Лекция 8

Движение твердых тел

Твердое тело в механике

Твердым телом в механике называют неизменяемую систему материальных точек, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками остаются неизменными

Абсолютно твердое тело (АТТ)-

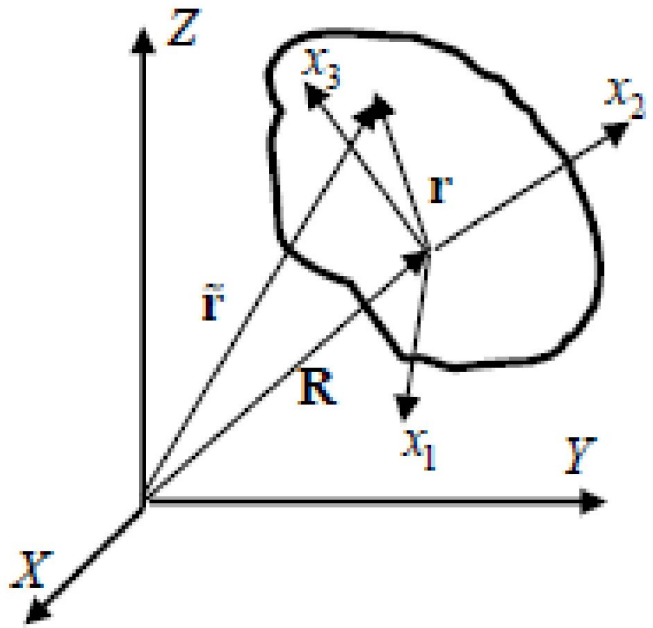
Система материальных точек с неизменным взаимным расположением

Координаты твердого тела

Движение будем описывать с помощью двух систем отсчета (инерциальной системы *XYZ* и системы координат x_1 x_2, x_3 (или *x, y, z*), жестко связанной с телом и участвующей во всех его движениях. Для задания положения тела в неподвижной системе отсчета необходимо задание 6 чисел, три координаты для задания начала отсчета подвижной системы и три угла для ориентации ее осей относительно неподвижной системы, т.е. твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Положение точки тела относительно неподвижной системы отсчета задается выражением:

$$\tilde{r} = \vec{R} + \vec{r},$$



Вращение твердого тела

Введем вектор поворота $\vec{\varphi}$, пропорциональный по величине φ и направленный вдоль оси вращения твердого тела. Выбранная точка движется по окружности радиуса $rsin\theta$, откуда $|dr| = rsin\theta d\varphi$. Для dr получается следующее выражение:

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r}.$$

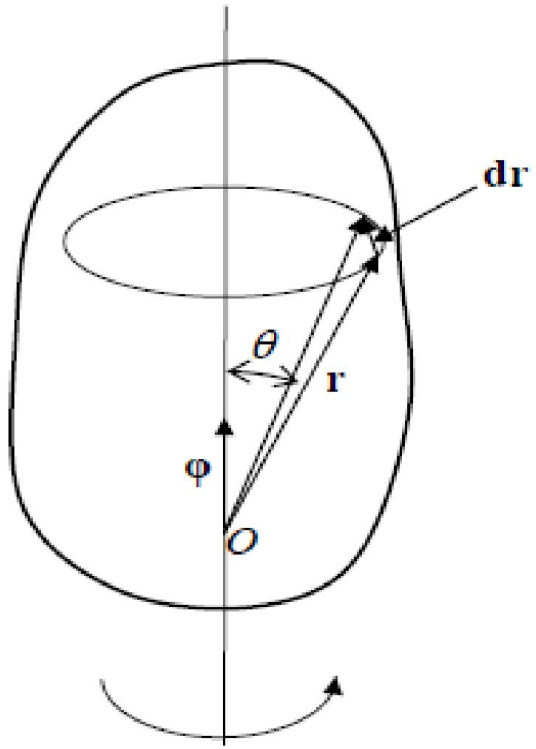
Вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Модуль скорости $v = \omega r \sin\theta = \omega R$, где $R -$ расстояние до оси. Для ускорения получим:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Здесь первый член – это тангенциальное ускорение, второй член – нормальное ускорение по модулю равное v^2/R.



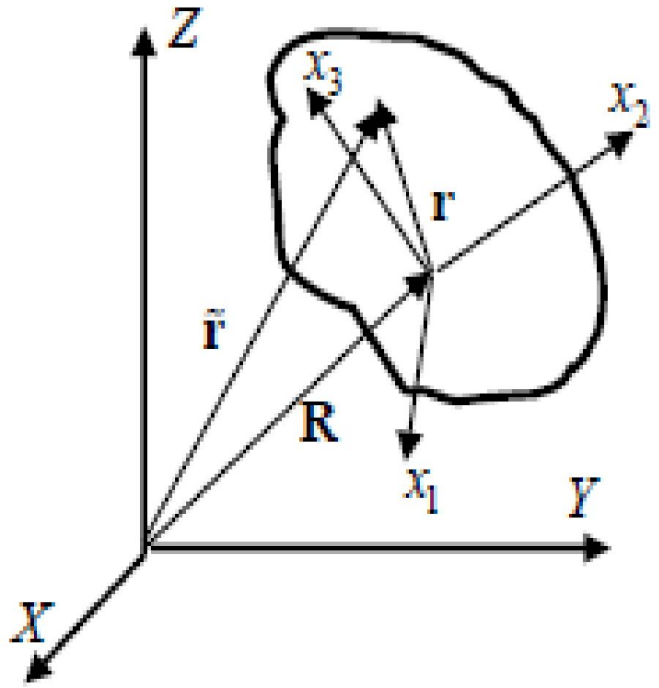
Вращение твердого тела

- Найдем скорость точки твердого тела:

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

При чисто поступательном движении линия между двумя произвольными точками на теле перемещается параллельно самой себе

При чисто вращательном движении начало отсчета неподвижно, а тело совершает движение вокруг некоторой оси.



