Тема:

Понятие математической индукции и ее применение

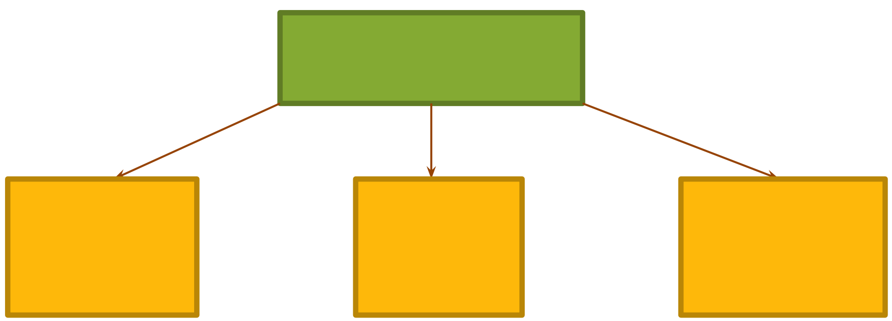
В основе математического исследования лежит

Дедуктивный метод

Индуктивный метод

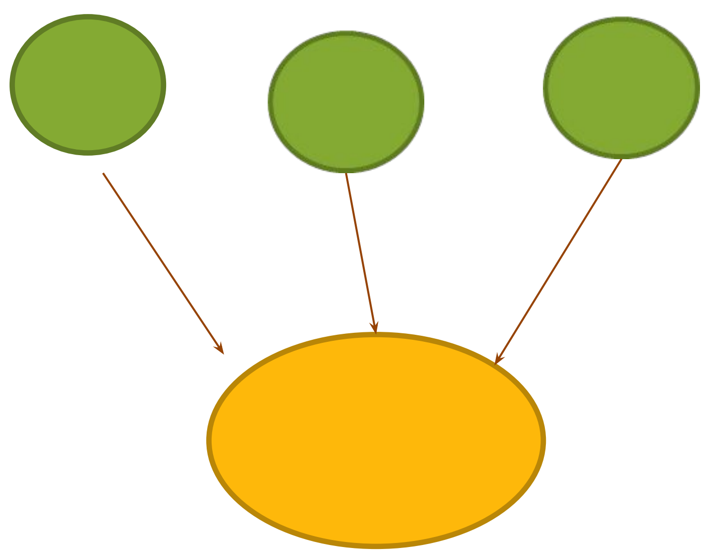
Дедуктивный метод

- Дедуктивный метод – это рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным – частный результат.



Индуктивный метод

- Индуктивный метод – рассуждение, при котором, опираясь на ряд частных результатов приходят к одному общему выводу.



Пример рассуждения по индукции

- Требуется установить, что каждое четное число в пределах от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Для этого переберем все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

- 4=2+2; 6=3+3; 8=3+5; 10=5+5; ...;

92=3+89; 94=5+89; 96=7+89; 98=9+89;

100=3+97.

Эти 49 равенств (мы выписали только 9 из них) показывают, что утверждение о том, что любое четное число от 4 до100 можно представить в виде суммы двух простых чисел, верно и было доказано путем перебора всех частных случаев.

- Это был пример **полной индукции**, когда общее утверждение доказывается для конечного множества элементов при рассмотрении каждого из этих элементов.
- Но чаще общее утверждение относится не к конечному, а к бесконечному множеству. В таких случаях общее утверждение может быть угаданным, полученным неполной индукцией. Оно может оказаться верным или неверным.

Пример 1

- Выдвинем гипотезу, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2.
- Рассмотрим на примерах: $1=1^2$; $1+3=4=2^2$; …; $1+3+5+7+9+11=36=6^2$
- Гипотеза подтвердилась, однако она останется гипотезой, пока не будет доказана.
- Доказательство: $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ – сумма n членов арифметической прогрессии, значит,

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2} \times n = \frac{1+(2n-1)}{2} \times \mathrm{n} = n^2$$

Пример 2

- Рассмотрим последовательность $y_n = n^2 + \mathrm{n} + 17$.
- Выпишем первые четыре члена: $y_1 = 19$; $y_2 = 23$; $y_3 = 29$; $y_4 = 37$. Возникает гипотеза, что вся последовательность состоит из простых чисел. Однако это не так:

$y_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16(16+1) + 17 = 17(16+1) = 17 \times 17$. Это составное число.

- Итак, неполная индукция не считается в математике методом строгого доказательства, т.к. может привести к ошибке. Во многих случаях, когда доказательство найти трудно, обращаются к особому методу рассуждений, который называется *методом математической индукции.*

Метод математической индукции

- Суть метода можно разъяснить на примере.
- Рассмотрим арифметическую прогрессию a_1 , a_2 , a_3 , … a_n , … .
- По определению $a_{n+1} = a_n + d$, значит, $a_1 = a_1$; $a_2 = a_1 + \mathrm{d}$; $a_3 = a_2 + \mathrm{d} = a_1 + 2\mathrm{d}$; и т. д.

- Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Утверждение выведено нами интуитивно, попробуем обосновать его.

Если n=1, то $a_1 = a_1 + (1-1)d$ – верное равенство, то есть утверждение для n=1 верно. Предположим, что утверждение верно для натурального числа n=k, т.е. предположим, что $a_k = a_1 + (k-1)d$. И попробуем доказать, что утверждение верно для n=k+1, т.е. $a_{k+1} = a_1 + kd$

В самом деле по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd$

- Для n=1 утверждение $a_n = a_1 + (n-1)d$ верно. Мы оказали, что если для n=k эта формула верна, то и для n=k+1 формула тоже верна. Но т.к. формула верна для n=1, то она верна и для n=2, а значит и для n=3 и т.д. т.е формула верна для любого натурального числа n.

Утверждение доказано.

Составляющие метода математической индукции

- Пусть нужно доказать справедливость A (n), где n – любое натуральное число.
- Для этого сначала проверим справедливость A(n) для n=1(*базис математической индукции).*
- Затем докажем, что для любого натурального числа k справедливо следующее: если A(k) – справедливо, то A (k+1), тоже справедливо(*индукционный шаг).*
- Делаем вывод, что A(n) справедливо для любого n.

Принцип математической индукции:

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены следующие условия:

А)утверждение верно для $n=1$;

Б)из справедливости утверждения для $n=k$, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n=k+1$