



Тема:

Понятие математической
индукции и ее применение

В основе математического исследования лежит



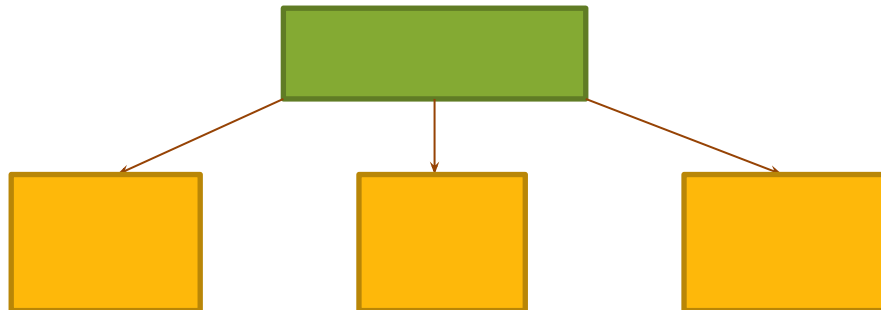
Дедуктивный
метод



Индуктивный метод

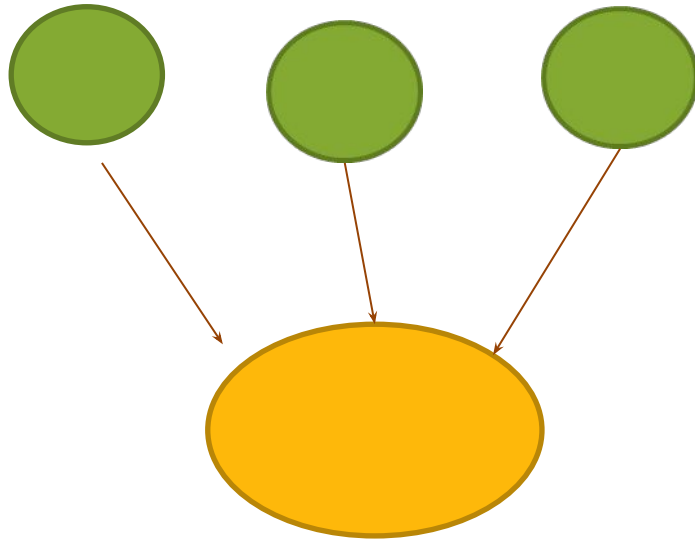
Дедуктивный метод

- Дедуктивный метод – это рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным – частный результат.



Индуктивный метод

- Индуктивный метод – рассуждение, при котором, опираясь на ряд частных результатов приходят к одному общему выводу.



Пример рассуждения по индукции

- Требуется установить, что каждое четное число в пределах от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Для этого переберем все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

- $4=2+2$; $6=3+3$; $8=3+5$; $10=5+5$; ...;
 $92=3+89$; $94=5+89$; $96=7+89$; $98=9+89$;
 $100=3+97$.

Эти 49 равенств (мы выписали только 9 из них) показывают, что утверждение о том, что любое четное число от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел, верно и было доказано путем перебора всех частных случаев.

- Это был пример **полной индукции**, когда общее утверждение доказывается для конечного множества элементов при рассмотрении каждого из этих элементов.
- Но чаще общее утверждение относится не к конечному, а к бесконечному множеству. В таких случаях общее утверждение может быть угаданным, полученным неполной индукцией. Оно может оказаться верным или неверным.

Пример 1

- Выдвинем гипотезу, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2 .
- Рассмотрим на примерах:
 $1=1^2$; $1+3=4=2^2$; ... ; $1+3+5+7+9+11=36=6^2$
- Гипотеза подтвердилась, однако она останется гипотезой, пока не будет доказана.
- Доказательство: $1+3+5+\dots+(2n-1)$ – сумма n членов арифметической прогрессии, значит,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \times n = n^2$$

Пример 2

- Рассмотрим последовательность $y_n = n^2 + n + 17$.
- Выпишем первые четыре члена:
 $y_1 = 19$; $y_2 = 23$; $y_3 = 29$; $y_4 = 37$.
Возникает гипотеза, что вся последовательность состоит из простых чисел. Однако это не так:
 $y_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16(16+1) + 17 = 17(16+1) = 17 \times 17$. Это составное число.

- Итак, неполная индукция не считается в математике методом строгого доказательства, т.к. может привести к ошибке. Во многих случаях, когда доказательство найти трудно, обращаются к особому методу рассуждений, который называется *методом математической индукции*.

Метод математической индукции

- Суть метода можно разъяснить на примере.
- Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
- По определению $a_{n+1} = a_n + d$, значит, $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$; и т. д.

- Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Утверждение выведено нами интуитивно, попробуем обосновать его.

Если $n=1$, то $a_1 = a_1 + (1-1)d$ – верное равенство, то есть утверждение для $n=1$ верно. Предположим, что утверждение верно для натурального числа $n=k$, т.е. предположим, что $a_k = a_1 + (k-1)d$. И попробуем доказать, что утверждение верно для $n=k+1$, т.е. $a_{k+1} = a_1 + kd$

В самом деле по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd$

● Для $n=1$ утверждение $a_n = a_1 + (n - 1)d$ верно. Мы доказали, что если для $n=k$ эта формула верна, то и для $n=k+1$ формула тоже верна. Но т.к. формула верна для $n=1$, то она верна и для $n=2$, а значит и для $n=3$ и т.д. т.е формула верна для любого натурального числа n .
Утверждение доказано.

Составляющие метода математической индукции

- Пусть нужно доказать справедливость $A(n)$, где n – любое натуральное число.
- Для этого сначала проверим справедливость $A(n)$ для $n=1$ (*базис математической индукции*).
- Затем докажем, что для любого натурального числа k справедливо следующее: если $A(k)$ – справедливо, то $A(k+1)$, тоже справедливо (*индукционный шаг*).
- Делаем вывод, что $A(n)$ справедливо для любого n .

Принцип математической индукции:

Утверждение, зависящее от натурального числа n , справедливо для любого n , если выполнены следующие условия:

А) утверждение верно для $n=1$;

Б) из справедливости утверждения для $n=k$, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n=k+1$