

Преобразование тригонометрических выражений

Разобрать решение примеров.

Составить конспект.

Решить примеры.

Синус и косинус разности аргументов



$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$



Пример 1

Вычислить : $\sin 75^\circ$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$



Пример 2

Вычислить : $\cos 15^\circ$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



Пример 3

Вычислить : $\sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ$

$$\begin{aligned} & \sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ = \\ & = \sin(48^\circ + 12^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Пример 4

Вычислить: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right)$, если $\cos y = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$ **||**

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos y + \sin\frac{\pi}{3}\sin y = \frac{1}{2}\cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{10} + \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{10}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$



Пример 5

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$

$$\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cdot \sin x = \sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \sqrt{3} : \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = 1$$

$$\underline{x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$



Тангенс суммы и разности аргументов



$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$$



Котангенс суммы и разности аргументов



$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y - 1}{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y}$$



Вычислить: $\operatorname{tg} 75^\circ$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\end{aligned}$$

Вычислить: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, если $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ **||**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3 - 4}{3}}{\frac{3 + 4}{3}} = \frac{-1}{7} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}$$



Вычислить: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 30^\circ\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 30^\circ\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Вычислить: $\operatorname{tg}(180^\circ - \frac{\pi}{4})$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \frac{\pi}{4}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$$

Вычислить: $\sin(2\pi + 45^\circ)$

$$\sin(2\pi + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Вычислить: $\operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ)$

$$\operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Формулы двойного аргумента



$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$



Сократить дробь: $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned}\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= \frac{(\sin x + \cos x) \cdot \cancel{(\cos x + \sin x)}}{(\cos x - \sin x) \cdot \cancel{(\cos x + \sin x)}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\end{aligned}$$

Вычислить: $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример 5

Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$, вычислить $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(-\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$



Домашнее задание:

1. Найти значение выражения

$$\sin \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$$

2. Упростить выражение

$$\cos(-\alpha) \cdot \sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \sin 3x = -1$$

4. Дано: $\sin \alpha = 0,8$;

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Найти: $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$