Однородные тригонометрические уравнения

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

— однородное тригонометричес-кое уравнение первой степени (a≠0, b≠0)

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

— однородное тригонометричес-кое уравнение второй степени

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения первой степени

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a\frac{\sin x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a\, tg\, x + b = 0$$

$$\mathrm{tg}\, x = -\frac{b}{a}$$

Разделим обе части почленно на cos x ≠ 0 (если cos x = 0, то и sin x = 0, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

(то есть значения x,
при которых cos x = 0, не являются корнями данного уравнения)

Алгоритм решения <u>полного</u> однородного тригонометрического уравнения второй степени (т.е. если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$)

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

$$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos x\cos x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = 0$$

Разделим обе части почленно на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

(то есть значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения)

Пример 1

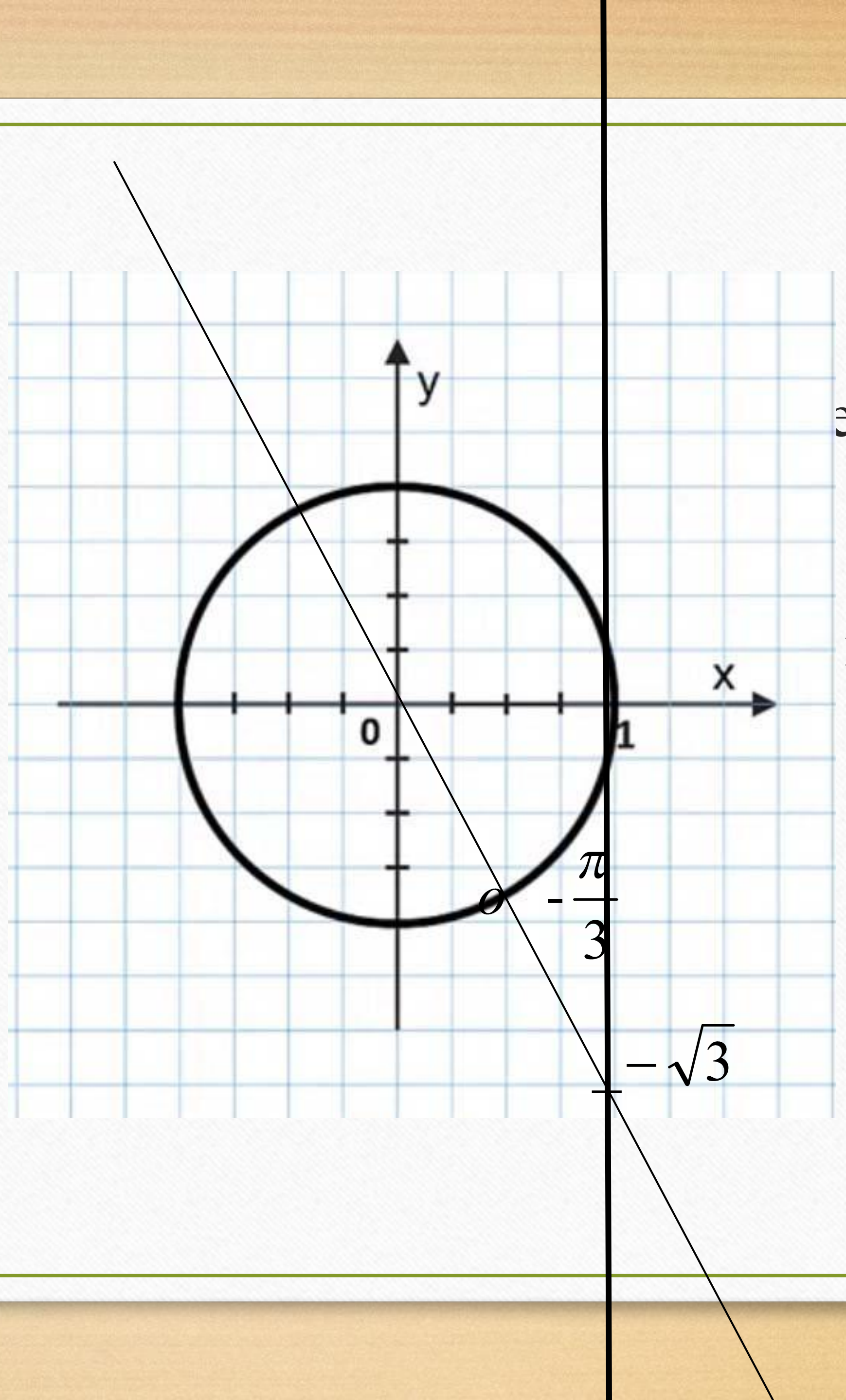
$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\textit{Ответ:} -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$



ение

на

и sin

Пример 2

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x + \cos x = 0$$

$$x = \pi k \qquad\qquad tg\, x = -1$$

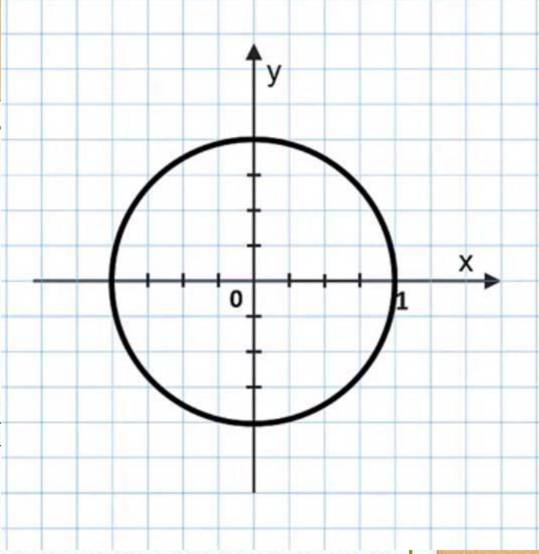
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\text{Ответ}: \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

— неполное однородное тригонометрическое уравнен степени

— однородное тригонометрическое уравнение первой степени

Разделим обе части почленно на $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)



Пример 3

$sin^2x + 2 \sin x \cos x - 3cos^2 x = 0$ — полное однородное тригонометрическое уравнение второй степени

Разделим обе части почленно на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

$tg^2x + 2 \,tg\, x - 3 = 0$

Пусть $t = tg\, x$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$D = 16,\ t_1 = -3,\ t_2 = 1$

Вернёмся к переменной x:

tg x = -3 или tg x = 1

$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$Ответ: -arctg\, 3 + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Пример 4

$5\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$

$5\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 3\cos^2 x - 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0$

$3\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$

— полное однородное тригонометрическое уравнение второй степени

Разделим обе части почленно на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

$3\operatorname{tg}^2 x - 14 \operatorname{tg} x - 5 = 0$

Пусть $t = \operatorname{tg} x$

$3t^2 - 14t - 5 = 0$

$D = 256,\ t_1 = -1/3,\ t_2 = 5$

Вернёмся к переменной x:

$\operatorname{tg} x = -1/3$ *или* $\operatorname{tg} x = 5$

$x = -\operatorname{arctg} 1/3 + \pi k$ $\quad$ $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 1/3 + \pi k,\ \operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ k€Z.$