# Лекция 8

## Движение твердых тел

# Твердое тело в механике

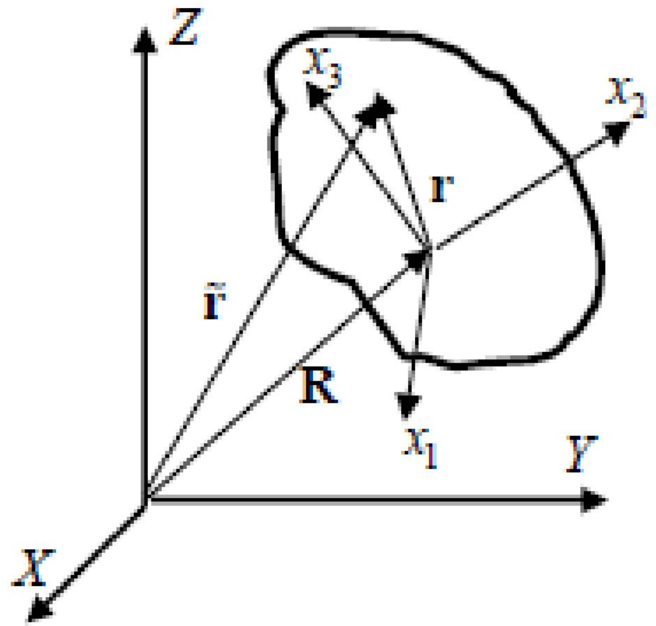
Твердым телом в механике называют неизменяемую систему материальных точек, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками остаются неизменными

# Координаты твердого тела

- Движение будем описывать с помощью двух систем отсчета (инерциальной системы *XYZ* и системы координат $x_1$ $x_2$, $x_3$ (или $x$, $y$, $z$), жестко связанной с телом и участвующей во всех его движениях. Для задания положения тела в неподвижной системе отсчета необходимо задание 6 чисел, три координаты для задания начала отсчета подвижной системы и три угла для ориентации ее осей относительно неподвижной системы, т.е. твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Положение точки тела относительно неподвижной системы отсчета задается выражением:

$$\tilde{r} = \vec{R} + \vec{r},$$



# Вращение твердого тела

Введем вектор поворота $\vec{\varphi}$, пропорциональный по величине $\varphi$ и направленный вдоль оси вращения твердого тела. Выбранная точка движется по окружности радиуса $rsin\theta$, откуда $|dr| = rsin\theta d\varphi$. Для $\overrightarrow{dr}$ получается следующее выражение:

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r}.$$

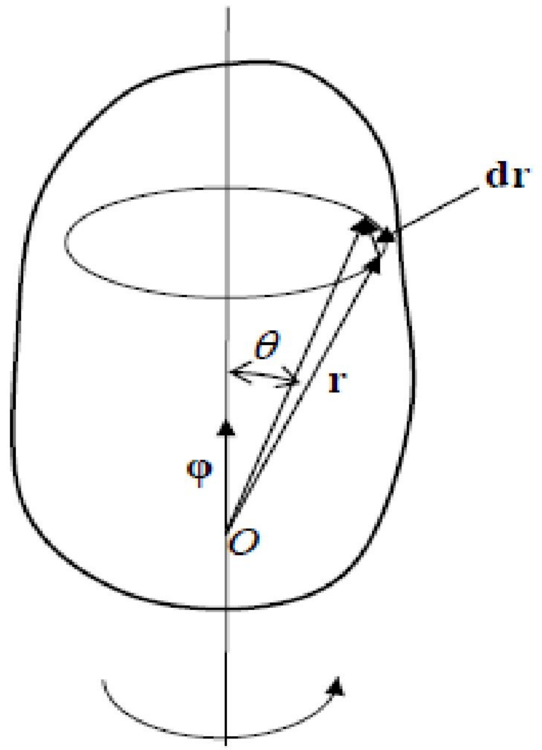
Вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Модуль скорости $v = \omega r \sin\theta = \omega R$, где $R$ – расстояние до оси. Для ускорения получим:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Здесь первый член – это тангенциальное ускорение, второй член – нормальное ускорение по модулю равное $v^2/R$.



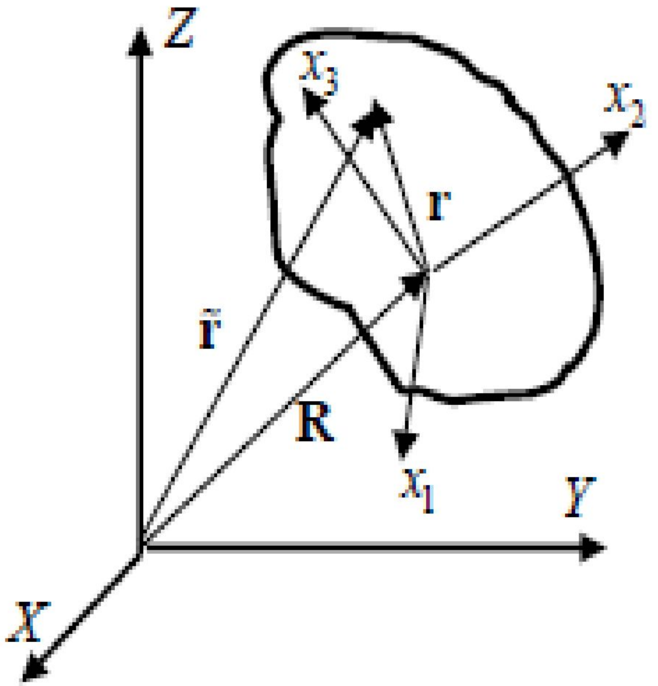
# Вращение твердого тела

- Найдем скорость точки твердого тела:

$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$.

