

Математическая статистика

- Математическая статистика – раздел математики, изучающий *методы сбора и анализа результатов наблюдений массовых случайных явлений* с целью выявления существующих закономерностей.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел находится как сумма всех этих чисел, разделенная на количество этих чисел.

Найти **среднее арифметическое** чисел 7,1,15,2,4,4

$$(7+1+15+2+4+4):6=33:6=5,5$$

Среднее арифметическое может быть как целым числом, так и десятичной дробью

Определение моды.

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.



Медиана

- Медиана с нечётным числом членов – это число, записанное посередине.
- Медиана с чётным числом членов - это среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медиана ряда.

Составим упорядоченный ряд (*из 9 чисел*):

64, 72, 72, 75, **78**, 82, 85, 91, 93.

78 – медиана данного ряда.

Дан другой упорядоченный ряд (*из 10 чисел*):

64, 72, 72, 75, **78, 82**, 85, 88, 91, 93.

$(78 + 82) : 2 = 80$ – медиана этого ряда.

Размах ряда.

23; 18; 25; 20; 25; 25; 32; 37; 34; 26; 34; 25

Размахом ряда называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

*Наибольший расход времени - 37 мин,
а наименьший – 18 мин.*

Найдём размах ряда:

$$37 - 18 = 19(\text{мин})$$

Статистика 1

- 1. Найдите среднее арифметическое, размах, моду ряда чисел:
 - а) 15, 23, 15, 8, 25, 16; б) -2, 35, -10, 42, 35.
- 2. Найдите медиану ряда чисел:
 - а) 25, 43, 44, 51, 55, 67, 72;
 б) 3, 12, 24, 32, 43, 54.

Статистика с/р

Найти среднее арифметическое, размах, моду и медиану ряда чисел:

а) 20,18,32,10,45,15,18,12

б) 2,2;3,8;1,6;4,4;1,5.

Комбинаторика

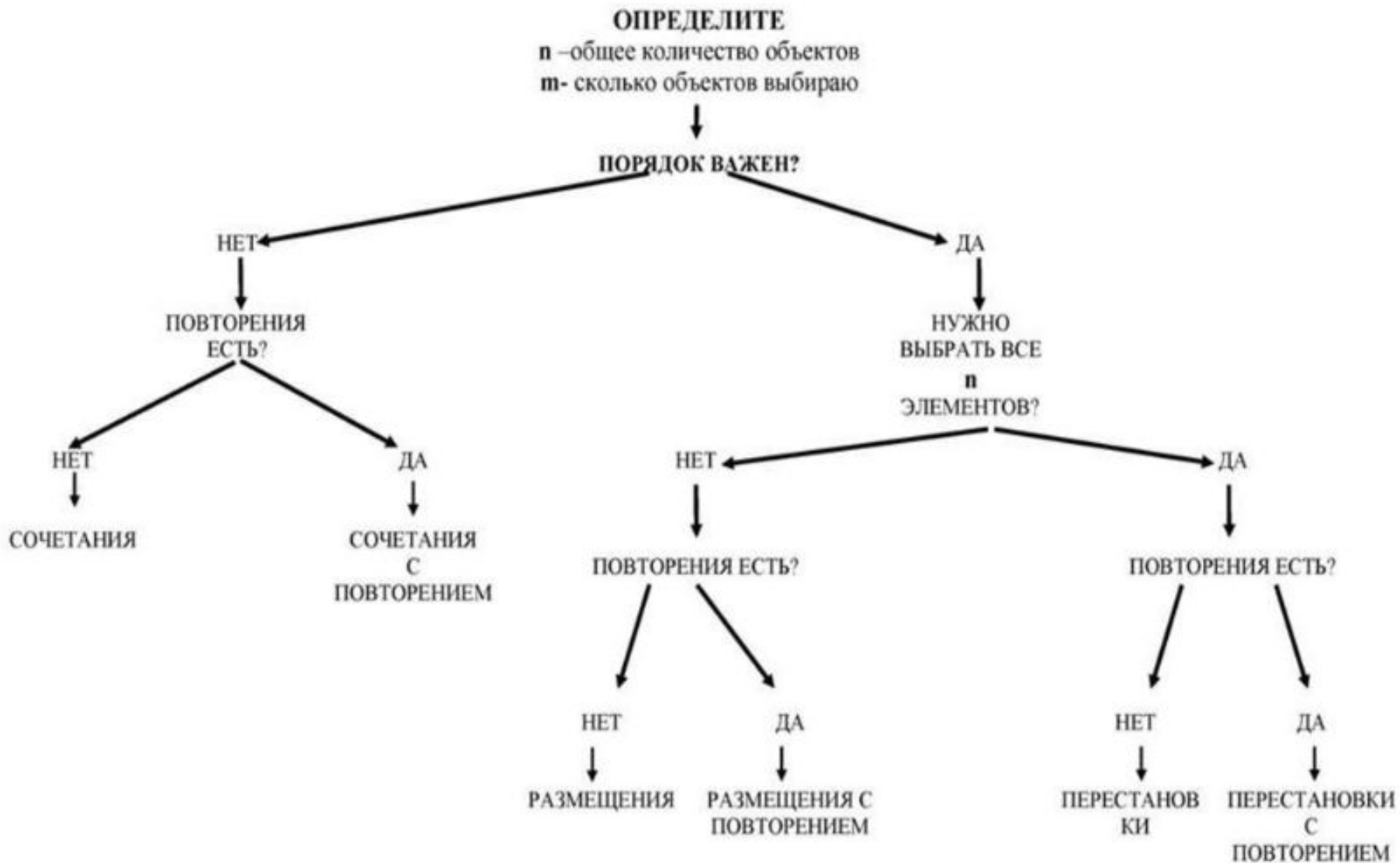
Комбинаторика – раздел математики, изучающий количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Комбинации элементов множества могут быть выполнены путем:

- 1) перестановок;
- 2) размещений;
- 3) сочетаний.

Комбинации могут быть без повторений (в основном) и с повторениями (оговаривается отдельно).

Комбинаторика



Перестановки 1

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и



$n!$

Факториал

Факториал

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Перестановки 1

$$P_n = n!$$



Количество вариантов
перестановок



Количество предметов

Перестановки 1

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и



Количество предметов

$n = 3$ (красная, жёлтая и синяя карточки)

Количество вариантов перестановок

$P = n! = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$ вариантов

Перестановки 1 с/р

Задача 1. К кассе кинотеатра подходит 4 человека. Сколько существует различных вариантов установки их в очередь друг за другом?

Перестановки 2

Перестановки с повторениями

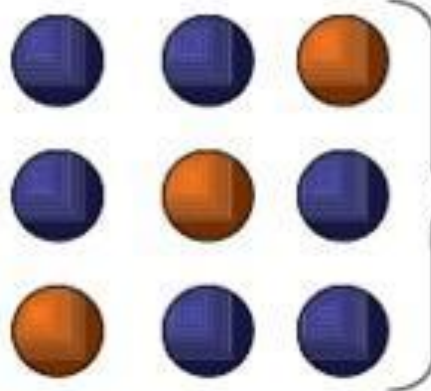


$$n_1 = 2$$



$$n_2 = 1$$

$$n = n_1 + n_2 = 2 + 1 = 3$$



3 различные перестановки

Перестановки 2

Число различных на выборке из n элементов, из которых k одинаковые - число перестановок с k повторениями на множестве из n элементов

$$\overline{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Перестановки 2

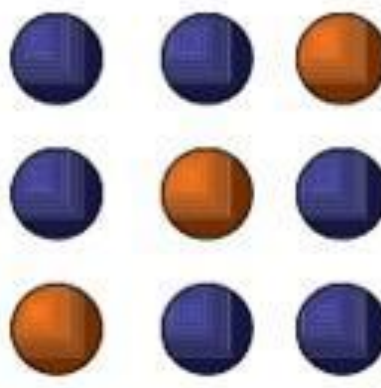


$$n_1=2$$



$$n_2=1$$

$$n=n_1+n_2=2+1=3$$



3 различные
перестановки

Всего шариков 3, то есть $n = 3$

Одинаковых шариков (повторений) $k=2$

$$P = \frac{n!}{k!} = \frac{3!}{2!} = \frac{1*2*3}{1*2} = \frac{6}{2} = 3$$

Перестановки 2

Если у нас несколько групп одинаковых предметов (например, два шарика красных и три шарика синих), то вместо $k!$ пишем $k_1!$ (количество красных) * $k_2!$ (количество синих)

$$\frac{n!}{k_1! * k_2!}$$

Перестановки 2

- Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?



