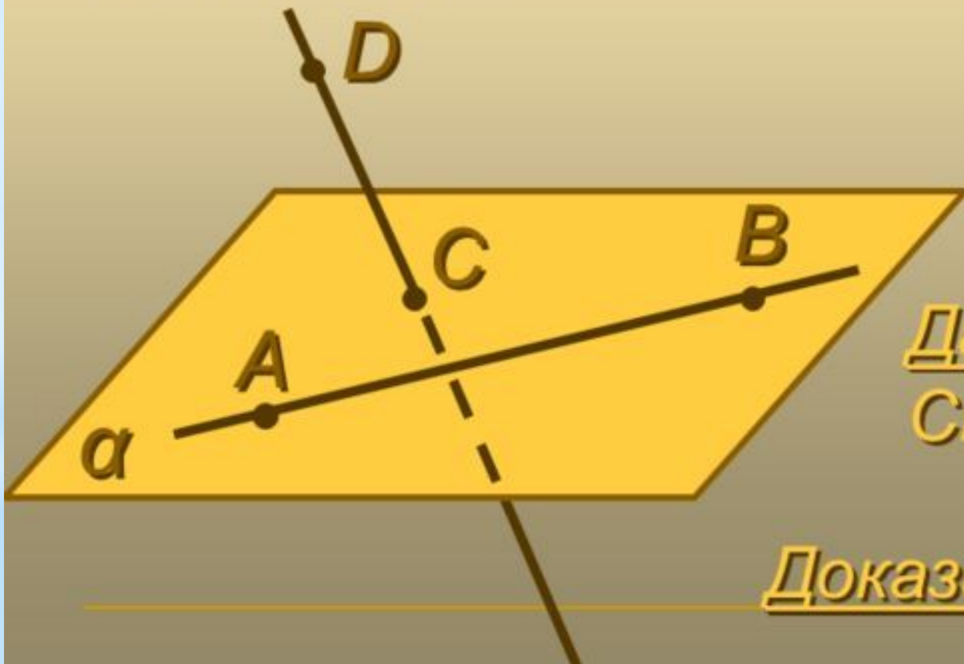
Скрещивающиеся прямые

Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.



Признак скрещивающихся прямых

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

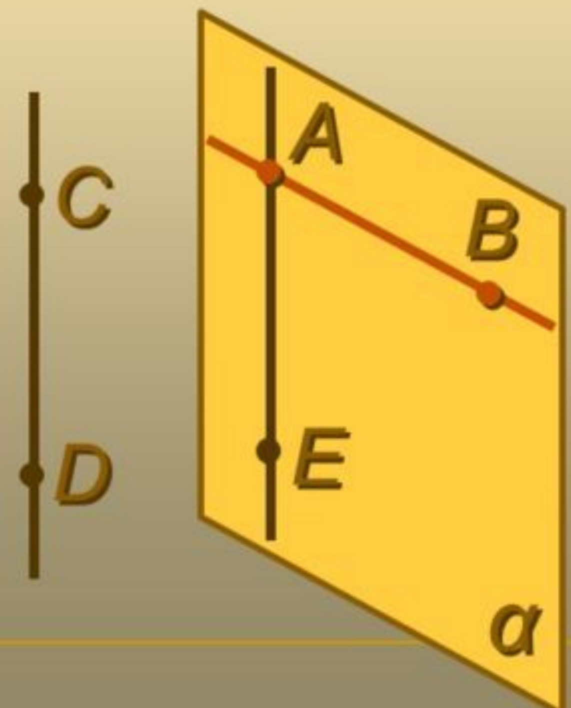


__Дано:__ $AB \subset \alpha$,
$CD \cap \alpha = C$, $C \notin AB$

__Доказать:__ $AB \,\dot{-}\, CD$

Теорема о скрещивающихся прямых

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.