Вращение твердого тела

Пусть центр подвижной системы сдвинули на вектор $\vec{a}$, так что $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$.

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{a}] + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

По определению

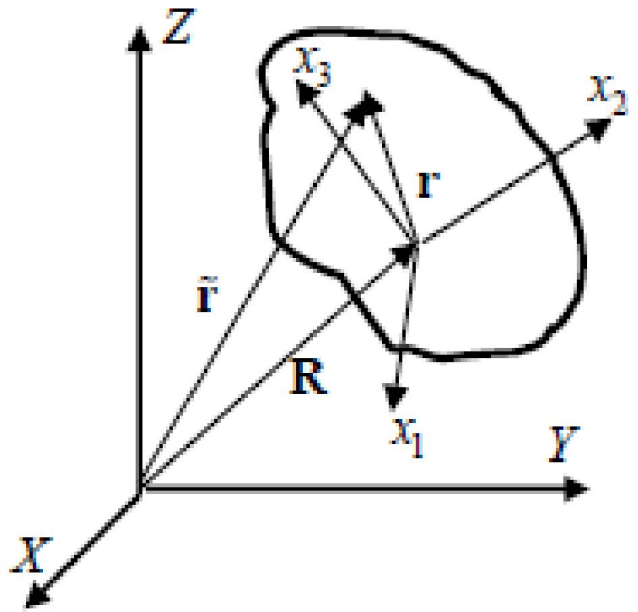
$$\vec{v} = \vec{V}' + \left[\overrightarrow{\omega'} \times \vec{r}\right].$$

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{V'} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{a}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}'.$$

Угловая скорость не зависит от выбора начала отсчета

Скорость поступательного движения абсолютного характера не имеет.

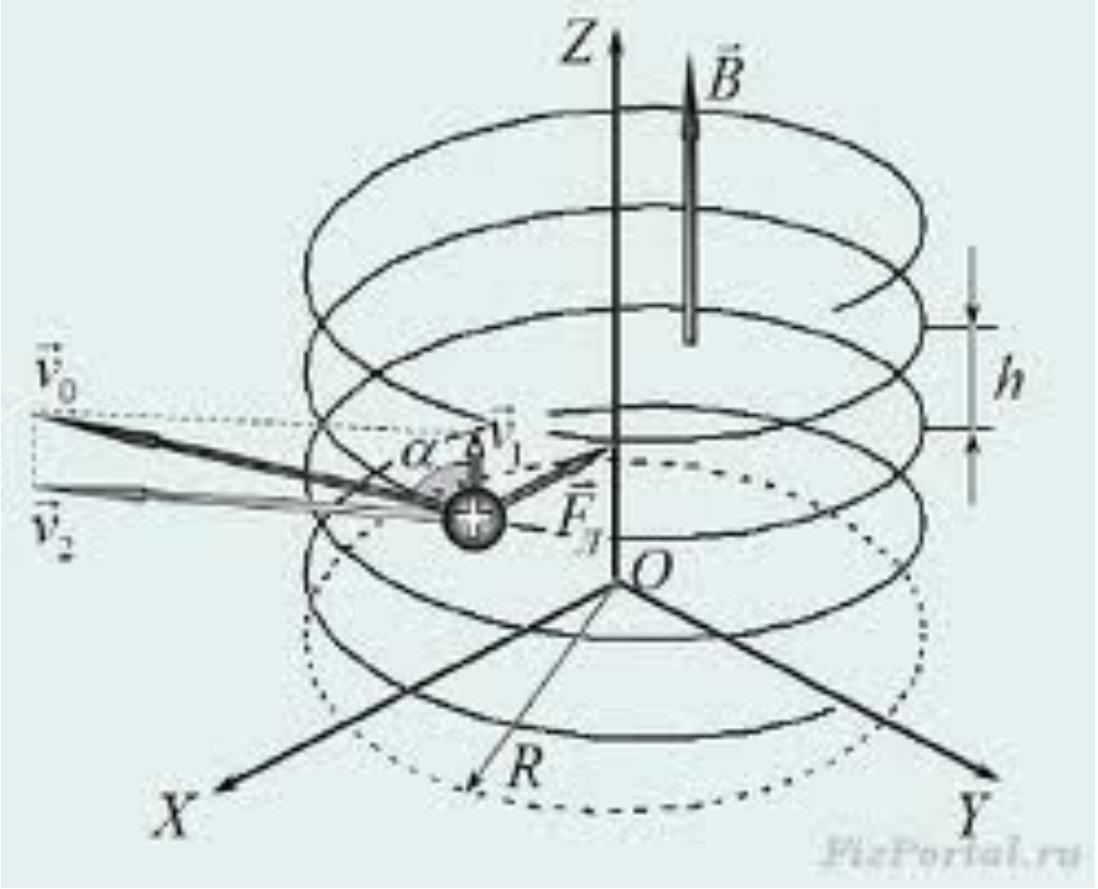


Вращение твердого тела

- Если поступательная скорость направлена параллельно вектору угловой скорости, то тело движется по винтовой линии.