Перестановки 2

Всего 18 камней

$$n = 18$$

изумрудов 5

$$k_1 = 5$$

рубинов 6

$$k_2 = 6$$

сапфиров 7

$$k_3 = 7$$

$$P = \frac{n!}{k_1! * k_2! * k_3!} = \frac{18!}{5! * 6! * 7!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * 12 * 13 * 14 * 15 * 16 * 17 * 18}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7}$$

Перестановки 2

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*13*14*15*16*17*18}}{}$$

$$1*2*3*4*5*1*2*3*4*5*6*\cancel{1*2*3*4*5*6*7}$$

$$\frac{\cancel{8}*9*\cancel{10}*11*12*13*14*15*16*17*18}{}$$

$$\cancel{2}*3*\cancel{4}*5*\cancel{2}*3*4*5*6$$

$$\frac{11*12*13*14*\overset{3}{\cancel{15}}*\overset{4}{\cancel{16}}*17*\overset{3}{\cancel{18}}}{}$$

$$\cancel{4}*5*\cancel{6}$$

$$11 * 12 * 13 * 14 * 3 * 4 * 17 * 3 = 14\,702\,688$$

Перестановки 2 с/р

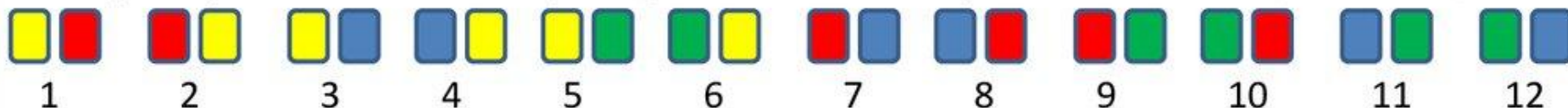
У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту.

Сколькими способами она могла это сделать?

Размещения 1

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо порядком расположения элементов, либо составом элементов (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4$, $m=2$)



$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

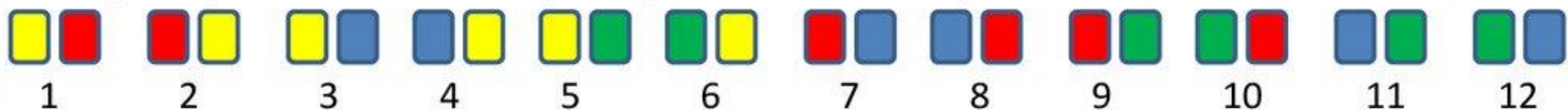
Количество вариантов

Количество всех предметов

Сколько предметов в одной группе

Размещение 1

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4$, $m=2$)



Всего карточек 4 (желтая, красная, синяя и зелёная)

$n = 4$

В группе по две карточки

$m = 2$

$$A = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1*2*3*4}{1*2} = 12$$

Размещение 1

Задача 3. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Уроки в течение дня не повторяются. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Всего разных дисциплин 11, значит, $n=11$

За день может быть 5 предметов, значит, $m=5$

$$A = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11}{1*2*3*4*5*6}$$

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6} * 7 * 8 * 9 * 10 * 11}{\cancel{1*2*3*4*5*6}}$$

$$7*8*9*10*11 = 55\,440$$

Размещения 1 с/р

- Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани пяти различных цветов?

Размещения 2

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

*Пример. Размещения из 3 **типов** карточек по две ($n=3, m=2$)*



Степень числа

Степень числа

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

2⁷

← **Показатель степени**
(Сколько раз?)

↑
Основание степени
(Что умножаем?)

Например:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$$



СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

1. Первая степень любого числа равна самому числу:

$$3^1 = 3; 7^1 = 7; a^1 = a$$

2. Вторую степень числа называют «квадратом»:

$$3 * 3 = 9 \quad 3^2 = ?; 7^2 = ?$$

3. Третью степень числа называют «кубом»:

$$2 * 2 * 2 = 8 \quad 2^3 = ?; 4^3 = ?$$



Размещения 2

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 **типов** карточек по две ($n=3, m=2$)



$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещение 2



А 134 АА

- А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х.

Всего букв 12, значит, $n = 12$

В номере по три буквы, значит, $k = 3$

$$A = 12^3 = 12 * 12 * 12 = 1\ 728$$

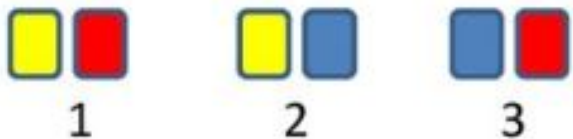
Размещения 2 с/р

Задача 4. Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?