При чисто поступательном движении линия между двумя произвольными точками на теле перемещается параллельно самой себе

При чисто вращательном движении начало отсчета неподвижно, а тело совершает движение вокруг некоторой оси.



# Вращение твердого тела

- Пусть центр подвижной системы сдвинули на вектор $\vec{a}$, так что $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$.

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{a}] + [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

По определению

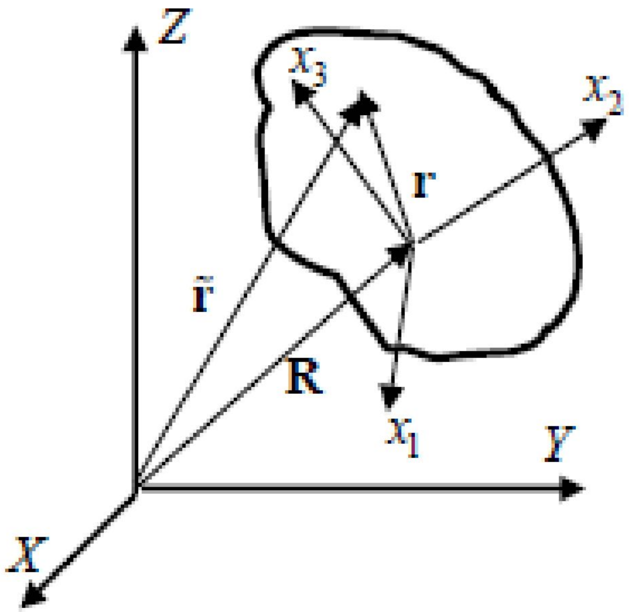
$$\vec{v} = \vec{V}' + \left[\overrightarrow{\omega'} \times \vec{r}\right].$$

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{V'} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{a}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}'.$$

Угловая скорость не зависит от выбора начала отсчета

Скорость поступательного движения абсолютного характера не имеет.

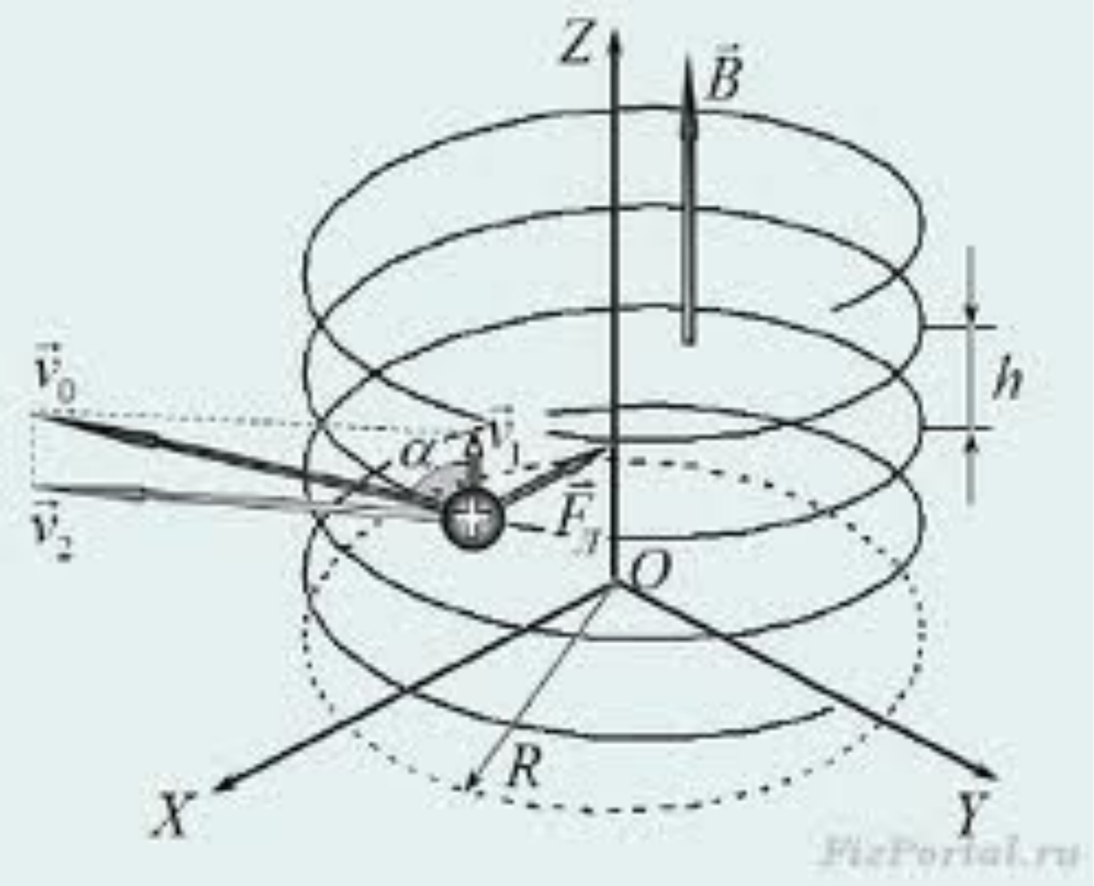


# Вращение твердого тела

- Если поступательная скорость направлена параллельно вектору угловой скорости, то тело движется по винтовой линии.