Поэтому достаточно рассмотреть движение в плоскости, перпендикулярной угловой скорости - $\vec{V} \perp \vec{\omega}$. Такое движение твердого тела называется плоским. В этом случае существует точка скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Ось, проходящая через точку, называется мгновенной осью вращения.



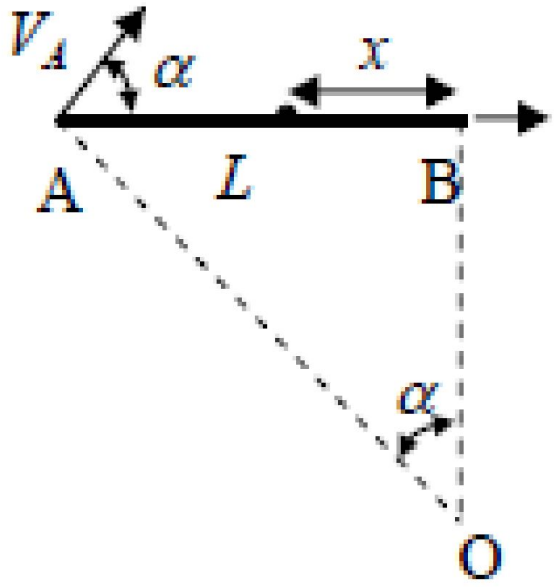
Мгновенная ось вращения

У катящегося по дороге со скоростью *V* колеса нижняя точка неподвижна и, следовательно является мгновенной осью вращения.

Центр колеса движется со скоростью *V*, а верхняя точка – со скоростью *2V*.

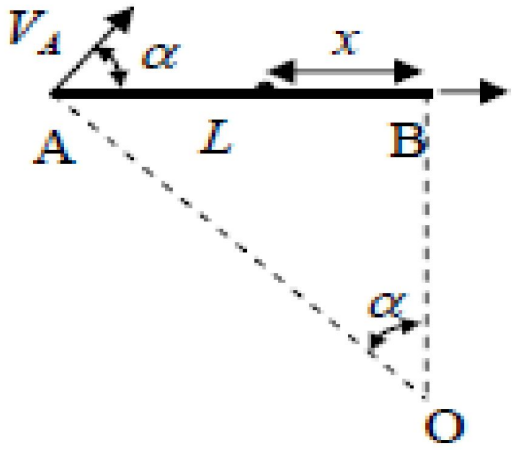
Мгновенная ось вращения

- Следующий пример демонстрирует простейший алгоритм нахождения мгновенной оси вращения.
- Пусть левый конец стержня двигается с мгновенной скоростью $\vec{V}_A$ под углом α к стержню, а правый конец (точка B) смещается вправо вдоль стержня. Скорости концов стержня должны быть перпендикулярны к радиус-векторам, проведенным от оси вращения. В таком случае, мгновенной осью вращения будет точка пересечения перпендикуляров к скоростям концов стержня, восстановленных из точек A и B (точка O).



Мгновенная ось вращения

- Найдем скорость точки стержня, расположенной на расстоянии *x* от его правого конца. С этой целью найдем угловую скорость вращения



$$\omega = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_A}{L}\sin\alpha.$$

Тогда скорость интересующей нас точки

$$V_x = \omega\sqrt{(OB)^2 + x^2} = \frac{V_A}{L}\sin\alpha\sqrt{\frac{L^2}{(tg\alpha)^2} + x^2}$$

Момент импульса вращающегося тела

- Применим к рассмотрению вращательного движения тела уравнение моментов сил и импульса. За неподвижную ось моментов удобно выбрать ось вращения. Если материальная точка вращается по окружности радиуса *r*, то момент ее импульса относительно оси вращения равен $L = mvr$. Пусть ω - угловая скорость вращения,

Тогда

$$v = \omega r,$$

а момент импульса

$$L = mr^2\omega.$$

Момент импульса вращающегося тела

- Если вокруг оси *O* вращается система материальных точек (например, твердое тело) с одной угловой скоростью ω, то

$$L = \sum mr^2\omega,$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega,$$

где

$$I = \sum m_i r_i^2.$$

Момент импульса вращающегося тела

Величина *I*, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения называется моментом инерции системы относительно этой оси.

Уравнение

$$L = I\omega$$

показывает, что при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

Динамика вращательного движения

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси момент инерции остается постоянным и, используя определение момента сил (лекция 7), можно записать:

$$M = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Где M – момент внешних сил относительно оси вращения. Это – основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы исполняет момент инерции I, роль скорости – угловая скорость ω, роль силы – момент силы M, роль импульса – момент импульса L.

Динамика вращательного движения

Аналогия между движением материальной точки и вращением может быть прослежена дальше.

