ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 7

Повторение испытаний

Определение сложного эксперимента

Рассмотрим единичный эксперимент, в результате которого может произойти некоторое событие А. Если событие А произошло, говорим, что произошел успех. Пусть этот эксперимент проводится несколько раз.

Основные вопросы

1. Вероятность для некоторого числа появлений события А;

2. Вероятность для числа проведенных испытаний до первого появления события А или некоторого фиксированного числа появлений А.

Типы испытаний

1. Вероятность успеха постоянна в каждом испытании;

2. Вероятность успеха меняется.

Схема Бернулли (биномиальная)

Пусть производится n независимых испытаний. Пусть $\mathbf{P}(A)=p$ в каждом испытании и $q = 1 - p$.

Найти

$P_n(k)$ ={в ***n*** испытаниях событие ***A***

наступит ***k*** раз}

Вывод формулы

Вероятность события {в n испытаниях A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз} равна

$$p^k q^{n-k}$$

Число таких событий равно C_n^k.

Так как эти события *несовместны и равновероятны*, получаем

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют **формулой Бернулли**.

Пример 1

Университетом для студенческих общежитий приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,1. Определить вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдет из строя ровно один.

Решение

- Из условия задачи выпишем p, n, k, q.
- $n=5$; $k=1$; $p=0{,}1$; $q=0{,}9$.

- Тогда по формуле Бернулли

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{5-1} = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4 \approx 0{,}33$$

Пример 2

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна ***p = 0,75***.

Найти вероятность того, что в ближайшие ***6*** суток расход электроэнергии в течение ***4*** суток не превысит нормы.

Решение

p = 0,75. q = 1 – p = 1 – 0,75 = 0,25.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 =$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

Схема Пуассона

Пусть вероятность успеха при фиксированном числе испытаний ***n*** постоянна и мала, уменьшается с ростом ***n,*** однако

$$\boxed{\lambda = np}$$

постоянна.

Формула Пуассона

$$P(k) = \lambda^{k} \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

Пример 1

Вероятность того, что какой-нибудь абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная
станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 4 абонента?

Решение

- По условию задачи

  p=0,01; n=300; k=4.
- Найдем $\lambda=300\cdot0{,}01=3$
- По формуле Пуассона

$$P_{300}(4)=\frac{3^4\cdot e^{-3}}{4!}\approx 0{,}05$$

Пример 2

Найти вероятность не более двух успехов в схеме Пуассона при $\lambda = 1.$

Решение

$$\mathrm{P}(\mathrm{k} \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) =$$

$$= \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{5}{2}e^{-1} \approx 0,923$$

Геометрическая схема

- Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события ***A*** равна ***p*** $(0<p<1)$ и $q = 1 - p$.
- Испытания проводятся до первого появления события ***A***.

Основной вопрос

- Пусть в первых k – 1 испытаниях событие А не наступило, а в k-м испытании появилось. Тогда

$$P(k) = q^{k-1} p.$$

Пример

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$.

Найти вероятность того, что попадание произойдёт при третьем выстреле.

Решение

Из условия задачи выпишем
p = 0,6; q = 0,4; k = 3.

$$P = q^{k-1} p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Формулы Пуассона и Лапласа

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях ***n*** достаточно трудно.

Например, если n=5000, k=3000,p=0,1, то для отыскания вероятности $P_{5000}(3000)$ надо вычислить выражение:

$$P_{5000}(3000) = \frac{5000!}{3000! \cdot 2000!}(0{,}1)^{3000} \cdot (0{,}9)^{2000}$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли ***n*** велико, ***p*** мало и ***npq*** <9. Тогда

$$P_n(k) \approx \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{где} \quad \lambda = np$$

Пример

Завод отправил на базу ***5000*** доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна ***0, 0002***.

Найти вероятность того, что на базу прибудут ***3*** негодных изделия.

Решение

n = 5000, p = 0,0002, к = 3.

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

$$P_{5000}(3) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$