олимпиадные задачи 2

Часть 2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ С - 19

ЦЕЛЬ

Сегодня мы познакомимся с решением диофантовых уравнений методом спуска и рассмотрим некоторые олимпиадные задачи, предлагаемые для подготовки к ЕГЭ в группе N° 19..

МЕТОД СПУСКА

Метод спуска впервые был применен в VI веке Ариабхаттой. Метод
заключается в сведении данного уравнения к последовательности других
уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестным.

Ариабха́та (или Арьябха́та, 476—550) — индийский астроном и математик. Его деятельность открывает «золотой век» индийской математики и астрономии.

РЕШИТЕ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ УРАВНЕНИЕ $5X - 7Y = 3$.

Решение. Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю: $x = (3 + 7y)/5 = y + (3 + 2y)/5$

Дробь $(3 + 2y)/5$ должна быть равна целому числу.

Положим $c = (3 + 2y)/5$, где c – целое число.

Тогда $2y + 3 = 5c$. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования:

$y = (5c - 3)/2 = 3c - (c + 3)/2$

Дробь $(c + 3)/2$ должна быть целым числом.

Обозначим $(c + 3)/2 = t$, где t– целое число.

Отсюда $c = 2t - 3$. Последовательно возвращаемся к неизвестным x и y:

$y = 3(2t - 3) - t = 5t - 9$,

$x = y + c = 5t - 9 + 2t - 3 = 7t - 12$.

Ответ: $x = 7t - 12$, $y = 5t - 9$, где t – целое число

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $2X^2 - 5Y^2 = 7$ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ.

Решение. Так как $2x^2$ - четное число, а 7 - нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, т.е. y –нечетное. Пусть $y = 2z + 1$, z Z , тогда данное уравнение можно переписать в виде $x^2 - 10z^2 - 10z = 6$.

Отсюда видно, что x должно быть четным.

Пусть $x = 2m$, тогда последнее уравнение примет вид

$$2m^2 - 5z(z + 1) = 3,$$

что невозможно, так как число $z(z + 1)$ - четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: ***нет решений***

ЗАДАЧА

В старших классах школы учатся 200 учеников, которые изучают иностранные языки (каждый ученик изучает хотя бы один иностранный язык). Найдите количество учеников, которые изучают все иностранные языки в каждом из следующих случаев:

А) английский изучают 120 человек, немецкий – 97

Б) английский изучают 120 человек, немецкий – 97, французский – 85, и английский и немецкий – 46, и английский и французский – 42, и французский и немецкий – 40

В) английский изучают 90 человек, немецкий 80, французский 60. И для каждой пары языков найдется не более 10 человек, изучающих оба языка.

А) АНГЛИЙСКИЙ ИЗУЧАЮТ 120 ЧЕЛОВЕК, НЕМЕЦКИЙ – 97

Решени
е

Изобразим диаграмму, соответствующую условию

Если сложим 120+97, то количество человек, изучающих два языка, учтем дважды, тогда

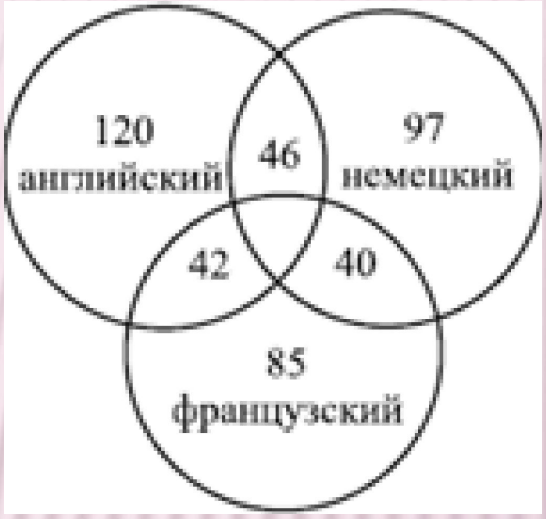
$$120+97 - 200 = 17$$

Ответ 17

Б) Английский изучают 120 человек, немецкий – 97, французский – 85, и английский и немецкий – 46, и английский и французский – 42, и французский и немецкий – 40

Решение

Изобразим диаграмму, соответствующую условию



Пусть x – число человек, изучающих три языка. Тогда

$$120 + 97 + 85 - 46 - 40 - 42 + x = 200,$$

$$x = 26.$$

Ответ 26

В) Английский изучают 90 человек, немецкий 80, французский 60. И для каждой пары языков найдется не более 10 человек, изучающих оба языка.

Решение

Пусть и английский и немецкий изучают а человек,
и английский и французский изучают с человек,
и французский и немецкий изучают у человек,
все языки изучают х человек, тогда

$$200 = 90 + 80 + 60 - a - c - y + x$$

$$a + c + y = 30 + x.$$

По условию $a, c, y \leq 10$, тогда $a + c + y - 30 \leq 0$.

Так как х число неотрицательное, то $x = 0$

Ответ 0

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решите уравнение в целых числах $5x^2 - 3y^2 = 10$

2. Решите уравнение в целых числах $4x^2 - 2y^2 = 13$

3. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек? б) 8 человек?

4. В старших классах школы учатся 300 учеников, которые изучают иностранные языки (каждый ученик изучает хотя бы один иностранный язык). Найдите количество учеников, которые изучают все иностранные языки в каждом из следующих случаев:

А) английский изучают 240 человек, немецкий – 84

Б) английский изучают 240 человек, немецкий – 84, французский – 63, и английский и немецкий – 57, и английский и французский – 24, и французский и немецкий – 40

В) английский изучают 120 человек, немецкий 60, французский 100. И для каждой пары языков найдется не более 20 человек, изучающих оба языка.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ВЫСЫЛАТЬ НА ЭЛЕКТРОННУЮ ПОЧТУ

DDUT_MATHS@RAMBLER.RU