Сочетания 1

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки ($n=3, m=2$)



$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

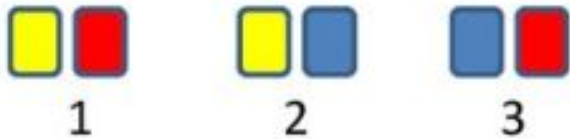
Количество вариантов

Сколько в группе

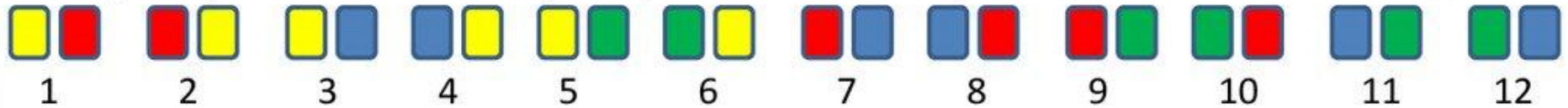
Всего предметов

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки ($n=3, m=2$)

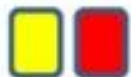


Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4, m=2$)



Сочетания 1

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки



1



2



3

Всего карточек 3 (жёлтая, синяя и красная)

$$n = 3$$

В группе по 2 карточки

$$m = 2$$

$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1*2*3}{1*2*1} = \frac{6}{2} = 3$$

Сочетания 1

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?



Сочетания 1

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

Всего разных соков 5, значит, $n=5$

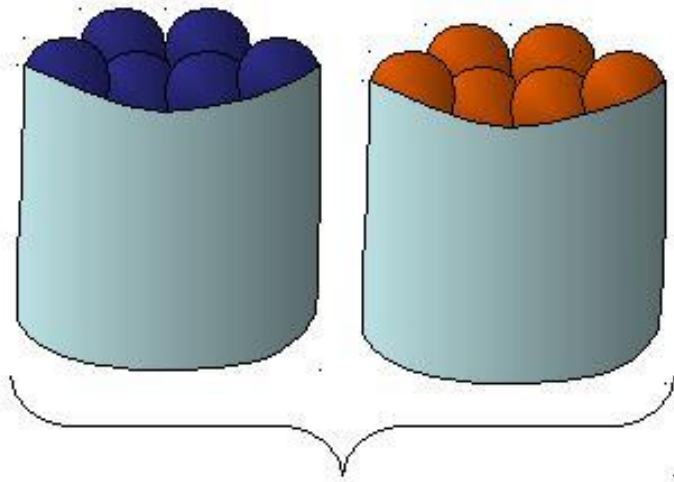
В каждом коктейле 3 сока, значит, $m=3$

$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3*1*2} = 10$$

Сочетания 1 с/р

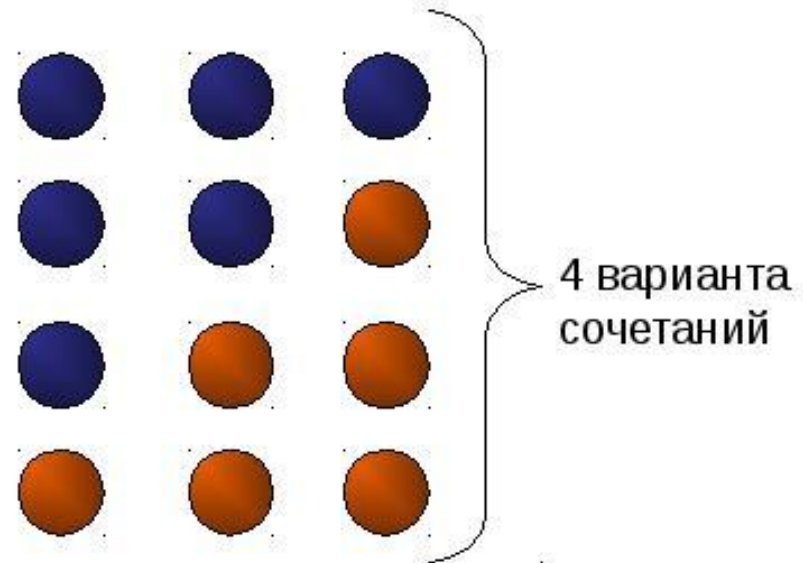
Из 15 человек надо выбрать 3 дежурных.
Сколькими способами можно сделать этот
выбор?

