Преобразование тригонометрических выражений

Разобрать решение примеров.
Составить конспект.

Решить примеры.

Синус и косинус разности аргументов

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Пример 1

$$\text{Вычислить}: \sin 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Пример 2

$$\textit{Вычислить}: \cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Пример 3

Вычислить : $\sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ$

$$\sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ =$$

$$= \sin(48^\circ + 12^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 4

II

$$\textit{Вычислить}: \cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right), \textit{если} \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} \le y \le \pi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos y + \sin\frac{\pi}{3}\sin y = \frac{1}{2}\cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{10} + \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{-3+4\sqrt{3}}{10}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1 \qquad \sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} \qquad \sin x = \frac{4}{5}$$

Пример 5

Решите уравнение: $\sin(\frac{\pi}{3}-x)+\cos(\frac{\pi}{6}-x)=\sqrt{3}$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\cancel{-\frac{1}{2}\cdot\sin x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\cancel{+\frac{1}{2}\cdot\sin x}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x=\sqrt{3}$$

$$\cos x=\sqrt{3}:\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x=1$$

$$\underline{x=2\pi n,n\in Z}$$

Тангенс суммы и разности аргументов

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$

Котангенс суммы и разности аргументов

$$ctg(x+y)=\frac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$ctg(x-y)=\frac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

$Вычислить: tg75^\circ$

$$tg75^\circ = tg(30^\circ + 45^\circ) = \frac{tg30^\circ + tg45^\circ}{1 - tg30^\circ \cdot tg45^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

II

$Вычислить: tg(\frac{\pi}{4} - x), если \cos x = -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

$$tg(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\frac{\pi}{4} \cdot tgx} = \frac{1 - tgx}{1 + tgx} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{1\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{7}{3} : (-\frac{1}{3}) = -7$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{5} : (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$Вычислить: \cos(\frac{\pi}{2} - 30^\circ)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$Вычислить: tg(180° - \frac{\pi}{4})$$

$$tg(180° - \frac{\pi}{4}) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$$

$$Вычислить: \sin(2\pi + 45°)$$

$$\sin(2\pi + 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Вычислить: ctg(270° + 60°)$$

$$ctg(270° + 60°) = -tg60° = -\sqrt{3}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$tg\, 2x = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2\ x} \qquad ctg\, 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$$

Сократить дробь: $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^{\cancel{2}}}{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}}=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$

Вычислить: $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos(2\cdot\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример 5

Зная, что $\cos x = \frac{3}{5},\ x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ IV, *вычислить* $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

Домашнее задание:

1. Найти значение выражения $\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{7\pi}{12}$
2. Упростить выражение $\cos(-\alpha)\cdot\sin(-\beta)\ -\ \sin(\alpha-\beta)$
3. Решить уравнение $\sin 3x\cos 5x-\sin 5x\sin 3x=-1$
4. Дано: $\sin\alpha=0{,}8;$ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ Найти: $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$