Поэтому достаточно рассмотреть движение в плоскости, перпендикулярной угловой скорости - $\vec{V} \perp \vec{\omega}$. Такое движение твердого тела называется плоским. В этом случае существует точка скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Ось, проходящая через точку, называется мгновенной осью вращения.



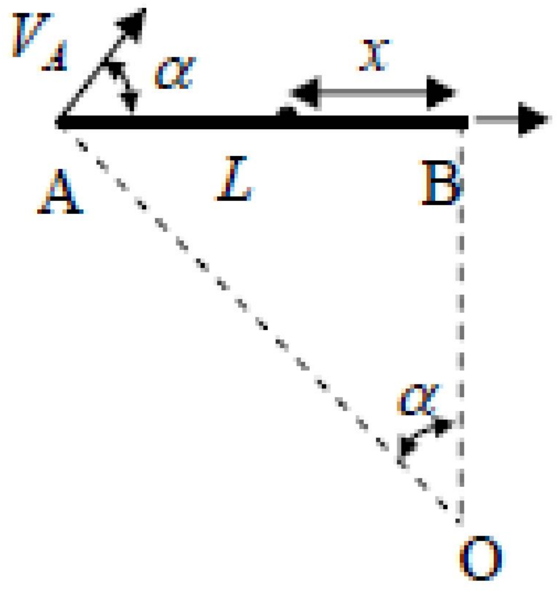
# Мгновенная ось вращения

У катящегося по дороге со скоростью *V* колеса нижняя точка неподвижна и, следовательно является мгновенной осью вращения.

Центр колеса движется со скоростью *V*, а верхняя точка – со скоростью *2V*.

# Мгновенная ось вращения

- Следующий пример демонстрирует простейший алгоритм нахождения мгновенной оси вращения.
- Пусть левый конец стержня двигается с мгновенной скоростью $\vec{V}_A$ под углом $\alpha$ к стержню, а правый конец (точка *B*) смещается вправо вдоль стержня. Скорости концов стержня должны быть перпендикулярны к радиус-векторам, проведенным от оси вращения. В таком случае, мгновенной осью вращения будет точка пересечения перпендикуляров к скоростям концов стержня, восстановленных из точек *A* и *B* (точка *O*).



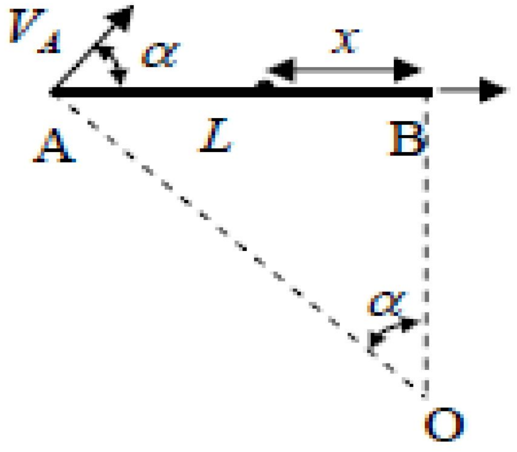
# Мгновенная ось вращения

- Найдем скорость точки стержня, расположенной на расстоянии *x* от его правого конца. С этой целью найдем угловую скорость вращения

$$\omega = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_A}{L} \sin\alpha.$$

Тогда скорость интересующей нас точки

$$V_x = \omega\sqrt{(OB)^2 + x^2} = \frac{V_A}{L}\sin\alpha\sqrt{\frac{L^2}{(tg\alpha)^2} + x^2}$$



# Момент импульса вращающегося тела

- Применим к рассмотрению вращательного движения тела уравнение моментов сил и импульса. За неподвижную ось моментов удобно выбрать ось вращения. Если материальная точка вращается по окружности радиуса *r*, то момент ее импульса относительно оси вращения равен $L = mvr$. Пусть $\omega$ - угловая скорость вращения,

Тогда

$$v = \omega r,$$

а момент импульса

$$L = mr^2\omega.$$

# Момент импульса вращающегося тела

Если вокруг оси $O$ вращается система материальных точек (например, твердое тело) с одной угловой скоростью $\omega$, то

$$L = \sum mr^2\omega,$$

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину $\omega$ как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega,$$

где

$$I = \sum m_i r_i^2.$$

# Момент импульса вращающегося тела

- Величина *I*, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения называется моментом инерции системы относительно этой оси.

Уравнение

$$L = I\omega$$

показывает, что при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

# Динамика вращательного движения

- При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси момент инерции остается постоянным и, используя определение момента сил (лекция 7), можно записать:

$$M = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Где *M* – момент внешних сил относительно оси вращения. Это – основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы исполняет момент инерции *I*, роль скорости – угловая скорость $\omega$, роль силы – момент силы *M*, роль импульса – момент импульса *L*.

# Динамика вращательного движения

- Аналогия между движением материальной точки и вращением может быть прослежена дальше.

Если тело вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$. Итак, для твердого тела:

$$dA = Md\varphi.$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения – угловое перемещение.

# Кинетическая энергия вращающегося тела

- Поскольку скорость *i*-той частицы вращающегося твердого тела

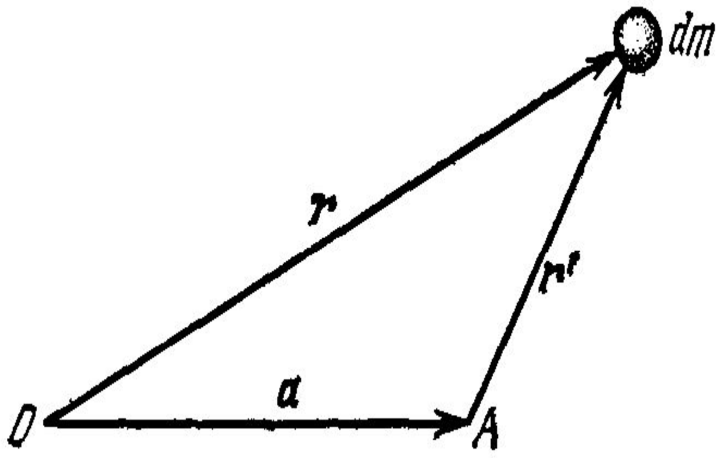
$$v_i = r_i\omega$$

$$K = \sum m_i v_i^2/2 = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2/2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}.$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m \to I, v \to \omega, p \to L$.

# Теорема Гюйгенса-Штейнера

- Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках $O$ и $A$. Разобьем мысленно тело на элементарные массы $dm$. Радиус-векторы одной из них, проведенные от осей $O$ и $A$ параллельно плоскости рисунка, обозначим $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ соответственно.



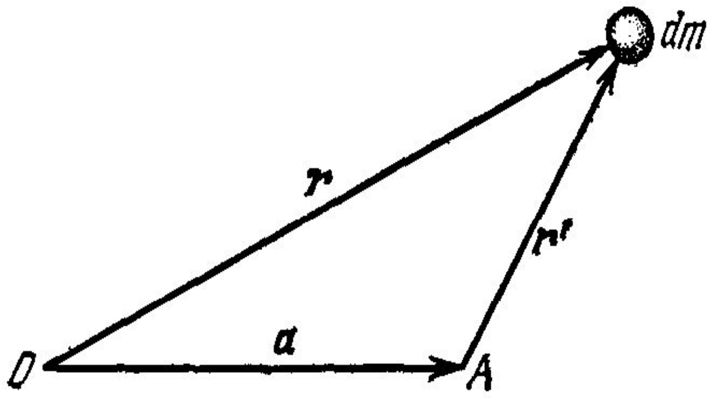
# Теорема Гюйгенса-Штейнера

Тогда $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, где $\vec{a}$ означает радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$.

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a}\vec{r}),$$

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{r} dm.$$

Интеграл слева есть момент инерции тела $I_A$ относительно оси $A$, первый интеграл справа – момент инерции относительно оси $O$. Последний интеграл можно представить в виде $\int \vec{r} dm = mR_C$, где $R_C$ – радиус вектор центра масс тела относительно оси $O$. Таким образом,




$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\vec{a}\vec{R}_C).$$

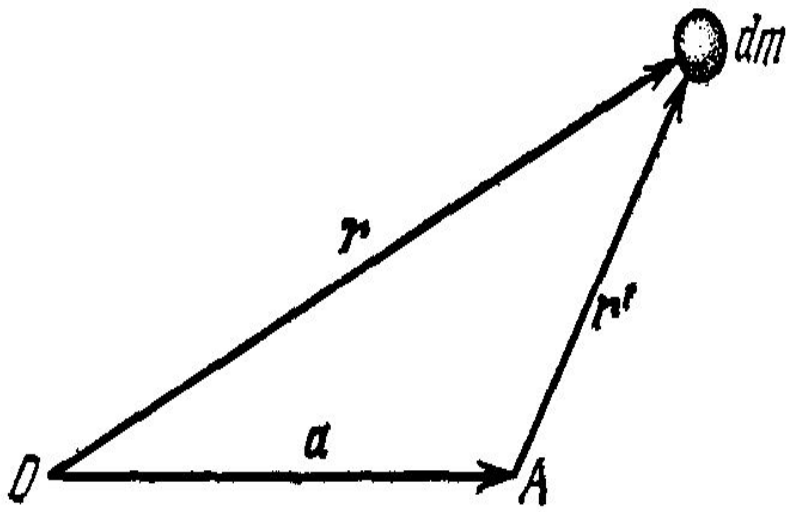
# Теорема Гюйгенса-Штейнера

- Допустим, что ось $O$ проходит через центр масс тела. Тогда $\vec{R}_C = 0$, и предыдущая формула приобретает вид

$$I_A = I_C + ma^2.$$

Это важное соотношение называется теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной $ma^2$, где $a$ – расстояние между осями



# Вычисление моментов инерции

- Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально. Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2 dm,$$

в котором *r* – расстояние от элемента массы *dm* до оси вращения.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения симметрии, теорему Гюйгенса-Штейнера и некоторые другие соображения.

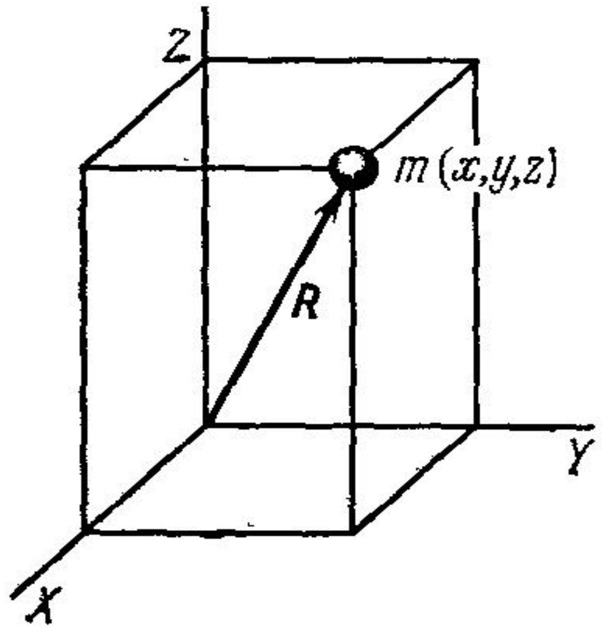
# Момент инерции относительно точки

- Момент инерции точки является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений.

Моментом инерции относительно точки *O* называется сумма произведений масс материальных точек из которых тело состоит на квадраты расстояний *R* до точки *O*:

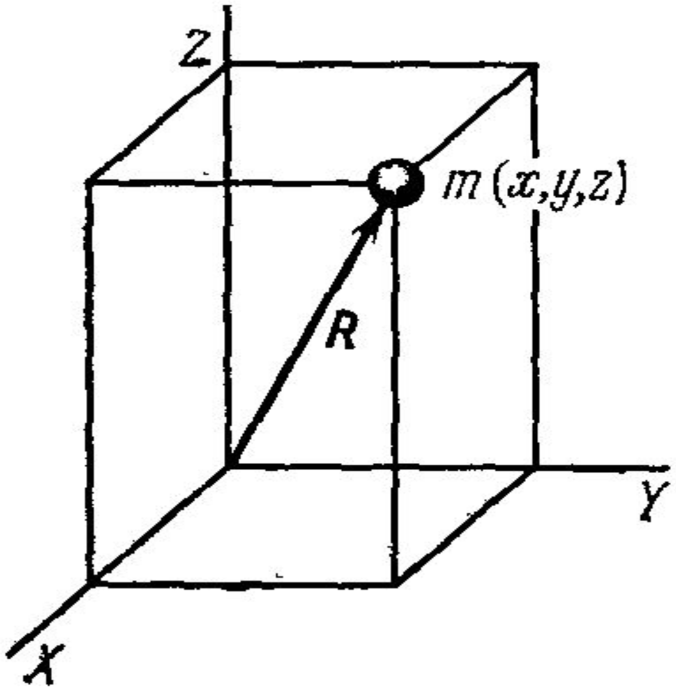
$$\Theta = \sum mR^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\Theta = \int R^2 dm$.



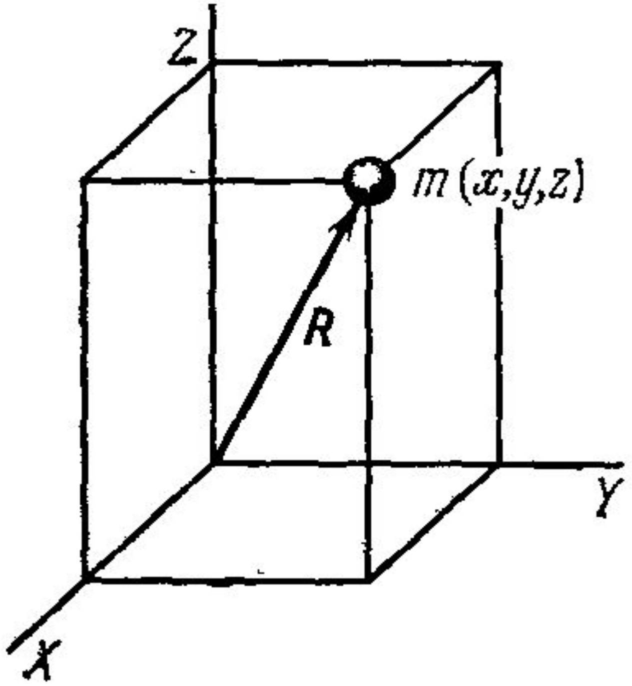
# Момент инерции относительно точки

Момент *Θ* не следует смешивать с моментом инерции *I* относительно оси. В случае момента *I* массы d*m* умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента *Θ* - до неподвижной точки.



# Момент инерции относительно точки

- Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой *m* и с координатами *x, y, z* относительно прямоугольной системы координат. Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y Z равны соответственно $y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2$, а моменты инерции относительно тех же осей




$$I_x = m(y^2 + z^2),\ I_y = m(x^2 + z^2),\ I_z = (y^2 + x^2).$$

# Момент инерции относительно точки

- Сложив эти равенства, получим

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2 + y^2 + z^2) = 2mR^2 = 2\Theta.$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек.

Сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке *O*, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.

# Момент инерции относительно точки

- Если повернуть координатные оси *X, Y, Z* относительно тела то моменты инерции $I_x, I_y, I_z$ изменятся. Однако их сумма остается той же самой, так как она равна $2\Theta$, а величина $\Theta$ не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, сумма моментов инерции $I_x, I_y, I_z$ относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется с изменением ориентации осей

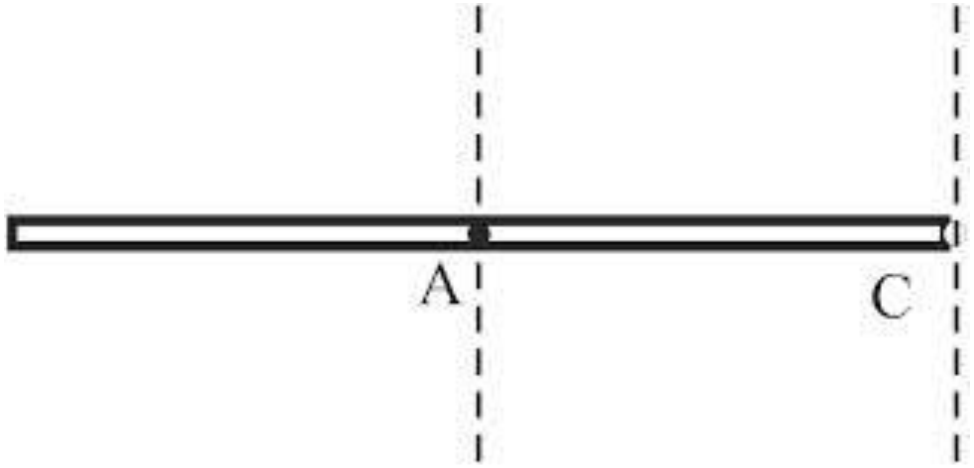
# Момент инерции относительно точки

- Другое важное правило можно получить для случая плоского распределения масс. Допустим, что имеется тонкая пластинка произвольной формы. Примем ее плоскость за координатную плоскость *XY*. Тогда *z*- координаты всех материальных точек можно считать равными нулю, а потому момент инерции $\Theta$ относительно начала координат *O* представится выражением $\Theta = \sum \Delta m\left(x^2 + y^2\right)$, т.е. будет равен моменту инерции пластинки относительно оси *Z*. Таким образом, для плоской пластинки $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, т.е.

$$I_x + I_y = I_z.$$

# Момент инерции тонкого стержня

- Расположим начало координат в центре стержня длиной $L$, и ось $X$ направим вдоль стержня. Геометрический центр стержня является, естественно и его центром масс. Обозначим как $\rho$ массу единицы длины стержня. Тогда масса отрезка длины $dx$ будет равна $\rho dx$. Теперь мы можем вычислить момент инерции относительно центра масс $I_C$:



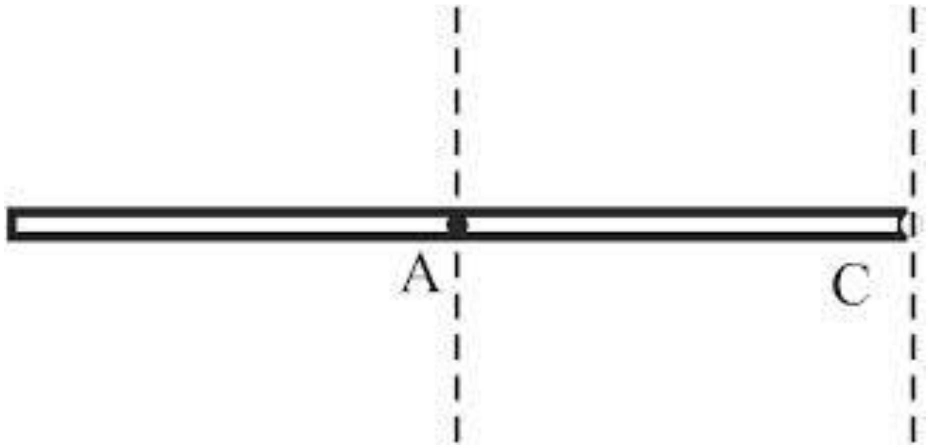

$$I_C = \int x^2 dm = 2\int_0^{L/2} \rho x^2 dx = \frac{ML^2}{12}.$$

Здесь $M = \rho L$ – масса стержня.

# Момент инерции тонкого стержня

- Момент инерции относительно конца стержня найдем, используя теорему Гюйгенса-Штейнера $I = I_C + ma^2$. Для конца стержня $a = \frac{L}{2}$. В таком случае получаем

$$I = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}.$$



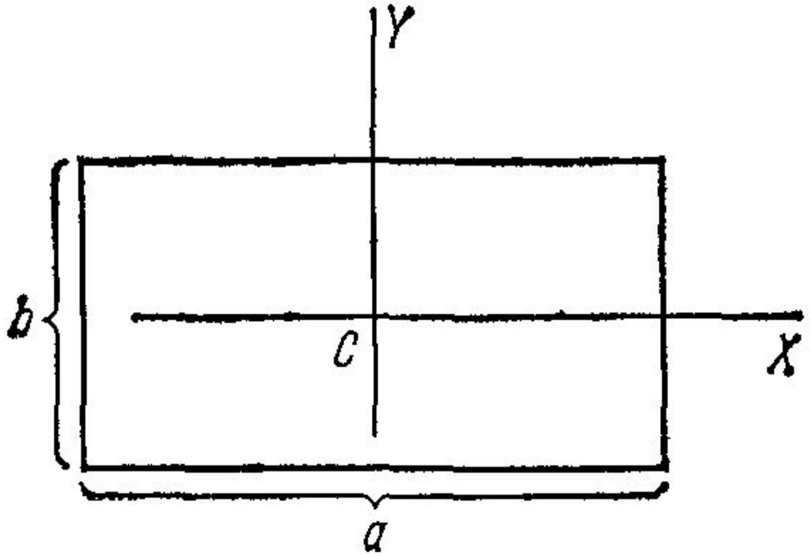
# Момент инерции прямоугольной пластины

- Задача вычисления моментов инерции $I_x$ и $I_y$ полностью аналогична задаче вычисления момента инерции стержня. Приведем результат:

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}, \quad I_y = \frac{Ma^2}{12}.$$

Для нахождения момента инерции относительно оси $Z$ воспользуемся формулой (

$$I_z = I_x + I_y = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$



# Момент инерции тонкого кольца

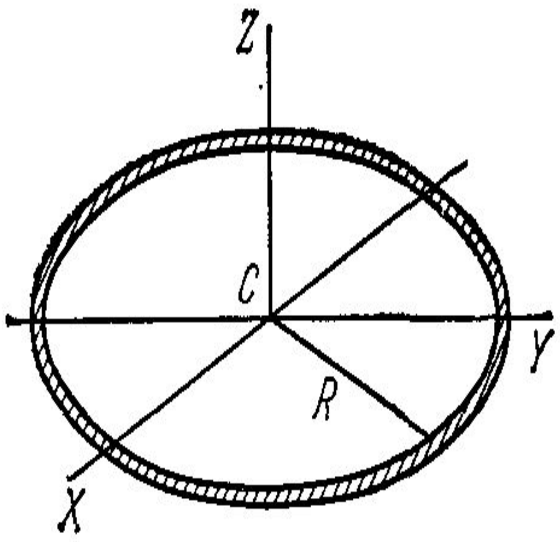
- Момент инерции кольца относительно оси $Z$

$$I = mR^2$$

. Ввиду симметрии $I_x = I_y$.

Поэтому

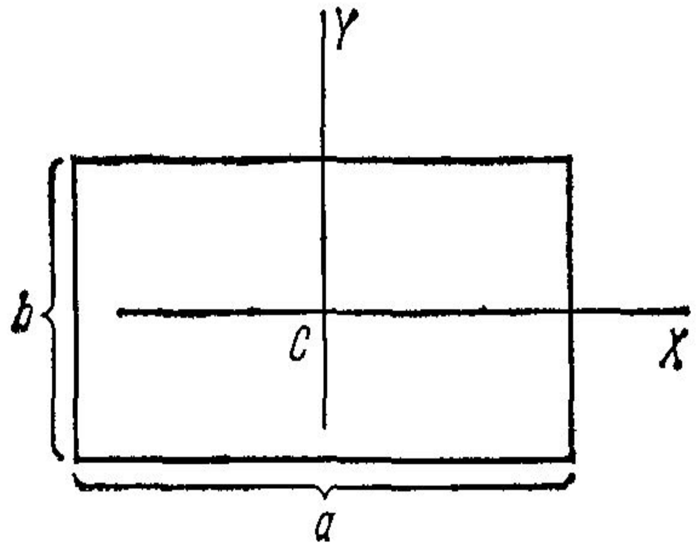
$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mR^2.$$



# Момент инерции прямоугольной пластины

- Найдем с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера момент инерции пластины относительно оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через ее угол

$$I = \frac{M(a^2+b^2)}{12} + \frac{M(a^2+b^2)}{4} = \frac{M(a^2+b^2)}{3}.$$



# Момент инерции диска и цилиндра

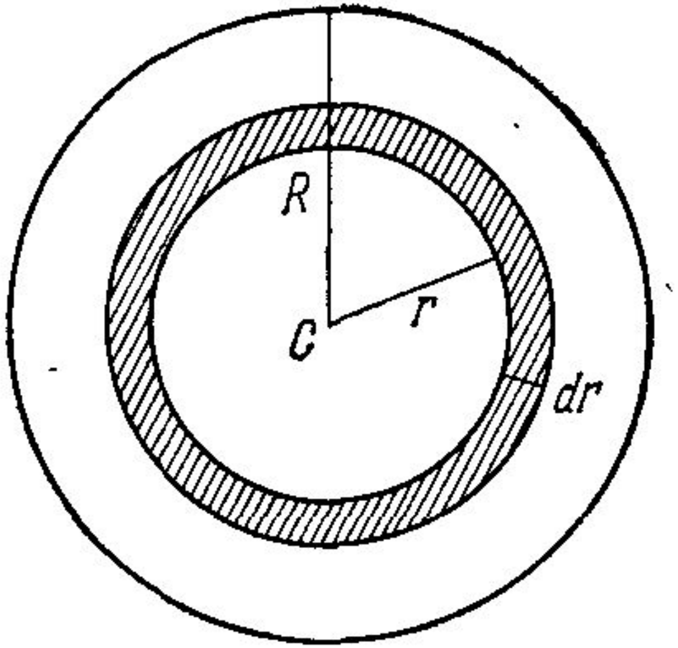
- Ось $Z$ проходит через центр диска $C$ перпендикулярно к его плоскости

Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом $r$ и наружным радиусом $r+dr$. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r dr$. Его момент инерции равен $dI_z = \int r^2 dm$. Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = r^2 dm$. Ввиду однородности диска $dm = m\frac{dS}{S} = 2m\frac{rdr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ – площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}mR^2.$$

Момент инерции диска относительно диаметра вдвое меньше

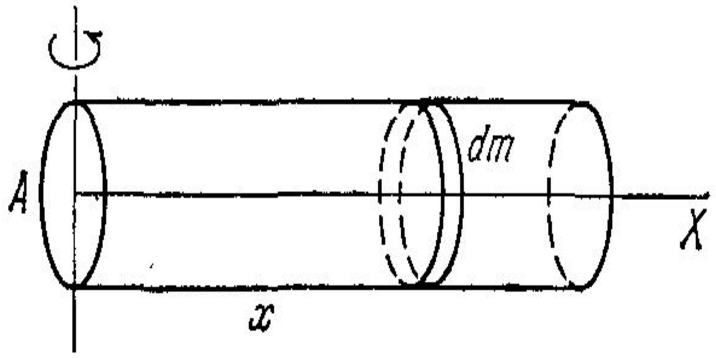
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mR^2.$$



# Момент инерции цилиндра

- Пусть ось вращения проходит через центр основания цилиндра *A* перпендикулярно к его продольной геометрической оси

Вырежем мысленно бесконечно короткий цилиндр с массой *dm*, находящийся от оси вращения на расстоянии *x*. Для его момента инерции по теореме Гюйгенса-Штейнера можно написать




$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4} dm \cdot R^2$$

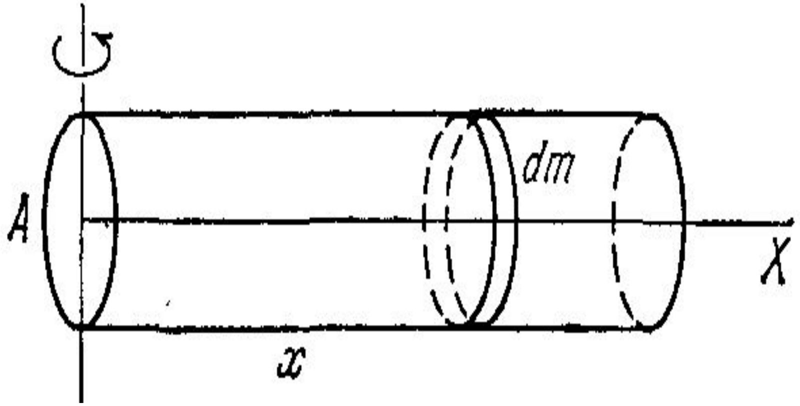
# Момент инерции цилиндра

Для момента инерции всего цилиндра

$$I_A = \int x^2 dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

Первое слагаемое в правой части совпадает с выражением для момента инерции бесконечно тонкого стержня, а потому равно $1/3\, ml^2$. Второе слагаемое равно $1/4\, mR^2$.

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2.$$

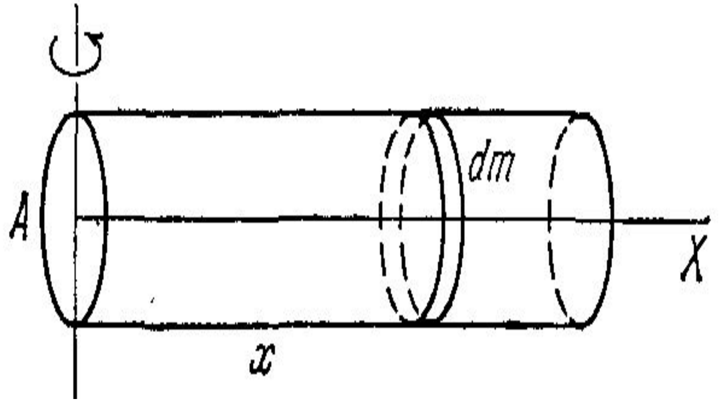


# Момент инерции цилиндра

- Момент инерции $I_C$ относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотами $l/2$ и массами $m/2$. Получим

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}mR^2.$$

При $R \to 0$ формулы переходят в формулы для бесконечно тонкого стержня.



# Момент инерции сферы

- Найдем момент инерции $\Theta$ относительно центра сферы. Он равен $\Theta = mR^2$.

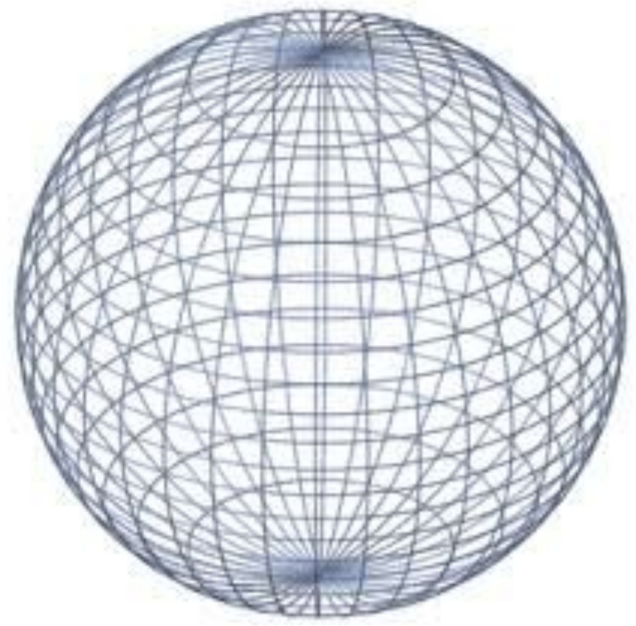
Затем применяем формулу

$I_x + I_y + I_z = 2m\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2\Theta.$

Ввиду симметрии $I_x = I_y = I_z = I$.

Момент инерции сферы относительно ее диаметра

$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$



# Момент инерции шара

Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами *dm*. Так как шар однороден, то $dm = m\frac{dV}{V}$,

где $dV = 4\pi r^2 dr$ – объем сферического слоя, а $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ – объем всего шара.

# Момент инерции шара

- Момент инерции сферического слоя относительно диаметра

$$dI = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} m r^2.$$

# Момент инерции смешара

# До следующей лекции