Сочетания 2



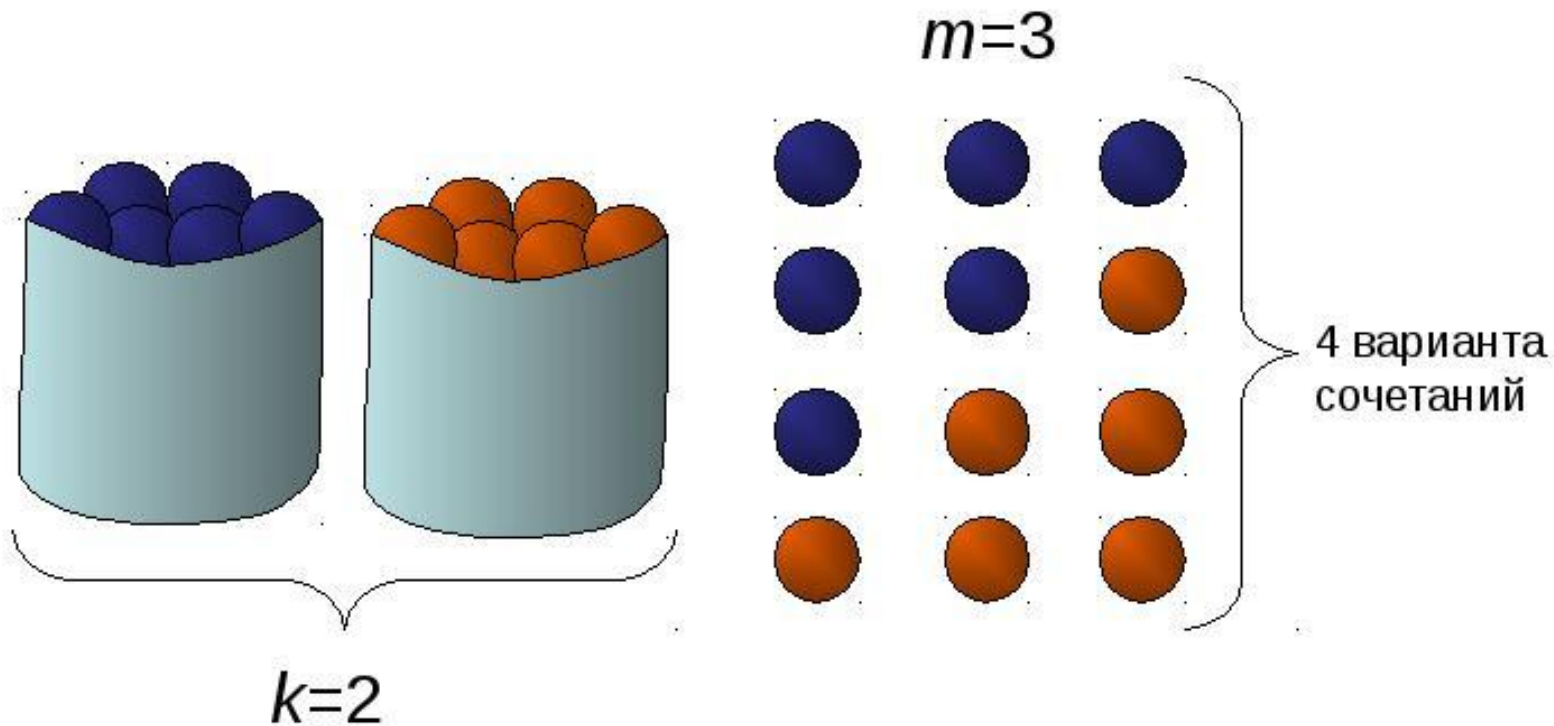
$k=2$

$m=3$



$$\overline{C}_k^m = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Сочетания 2



$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(2+3-1)!}{3! \cdot (2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

Сочетания 2

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?



Сочетания 2

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

3 вида пирожных, значит, $k = 3$

Надо купить 9 пирожных, значит, в каждой группе по 9, то есть $m=9$

$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(3+9-1)!}{9! \cdot (3-1)!} = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2} =$$

$$\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10} \cdot 11}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2}} = 5 \cdot 11 = 55$$

Сочетания 2 с/р

В магазине продаётся апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Нужно купить 7 пакетов. Сколько различных наборов можно составить?