Лекция 3

Затухающий гармонический осциллятор

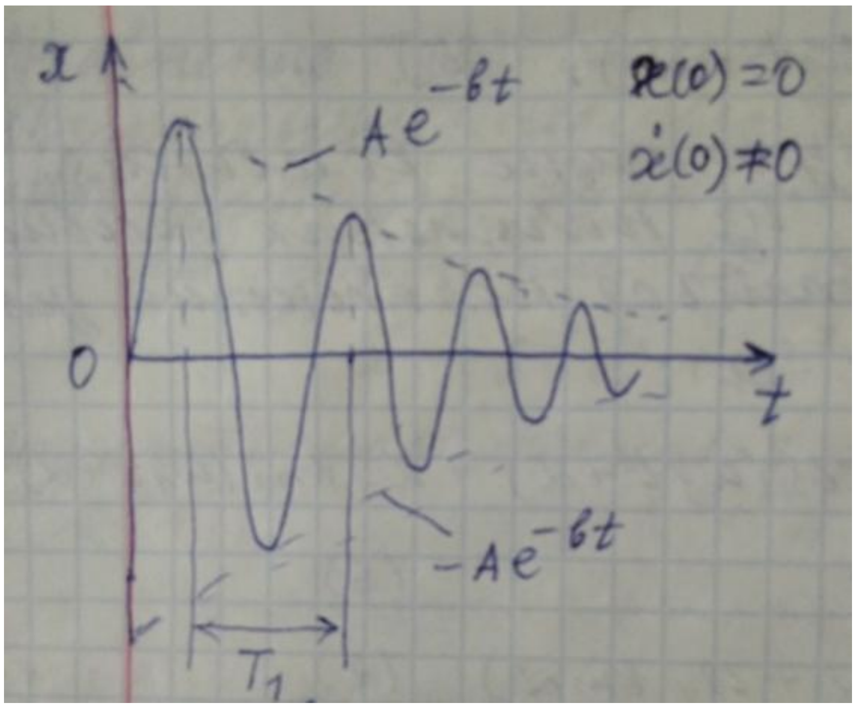
$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

Ñëó÷àé 1) Ñëàáîå çàòóõàíèå $b < \omega_0$

$$x(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha) \qquad (5)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

Время релаксации. Логарифмический декремент затухания



$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$ – условный период

$$A_m = Ae^{-bt} \qquad (10)$$

$$\tau = \frac{1}{b}$$ – время релаксации

$\theta = bT_1$ – логарифмический декремент затухания

$$\frac{A_m(t)}{A_m(t+T_1)} = \frac{Ae^{-bt}}{Ae^{-b(t+T_1)}} = e^{bT_1} = e^{\theta}$$

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\theta}$$

$$Q = \frac{\pi}{bT_1} = \frac{\omega_1}{2b} = \frac{1}{2b}\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

при малом затухании b **много меньше** ω_0

$$Q = \frac{\omega_0}{2b}$$

Энергия пружинного маятника

$$W = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}}$$

$$W_{\text{кин}} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$W_{\text{пот}} = W_{\text{пот1}} + W_{\text{пот2}}$$

$$W_{\text{пот}1} = -mgx$$

$$W_{\text{пот}2} = \frac{k(x + \tilde{\ }x)^2}{2} - \frac{\tilde{k}x^2}{2} = \frac{kx(x + \tilde{2}x)}{2}$$

$$W_{\text{пот}} = x\left(-mg + \frac{kx}{2} + \tilde{k}x\right) = \frac{kx^2}{2}$$

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

при малом затухании

при $\dot{x} = 0 \quad x \approx \pm A_m$

$$W = \frac{kA_m^2}{2} = \frac{kA^2}{2}e^{-2bt}$$

$$W_0 = \frac{kA^2}{2}$$

$$W(t) = W_0 e^{-2bt}$$

$$\Delta W = W(t) - W(t + T_1)$$

$$\frac{\Delta W}{W(t)} = \frac{W_0 e^{-2bt} - W_0 e^{-2b(t+T_1)}}{W_0 e^{-2bt}} = 1 - e^{-2bT_1} = 1 - e^{-2\theta}$$

$$e^{-2\theta} \approx 1 - 2\theta$$

$$\frac{\Delta W}{W(t)} = 2\theta$$

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{2\pi W}{\Delta W}$$

Ñëó÷àé 2) Ñèëüí î å çàòóõàí èå $b > \omega_0$

$\dot{x} + 2bx + \omega_0^2 x = 0$ (1)

$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$ (3)

(3) – õàðàêòåðèñòè÷åñêî å óðàâí åí èå

$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$ (4)

(4) –î áù åå ðåø åí èå äèô. óðàâí åí èÿ (1)

Ï ðè $b > \omega_0$ λ_1 è λ_2 âåù åñòâåí í û

$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$

B_1 è B_2 –âåù åñòâåí í û å ï î ñòî ÿí í û å

$t \to \infty$ $x(t) \to 0$

Линейные системы с «отрицательным» трением

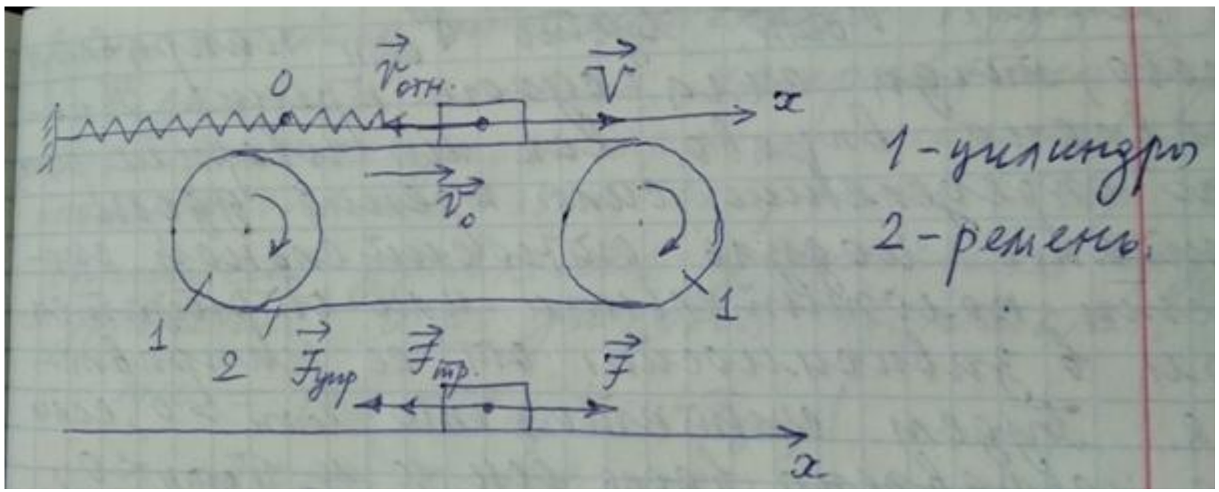
$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

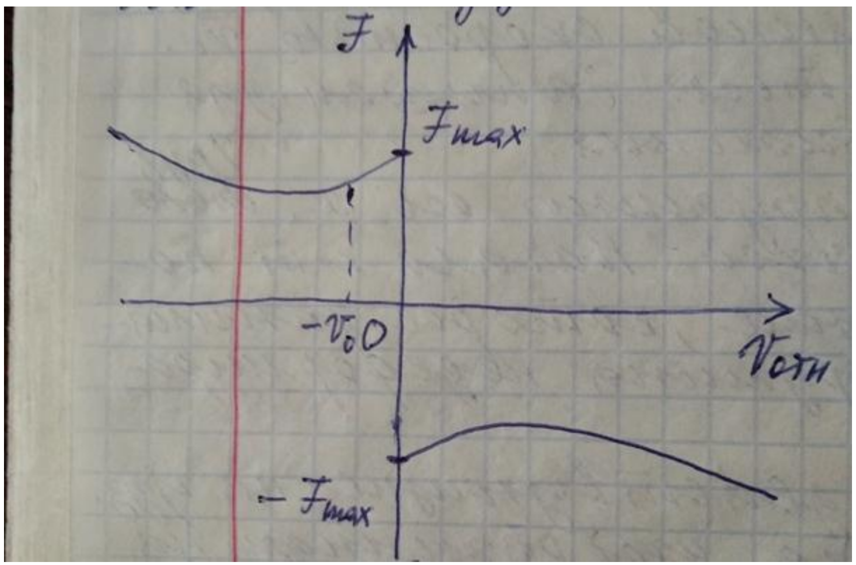
$$2b = \frac{h}{m} > 0 \quad \text{èëè} \quad 2b = \frac{R}{L} > 0$$

Åñëè $b < 0$, ñèñòåì à í àçû âàåòñÿ

ñèñòåì î é ñ "î òðèöàòåëüí û ì " òðåí èåì

Пример механической системы с «отрицательным» трением





$$F = f(\mathrm{v}_{\text{îòí}})$$

$$m\ddot{x} = |F| - |F_{\text{òð}}| - |F_{\text{óï ð}}|$$

$$F > 0$$

$$|F| = F = f(\mathrm{v}_{\text{î òí}})$$

$$V = \dot{x} > 0 \qquad F_{\text{òð}} < 0$$

$$|F_{\text{òð}}| = -F_{\text{òð}} = hV = h\dot{x}$$

$$F_{\text{óï ð}} > 0$$

$$|F_{\text{óï ð}}| = F_{\text{óï ð}} = kx$$

$$m\ddot{x} = f(\mathrm{v}_{\text{î òí}}) - h\dot{x} - kx \qquad (1)$$

$$\vec{V} = \vec{\mathrm{v}}_{\text{î òí}} + \vec{\mathrm{v}}_0$$

$$\left|V\right| = -\left|\mathrm{v}_{\text{î òí}}\right| + \mathrm{v}_0$$

$$\left|V\right| = V = \dot{x}$$

$$\left|\mathrm{v}_{\text{î òí}}\right| = -\mathrm{v}_{\text{î òí}}$$

$$\dot{x} = \mathrm{v}_{\text{î òí}} + \mathrm{v}_0$$

$$\mathrm{v}_{\text{î òí}} = \dot{x} - \mathrm{v}_0$$

$$F = f(\mathrm{v}_{\text{î òí}}) = f(\dot{x} - \mathrm{v}_0) = f(-\mathrm{v}_0) + f'(-\mathrm{v}_0)\dot{x}$$

$$f'(-\mathrm{v}_0) > 0$$

$$m\ddot{x} = f(-\mathrm{v}_0) + f'(-\mathrm{v}_0)\dot{x} - h\dot{x} - kx$$

$$m\ddot{x} + [h - f'(-\mathrm{v}_0)]\dot{x} + kx = f(-\mathrm{v}_0) \qquad (2)$$

(2) − í åî äí î ðî äí î å óðàâí åí èå

$$kx - f(-\mathrm{v}_0) = kz$$

$$z = x - \frac{f(-\mathrm{v}_0)}{k}$$

$$\dot{z} = \dot{x} \qquad \ddot{z} = \ddot{x}$$

$$m\ddot{z} + [h - f'(-\mathrm{v}_0)]\dot{z} + kz = 0 \qquad \left|\frac{1}{m}\right.$$

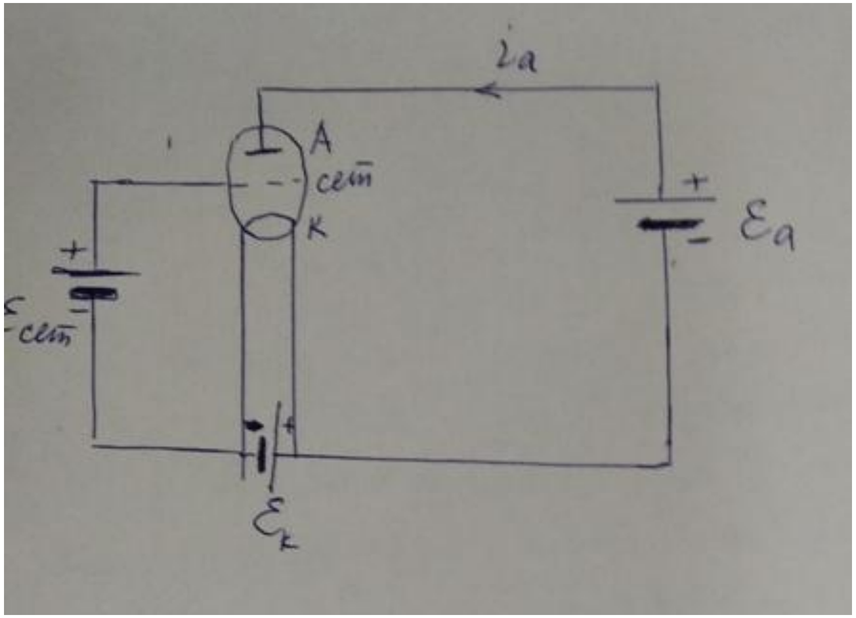
$$\ddot{z} + \frac{h - f'(-\mathrm{v}_0)}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

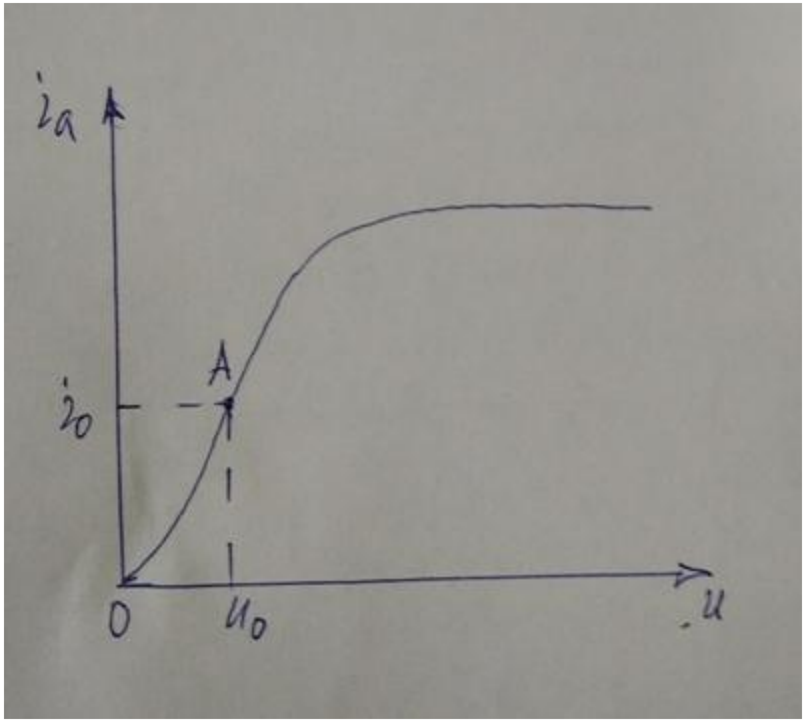
$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{h - f'(-\mathrm{v}_0)}{m} = 2b$$

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \qquad (3)$$

åñëè $f'(-\mathrm{v}_0) > h$, òî $b < 0$

генератор электромагнитных колебаний





$$u = u_{\text{ñåò}} + Du_{a}$$

$$u_{\text{ñåò}} = \varphi_{\text{ñåò}} - \varphi_{\hat{e}}$$

$$u_{a} = \varphi_{a} - \varphi_{\hat{e}}$$

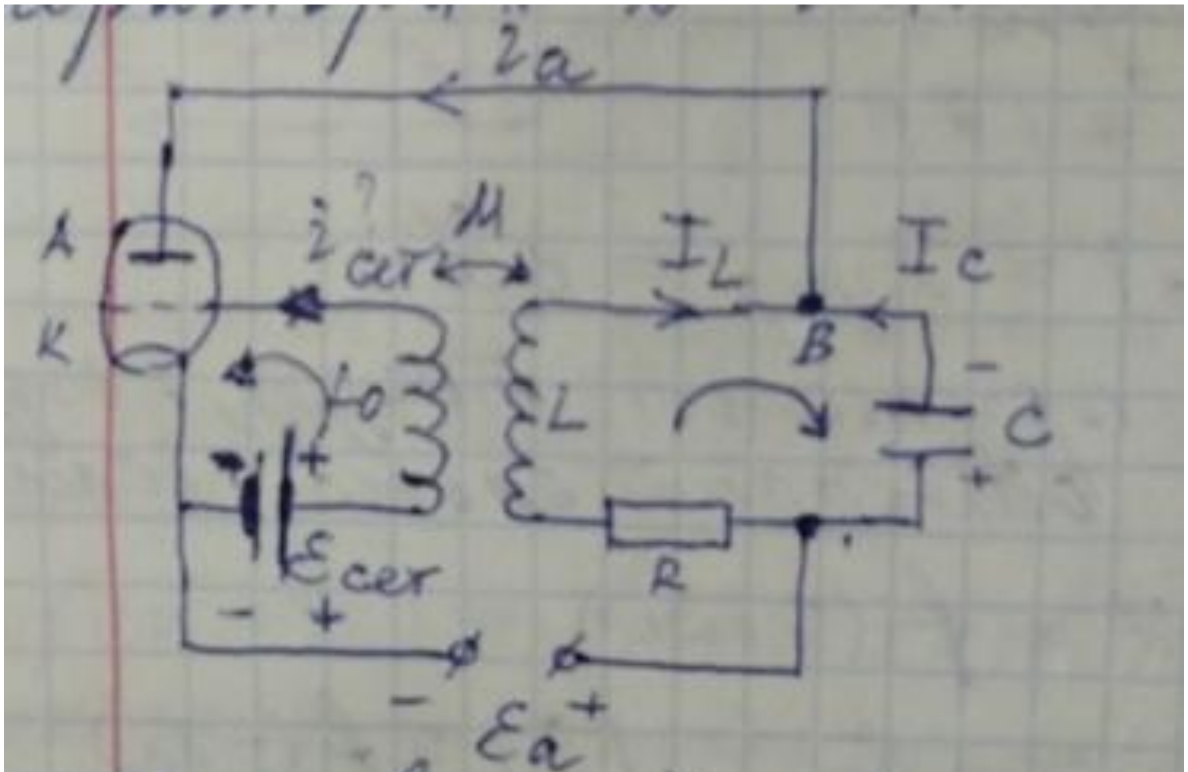
$$Du_{a} \ll u_{\text{ñåò}}$$

$$u = u_{\text{ñåò}}$$

$S = \dfrac{di_{a}}{du}$ – êðóòèçíà ñåòî÷íîé õàðàêòåðèñòèêè

A – ðàáî÷àÿ òî÷êà

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{d^2 i_a}{du^2}\right|_{u=u_0} = 0 \qquad \left.\frac{d^2 S}{du^2}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{d^3 i_a}{du^3}\right|_{u=u_0} < 0$$



i_a
А
К
$i_{сет}$
M
I_L
I_C
B
L
C
R
$\mathcal{E}_{сет}$
$\mathcal{E}_a$

1-å ï ðàâèëî Êèðõãîôà äëÿ óçëà Â

$$I_L + I_C = i_a$$

2-å ï ðàâèëî Êèðõãîôà äëÿ êîëåáàòåëüíîãî

êîíòóðà

$$u_L + u_R - u_C = \varepsilon_{\text{èíä}}$$

$$u_L = L\dot{I}_L \quad u_R = RI_L \quad u_C = \frac{q}{C}$$

$$\varepsilon_{\text{èíä}} = \pm M\frac{di_{\text{ñåò}}}{dt} \approx 0$$

$$L\dot{I}_L + RI_L - \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{L}I_L + \dot{R}I_L - \frac{\dot{q}}{C} = 0$$

$$\dot{q} = I_C = i_a - I_L$$

$$\ddot{L}I_L + \dot{R}I_L + \frac{I_L}{C} = \frac{i_a}{C} \qquad (4)$$

$$i_a = i_a(u)$$

$$i_a = i_a(u_0) + \left.\frac{di_a}{du}\right|_{u=u_0} (u - u_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 i_a}{du^2}\right|_{u=u_0} (u - u_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 i_a}{du^3}\right|_{u=u_0} (u - u_0)^3$$

$$i_a(u_0)=i_0 \qquad \left.\frac{di_a}{du}\right|_{u=u_0}=S_0 \qquad \left.\frac{d^2 i_a}{du^2}\right|_{u=u_0}=0 \qquad -\frac{1}{6}\left.\frac{d^3 i_a}{du^3}\right|_{u=u_0}=S_2>0$$

$$i_a=i_0+S_0(u-u_0)+S_2(u-u_0)^3$$

2-å ï ðàâèëî Êèðõãîô à äëÿ ñåòî ÷í î é öåï è

$$u_{L_0}+u_{\text{ñåò}}=\varepsilon_{\text{ñåò}}+\varepsilon'_{\text{èí ä}}$$

$$u_{L_0}=L_0\frac{di_{\text{cåò}}}{dt}\approx 0$$

$$\varepsilon'_{\text{èí ä}}=\pm\dot{M}I_L$$

$$u=u_{\text{ñåò}}=\varepsilon_{\text{ñåò}}\pm\dot{M}I_L$$

ï ðè î òñóòñòâèè êî ëåáàí èé $\dot{I}_L=0$ $u=u_0$

$$\varepsilon_{\text{ñåò}}=u_0$$

$$u - u_0 = \pm M\dot{I}_L$$

$$i_a = i_0 \pm MS_0\dot{I}_L \mp M^3 S_2 \dot{I}_L^3$$

$$L\ddot{I}_L + R\dot{I}_L + \frac{I_L}{C} = \frac{i_a}{C} \qquad (4)$$

$$L\ddot{I}_L + \left(R \mp \frac{MS_0}{C} \right)\dot{I}_L \pm \frac{M^3 S_2}{C}\dot{I}_L^3 + \frac{I_L}{C} = \frac{i_0}{C} \qquad (5)$$

$$z(t) = I_L(t) - i_0$$

$$\dot{z} = \dot{I}_L \qquad \ddot{z} = \ddot{I}_L$$

$$L\ddot{z} + \left(R \mp \frac{MS_0}{C} \right)\dot{z} \pm \frac{M^3 S_2}{C}\dot{z}^3 + \frac{z}{C} = 0 \qquad (6) \qquad \left| \frac{1}{L} \right.$$

- Следующая лекция 21 сентября
- Код wzn-ttpr-zzd

Практические занятия по Проектной разработке программного обеспечения по средам 2 пары с 11 час. 30 мин.

- Группа делится на 2 подгруппы.

Подгруппа, которая занимается по нечетным неделям

1. Бижикин
2. Бильков
3. Бородихин
4. Вдовина
5. Гладков
6. Граф
7. Жусупов
8. Каржановский
9. Кукузей
10. Кульбов
11. Кусков
12. Михеева
13. Попова

Подгруппа, которая занимается по четным неделям

1. Мищенко
2. Федоров
3. Фролов
4. Моторная
5. Хмельницкий
6. Егошин
7. Рябцева
8. Сысоев
9. Лопандин
10. Избышев
11. Никитин
12. Демин
13. Гаськов