Если тело вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$. Итак, для твердого тела:

$$dA = Md\varphi.$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения – угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося тела

- Поскольку скорость *i*-той частицы вращающегося твердого тела

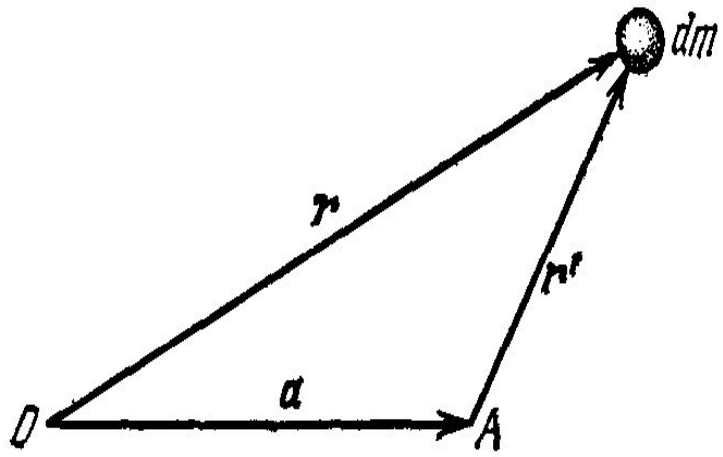
$$v_i = r_i \omega$$

$$K = \sum m_i v_i^2/2 = \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega^2/2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}.$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m \to I, v \to \omega, p \to L$.

Теорема Гюйгенса-Штейнера

- Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках *O* и *A*. Разобьем мысленно тело на элементарные массы *dm*. Радиус-векторы одной из них, проведенные от осей *O* и *A* параллельно плоскости рисунка, обозначим $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ соответственно.



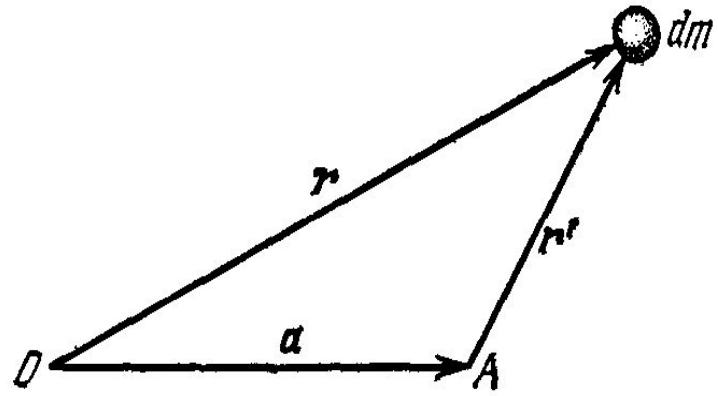
Теорема Гюйгенса-Штейнера

Тогда $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, где $\vec{a}$ означает радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$.

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a}\vec{r}),$$

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{r} dm.$$

Интеграл слева есть момент инерции тела I_A относительно оси *A*, первый интеграл справа – момент инерции относительно оси *O*. Последний интеграл можно представить в виде $\int \vec{r} dm = mR_C$, где R_C – радиус вектор центра масс тела относительно оси *O*. Таким образом,



$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\vec{a}\vec{R}_C).$$

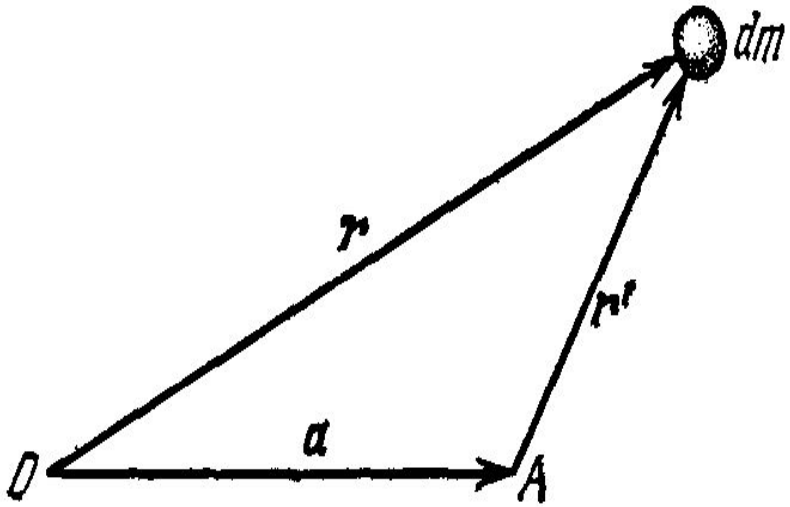
Теорема Гюйгенса-Штейнера

Допустим, что ось *O* проходит через центр масс тела. Тогда $\vec{R}_C = 0$, и предыдущая формула приобретает вид

$$I_A = I_C + ma^2.$$

Это важное соотношение называется теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a – расстояние между осями



Вычисление моментов инерции

- Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально. Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2 dm,$$

в котором r – расстояние от элемента массы dm до оси вращения.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения симметрии, теорему Гюйгенса-Штейнера и некоторые другие соображения.

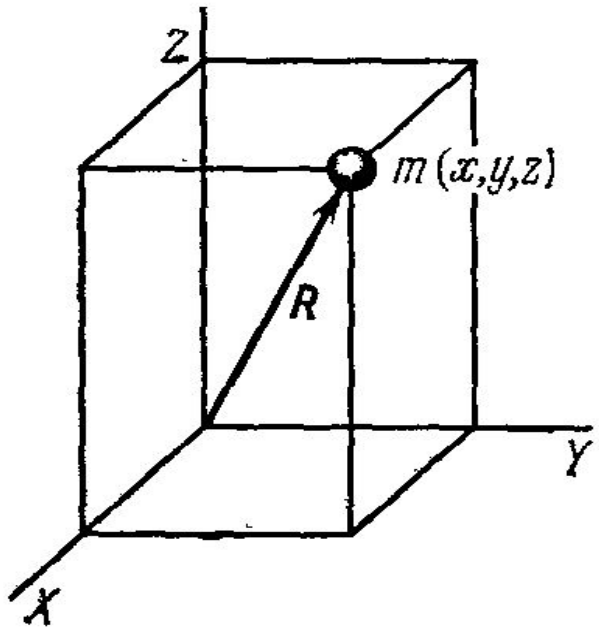
Момент инерции относительно точки

- Момент инерции точки является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений.

Моментом инерции относительно точки *O* называется сумма произведений масс материальных точек из которых тело состоит на квадраты расстояний *R* до точки *O*:

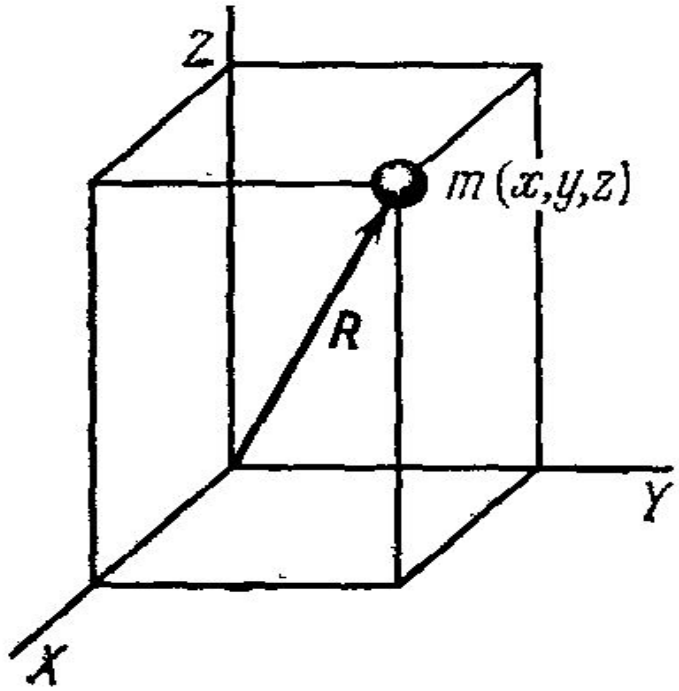
$$\Theta = \sum mR^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\Theta = \int R^2 dm.$



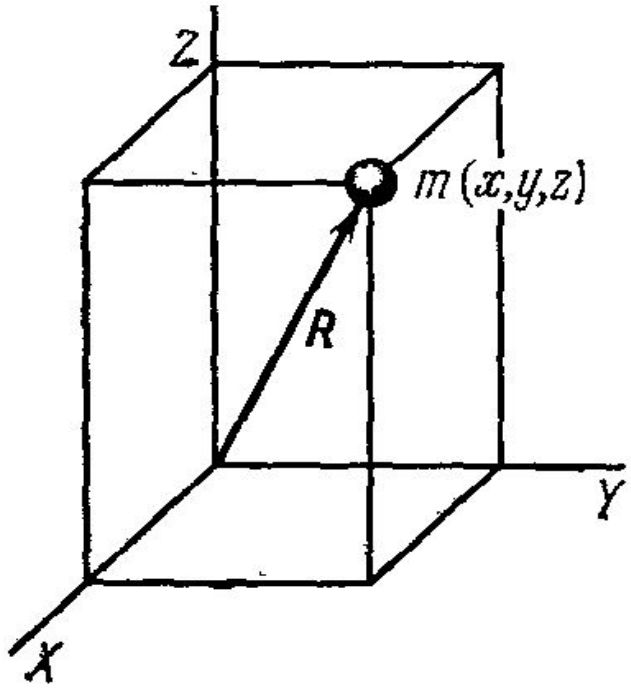
Момент инерции относительно точки

Момент Θ не следует смешивать с моментом инерции I относительно оси. В случае момента I массы dm умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента Θ - до неподвижной точки.



Момент инерции относительно точки

Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой *m* и с координатами *x, y, z* относительно прямоугольной системы координат. Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y Z равны соответственно $y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2$, а моменты инерции относительно тех же осей



$$I_x = m(y^2 + z^2),\ I_y = m(x^2 + z^2),\ I_z = (y^2 + x^2).$$

Момент инерции относительно точки

Сложив эти равенства, получим

$$I_x + I_y + I_z = 2m\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2mR^2 = 2\Theta.$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек.

Сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке *O*, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.

Момент инерции относительно точки

- Если повернуть координатные оси *X, Y, Z* относительно тела то моменты инерции I_x, I_y, I_z изменятся. Однако их сумма остается той же самой, так как она равна 2Θ, а величина Θ не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, сумма моментов инерции I_x, I_y, I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей

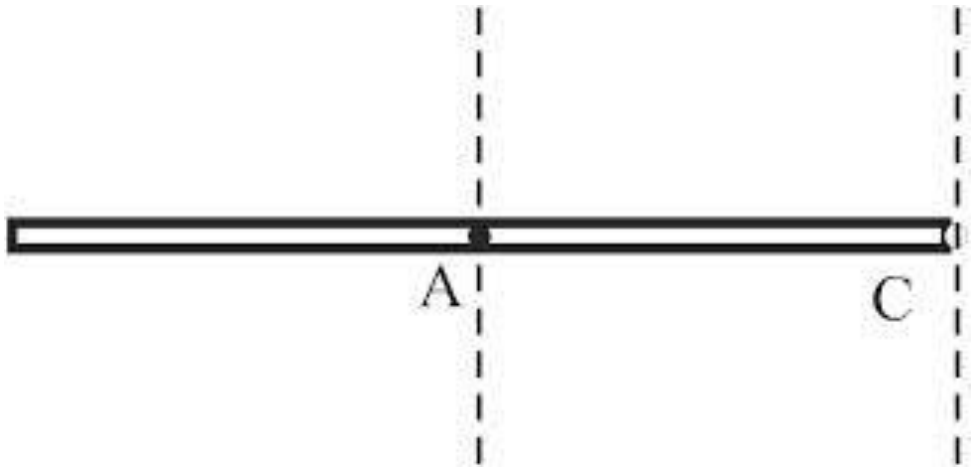
Момент инерции относительно точки

- Другое важное правило можно получить для случая плоского распределения масс. Допустим, что имеется тонкая пластинка произвольной формы. Примем ее плоскость за координатную плоскость *XY*. Тогда *z*- координаты всех материальных точек можно считать равными нулю, а потому момент инерции Θ относительно начала координат *O* представится выражением $\Theta = \sum \Delta m\left(x^2 + y^2\right)$, т.е. будет равен моменту инерции пластинки относительно оси *Z*. Таким образом, для плоской пластинки $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, т. е.

$$I_x + I_y = I_z.$$

Момент инерции тонкого стержня

Расположим начало координат в центре стержня длиной *L*, и ось *X* направим вдоль стержня. Геометрический центр стержня является, естественно и его центром масс. Обозначим как ρ массу единицы длины стержня. Тогда масса отрезка длины *dx* будет равна ρdx. Теперь мы можем вычислить момент инерции относительно центра масс I_C:

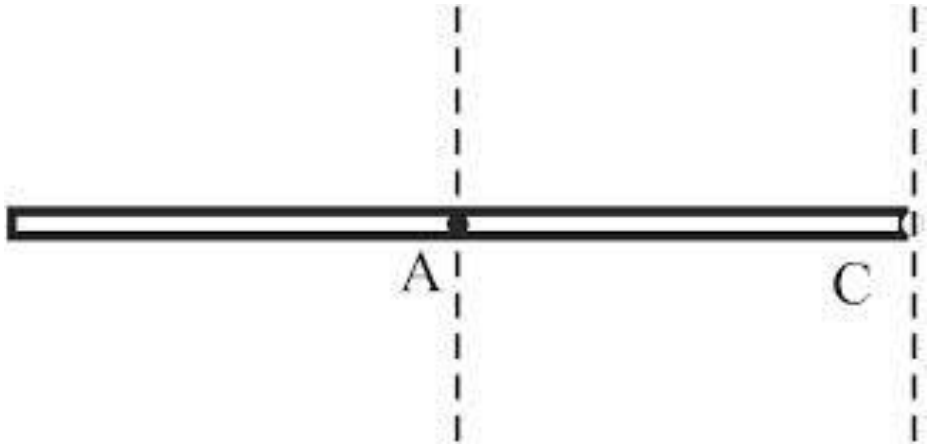


$$I_C = \int x^2 dm = 2\int_0^{L/2} \rho x^2 dx = \frac{ML^2}{12}.$$

Здесь $M = \rho L$ – масса стержня.

Момент инерции тонкого стержня

- Момент инерции относительно конца стержня найдем, используя теорему Гюйгенса-Штейнера $I = I_C + ma^2$. Для конца стержня $a = \frac{L}{2}$. В таком случае получаем



$$I = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}.$$

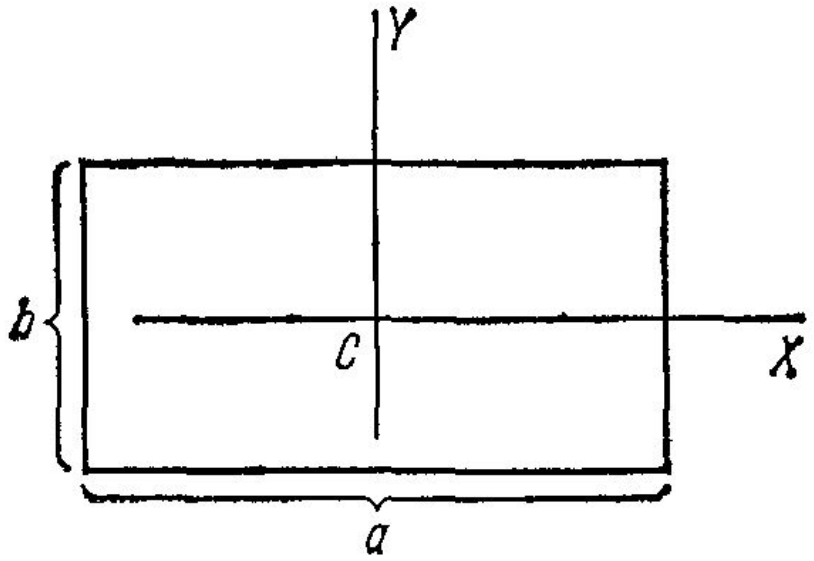
Момент инерции прямоугольной пластины

Задача вычисления моментов инерции I_x и I_y полностью аналогична задаче вычисления момента инерции стержня. Приведем результат:

$$I_x = \frac{Mb^2}{12},\ I_y = \frac{Ma^2}{12}.$$

Для нахождения момента инерции относительно оси *Z* воспользуемся формулой (

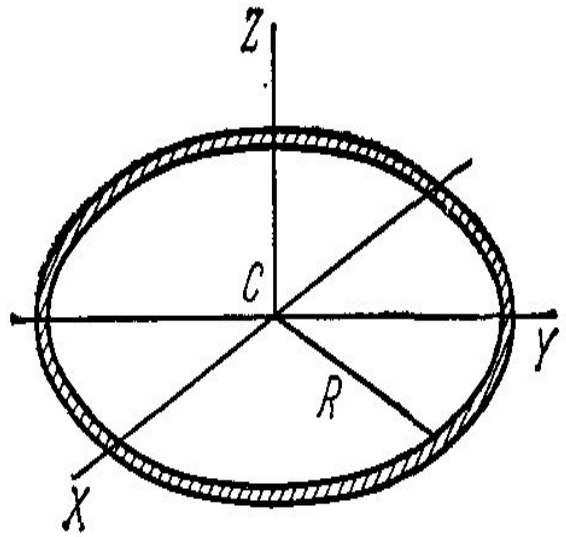
$$I_z = I_x + I_y = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$



Момент инерции тонкого кольца

Момент инерции кольца относительно оси Z

$$I = mR^2$$



. Ввиду симметрии $I_x = I_y$.

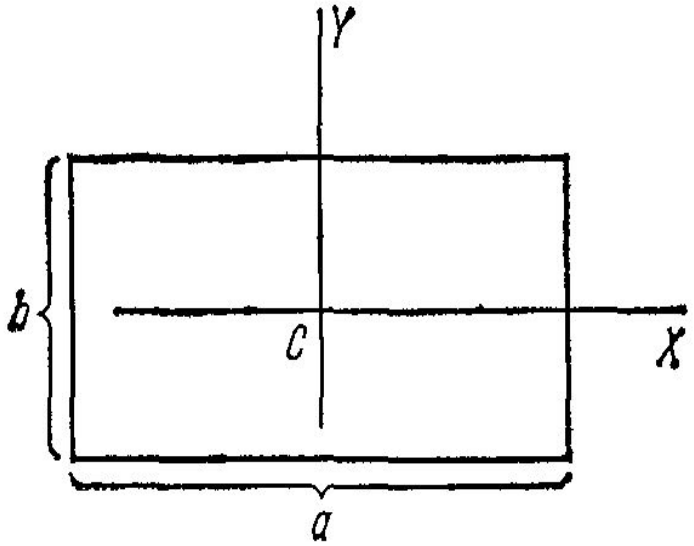
Поэтому

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2.$$

Момент инерции прямоугольной пластины

- Найдем с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера момент инерции пластины относительно оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через ее угол

$$I = \frac{M(a^2+b^2)}{12} + \frac{M(a^2+b^2)}{4} = \frac{M(a^2+b^2)}{3}.$$



Момент инерции диска и цилиндра

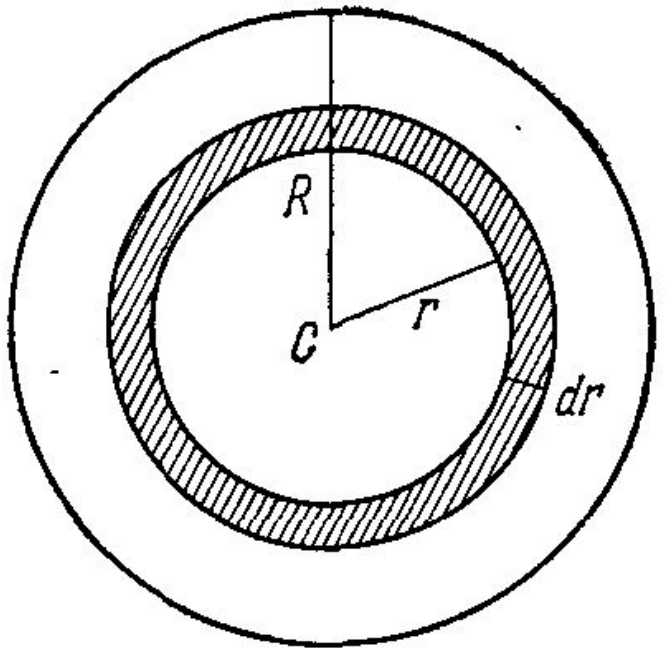
Ось *Z* проходит через центр диска *C* перпендикулярно к его плоскости

Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом *r* и наружным радиусом *r+dr*. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r dr$. Его момент инерции равен $dI_z = \int r^2 dm$. Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = r^2 dm$. Ввиду однородности диска $dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{rdr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2.$$

Момент инерции диска относительно диаметра вдвое меньше

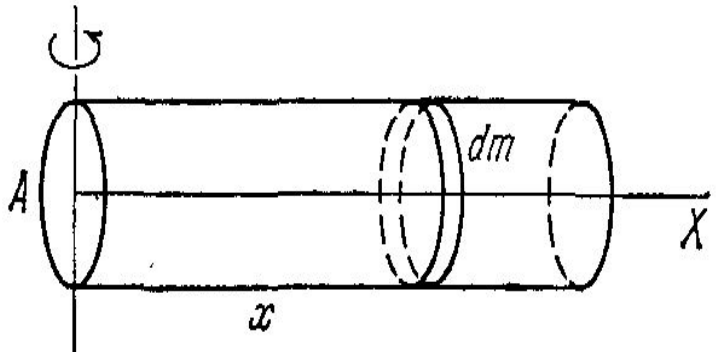
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2.$$



Момент инерции цилиндра

- Пусть ось вращения проходит через центр основания цилиндра *A* перпендикулярно к его продольной геометрической оси

Вырежем мысленно бесконечно короткий цилиндр с массой *dm*, находящийся от оси вращения на расстоянии *x*. Для его момента инерции по теореме Гюйгенса-Штейнера можно написать



$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4} dm \cdot R^2$$

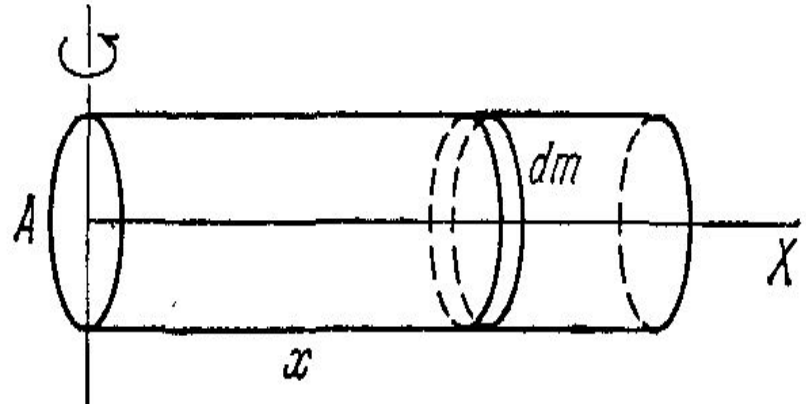
Момент инерции цилиндра

- Для момента инерции всего цилиндра

$$I_A = \int x^2 dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

Первое слагаемое в правой части совпадает с выражением для момента инерции бесконечно тонкого стержня, а потому равно $1/3\, ml^2$. Второе слагаемое равно $1/4\, mR^2$.

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2.$$

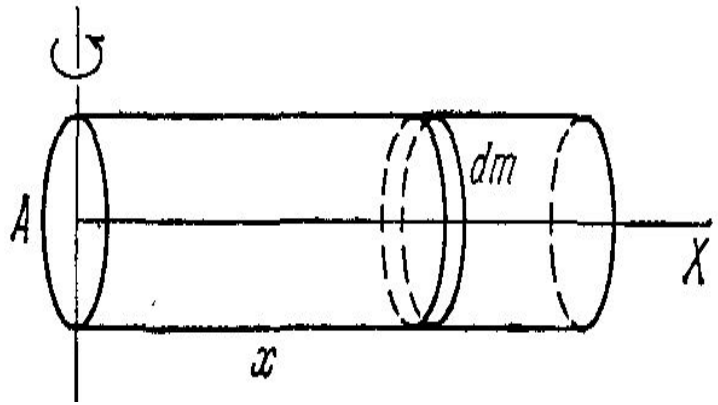


Момент инерции цилиндра

- Момент инерции I_C относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотами $l/2$ и массами $m/2$. Получим

$$I_C = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m R^2.$$

При $R \to 0$ формулы переходят в формулы для бесконечно тонкого стержня.



Момент инерции сферы

- Найдем момент инерции Θ относительно центра сферы. Он равен $\Theta = mR^2$.

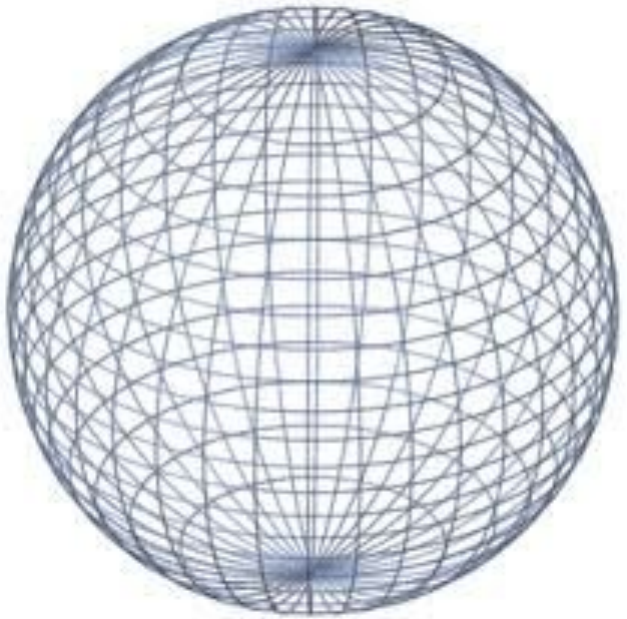
Затем применяем формулу

$$I_x + I_y + I_z = 2m\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2\Theta.$$

Ввиду симметрии $I_x = I_y = I_z = I$.

Момент инерции сферы относительно ее диаметра

$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$



Момент инерции шара

- Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm. Так как шар однороден, то $dm = m\frac{dV}{V}$,

где $dV = 4\pi r^2 dr$ – объем сферического слоя, а $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ – объем всего шара.

Момент инерции шара

- Момент инерции сферического слоя относительно диаметра

$$dI = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} m r^2.$$

Момент инерции смешара

До следующей лекции