

**Однородные
тригонометрические
уравнения**

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

— однородное
тригонометричес-
кое уравнение
первой степени
($a \neq 0, b \neq 0$)

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

— однородное
тригонометричес-
кое уравнение
второй степени

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения первой степени

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Разделим обе части почленно на $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

(то есть значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения)

**Алгоритм решения полного однородного
тригонометрического уравнения второй степени
(т.е. если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$)**

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$$a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cos x}{\cos x \cos x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Разделим обе части почленно на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)

(то есть значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения)

Пример 1

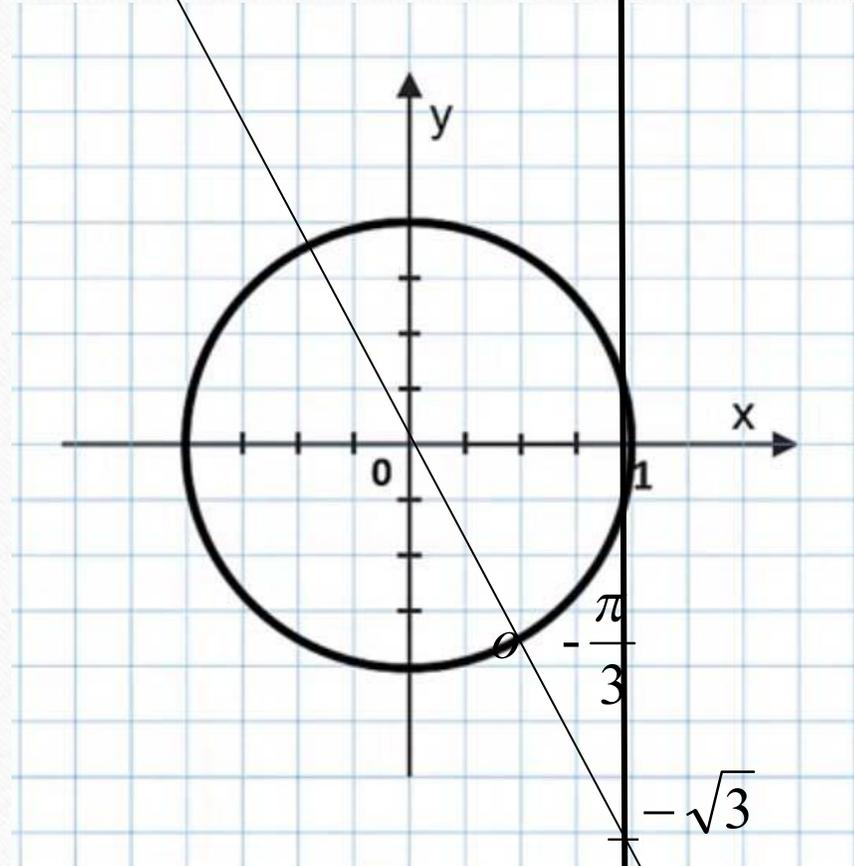
$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



ение

на
и \sin

Пример 2

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x + \cos x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

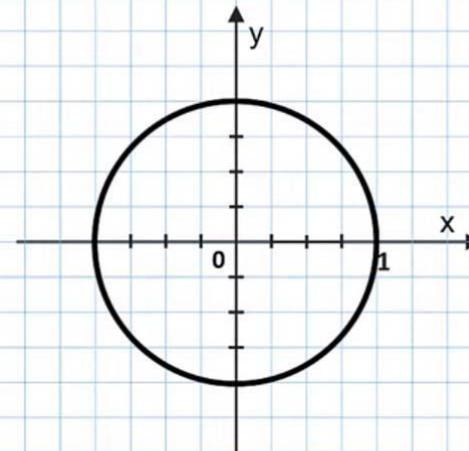
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\text{Ответ: } \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

— неполное однородное тригонометрическое уравнение первой степени

— однородное тригонометрическое уравнение первой степени

Разделим обе части почленно на $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)



Пример 3

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

Пусть $t = \operatorname{tg} x$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 16, t_1 = -3, t_2 = 1$$

Вернёмся к переменной x :

$$\operatorname{tg} x = -3 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

— полное однородное
тригонометрическое уравнение
второй степени

Разделим обе части почленно на
 $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и
 $\sin x = 0$, что противоречит
основному
тригонометрическому
тождеству)

Пример 4

$$5\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$$

$$5\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 3\cos^2 x - 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0$$

$$3\sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 14 \operatorname{tg} x - 5 = 0$$

$$\text{Пусть } t = \operatorname{tg} x$$

$$3t^2 - 14t - 5 = 0$$

$$D = 256, t_1 = -1/3, t_2 = 5$$

Вернёмся к переменной x :

$$\operatorname{tg} x = -1/3 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 5$$

$$x = -\operatorname{arctg} 1/3 + \pi k \quad x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 1/3 + \pi k, \operatorname{arctg} 5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

— полное однородное тригонометрическое уравнение второй степени

Разделим обе части почленно на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству)