

# Занятие 1. ЕГЭ 11 - I

Целые уравнения – 2. Уравнения с модулем.

Угол между прямыми в пространстве.

## Основные факты о модуле:

1.  $|a| = a$ , если  $a \geq 0$ ;

$|a| = -a$ , если  $a < 0$

2.  $|a - b|$       Геометрический смысл  
модуля

3.  $|-a| = |a|$ .

4.  $|ab| = |a||b|$ ;  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

## Основные факты о модуле:

$$5. |a|^2 = a^2.$$

$$6. |a| = |b| \iff \begin{cases} a = b, \\ a = -b. \end{cases}$$

## Основные факты о модуле:

$$7. |a| = b \iff \begin{cases} b \geq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$8. |a| + |b| \geq |a + b|,$$

$$\text{причем } |a| + |b| = |a + b| \iff ab \geq 0.$$

## Равносильные преобразования:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right], \end{cases}$$

$$|5x - 7| = 7 - 5x$$

$$|7y + 3| = -3 - 7y.$$

$$|x^3 + x - 1| = x + 1.$$

$$|f(x)| = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0,$$

$$|f(x)| = -f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq 0.$$

## Равносильные преобразования:

$$|p(x)| = |q(x)| \Leftrightarrow p^2(x) = q^2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = q(x), \\ p(x) = -q(x). \end{cases}$$

$$|x^2 - 3| = |x^2 - 5|$$

$$||3 - 2x| - 1| = 2|x|.$$

## Равносильные преобразования:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

$$|a| + |b| = |a + b| \iff ab \geq 0.$$

Решите уравнение  $|x^2 - 9| + |x + 3| = x^2 + x - 6$ .

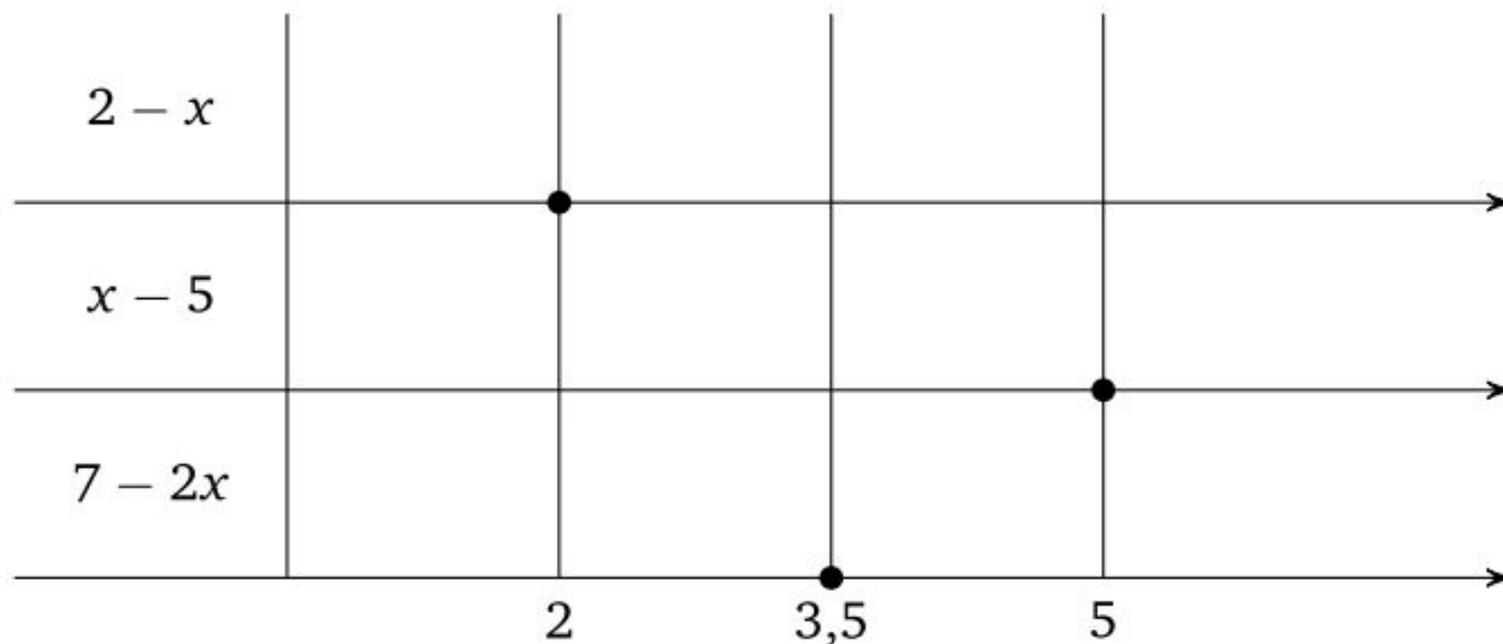
Замена переменной:

$$|a|^2 = a^2$$

$$(x - 1)^2 - 3|x - 1| - 4 = 0.$$

## Метод промежутков (интервалов):

$$|2 - x| - |x - 5| = x + 1 - |7 - 2x|.$$



## Геометрический смысл модуля:

$$|x - 1| + |x - 7| = 24.$$

$$|x^2 - x - 5| + |x^2 - x - 9| = 10.$$

# Задачи для тренировки:

## Тренировочная работа 2

Решите уравнение.

1.  $|5x - 3| + |3x - 5| = 9x - 10$ .

2.  $|2x - 1| - |3x - 2| - |4x - 3| + 11 = 10x$ .

3.  $|x^2 - 6x + 1| = x^2 - 9$ .

4.  $|x^3 + 5x - 4| = 5x + 4$ .

5.  $2(x - 3)^2 - 5|x - 3| + 2 = 0$ .

6.  $5(2x - 1)^2 - 7|2x - 1| - 6 = 0$ .

7.  $||5x - 1| - 2| - 3| = 4$ .

8.  $|x^2 - 10| = |x^2 - 22|$ .

9.  $|x^2 - x - 5| + |x^2 - x - 9| = 10$ .

10.  $|x^2 + 3x - 4| + |x^2 + 3x - 28| = 24$ .

11.  $|x^2 - 16| + |x + 4| = x^2 + x - 12$ .

12.  $|x^2 + x - 20| + |x^2 - 11x - 28| = 2|x^2 - 5x - 24|$ .

- не нужно  
выполнять на  
19.10 группе  
2019-2020 уч. года

## Тренировочная работа 2

1. 2. 2. 1. 3. 4. 4. 0; 2. 5. 1; 2,5; 3,5; 5. 6. -0,5; 1,5. 7. -1,6; 2. 8. -4;  
4. 9. -3; -1; 2; 4. 10.  $[-7; -4] \cup [1; 4]$ . 11.  $\{-3\} \cup [3; +\infty)$ . 12.  $(-\infty; -5] \cup$   
 $\cup \left[ \frac{11 - \sqrt{233}}{2}; 4 \right] \cup \left[ \frac{11 + \sqrt{233}}{2}; +\infty \right)$ .

3.1.  $x \geq -2$ .

3.2.  $x = -\frac{4}{3}$ .

3.3.  $x = -\frac{13}{4}, x = \frac{9}{2}$ .

3.4.  $x = -4, x = 4$ .

3.5.  $x \leq \frac{5}{2}$ .

3.6.  $x = -2, x = 2$ .

3.7.  $x = -1, x = 11$ .

3.8.  $x = -3, x = -4$ .

3.9.  $x = -4, x = -1$ .

3.10.  $x = -1, x = 1$ .

## Дополнительные задания:

3.1.  $|x + 2| = x + 2$ .

3.3.  $|3x + 2| = x + 11$ .

3.5.  $|2x - 5| = 5 - 2x$ .

3.7.  $(x - 5)^2 - |x - 5| = 30$ .

3.9.  $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$ .

3.11.  $|x - 4| = |5 - 2x|$ .

3.13.  $|2x - 8| - |x + 5| = 12$ .

3.15.  $|5x + 3| + |2x + 1| = |7x + 4|$ .

3.17.  $2|x - 6| - |x| + |x + 6| = 18$ .

3.19.  $|2x + 15| = 22 - |2x - 7|$ .

3.2.  $|x - 2| = 2(3 + x)$ .

3.4.  $|1 - x^2| = 15$ .

3.6.  $x^2 + |x| - 6 = 0$ .

3.8.  $x^2 + 6x + 8 + |x + 4| = 0$ .

3.10.  $|1 - 5x^2| = 4$ .

3.12.  $|x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2|$ .

3.14.  $|x| - |x + 2| = 2$ .

3.16.  $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 0$ .

3.18.  $||x + 1| + 2| - 1| + 1| = 2$ .

3.20.  $|x^2 + 2x - 1| = \frac{1 - 5x}{3}$ .

## Ответы для самопроверки:

3.11.  $x = 1, x = 3$ .

3.12.  $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$ .

3.13.  $x = -3, x = 25$ .

3.14.  $x \leq -2$ .

3.15.  $-\frac{4}{7} \leq x$ .

3.16.  $x = 2$ .

3.17.  $-6 \leq x \leq 0, x = 12$ .

3.18.  $x = -1$ .

3.19.  $-\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$ .

3.20.  $x = -4, x = -1$ .

## Угол между прямыми в пространстве

**2.1.** Дана треугольная пирамида  $ABCD$ .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно рёбрам  $AD$  и  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ , если  $AD = 24$ ,  $BC = 10$ , а расстояние между серединами рёбер  $BD$  и  $AC$  равно 13.

**2.3.** В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $DE$ .

## Угол между прямыми в пространстве

**2.6.** Основание прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Известно, что  $AB = 2AA_1$ .

- а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $MB_1$  перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $MB_1$ .

# Задания для тренировки:

2.2. Точка  $K$  лежит на ребре  $AD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$  параллельно рёбрам  $AB$  и  $CD$ .

б) Пусть  $M$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $K$  — середина ребра  $AD$ ,  $AB = 8$ ,  $CD = 6$ ,  $KM = 5$ .

2.4. Точка  $G$  лежит на боковом ребре  $SC$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BG$  с плоскостью боковой грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BG$  и  $AD$ , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны  $3\sqrt{13}$ , а  $SG : GC = 1 : 2$ .

2.5. Основания призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонние треугольники. Точки  $M$  и  $M_1$  — центры оснований  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми  $BM$  и  $C_1M_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM_1$  и  $C_1M$ , если призма прямая и  $AB : AA_1 = 3 : 2$ .