Дано: AB —• CD

Доказать:

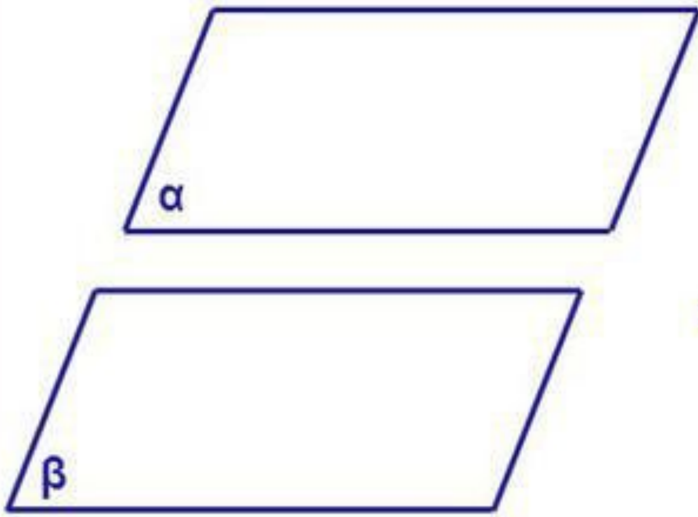
1) $\exists \alpha,\ AB \subset \alpha,\ \alpha \parallel CD$

2) α – !

Признак параллельности плоскостей

Определение

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

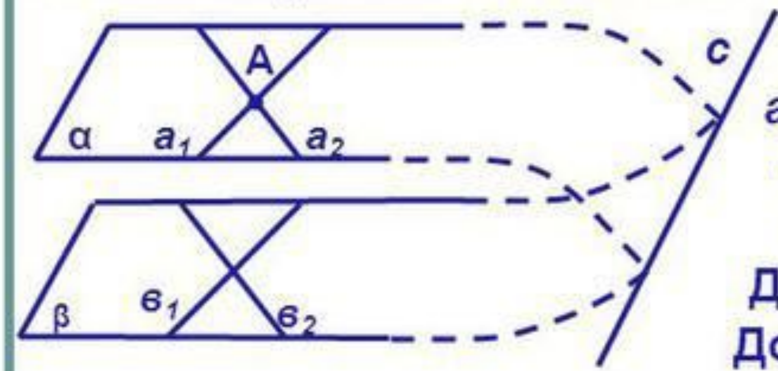


$\alpha \not\cap \beta$,

тогда $\alpha \parallel \beta$

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано: $a_1 \cap a_2 = A$, $в_1 \cap в_2$,

a_1 и a_2 лежат в плоскости α,

$в_1$ и $в_2$ лежат в плоскости β,

$a_1 \parallel в_1$, $a_2 \parallel в_2$

Доказать: $\alpha \parallel \beta$

Доказательство.

Пусть $\alpha \nparallel \beta$, тогда $\alpha \cap \beta$ по некоторой прямой с.

$a_1 \parallel в_1$, значит $a_1 \parallel \beta$. $a_2 \parallel в_2$, значит $a_2 \parallel \beta$

Прямая с принадлежит плоскости β,

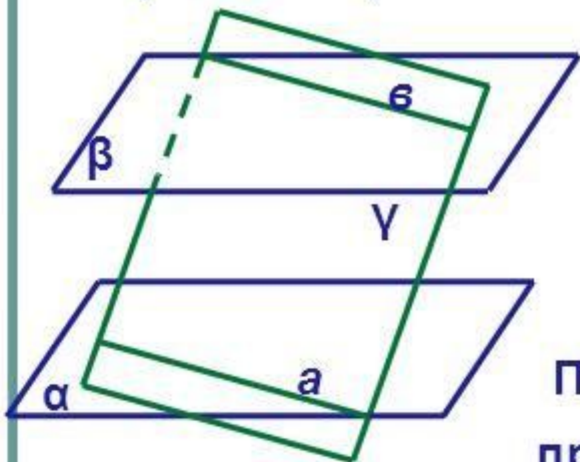
тогда через точку А проходят две прямые (a_1 и a_2) параллельные прямой с, чего быть не может,

следовательно предположение о том что $\alpha \nparallel \beta$ ложное, тогда $\alpha \parallel \beta$.

Свойства параллельных плоскостей.

Теорема

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.



Дано: $\alpha \parallel \beta$,

$\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = в$

Доказать: $a \parallel в$

Доказательство.

Прямая *а* лежит в плоскости α,

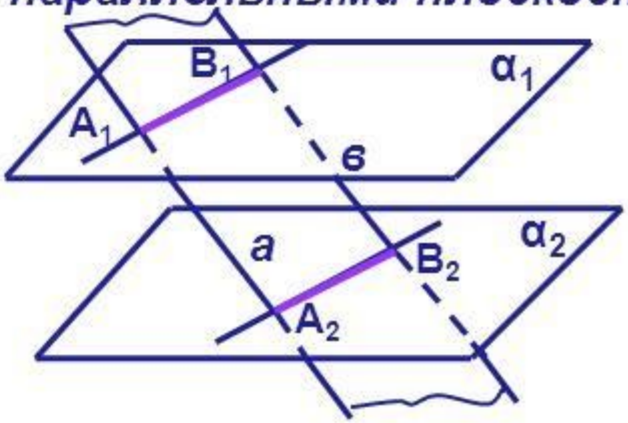
прямая *в* лежит в плоскости β,

значит $а \not\cap в$, При этом прямые *а* и *в* лежат в одной плоскости γ,

таким образом $a \parallel в$.

Теорема

Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.



Дано: $\alpha_1 \parallel \alpha_2$,

а и *в* – параллельные прямые, пересекающие плоскости α_1 и α_2,

A_1, A_2, B_1 и B_2 – точки пересечения прямых и плоскостей.

Доказать: $A_1B_1 = A_2B_2$

Доказательство.

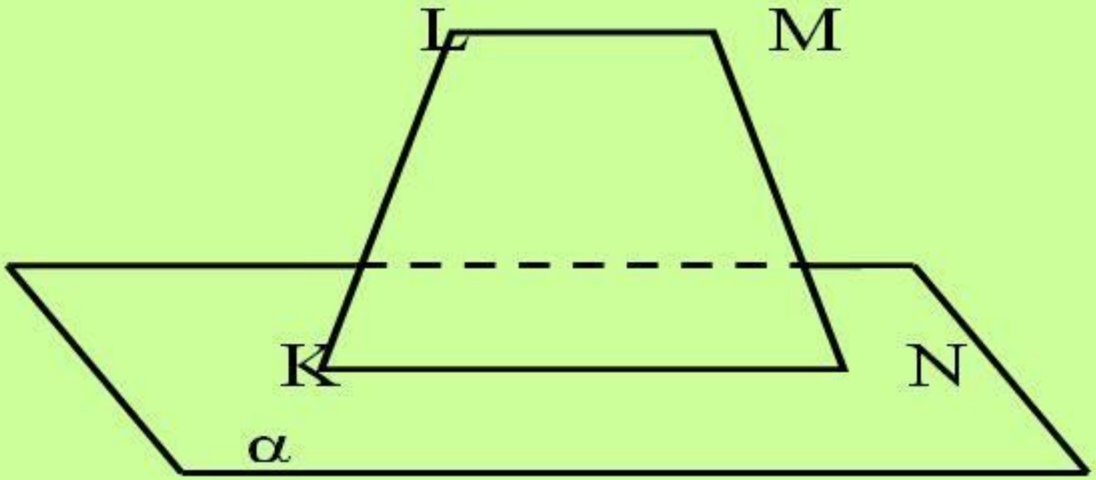
Плоскость, проходящая через прямые *а* и *в* пересекает параллельные плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2,

тогда $A_1B_1B_2A_2$ - параллелограмм,

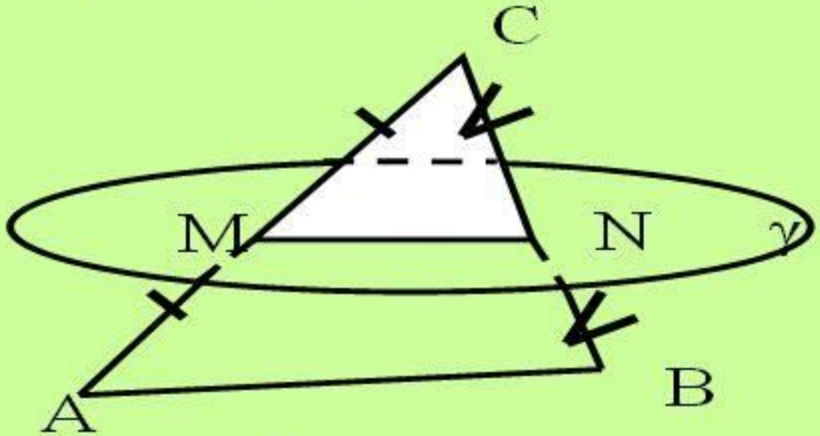
откуда $A_1B_1 = A_2B_2$ (как противолежащие стороны параллелограмма)

Задачи.

1) Дана трапеция KLMN, с основаниями KN и LM. Сторона KN лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью трапеции. Как расположены остальные стороны трапеции относительно плоскости α ?



2) Может ли плоскость γ, проходящая через середины двух сторон треугольника, пересекать его третью сторону? Ответ обосновать.



3) Верно ли утверждение: «Прямая, параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости»? Ответ обосновать.