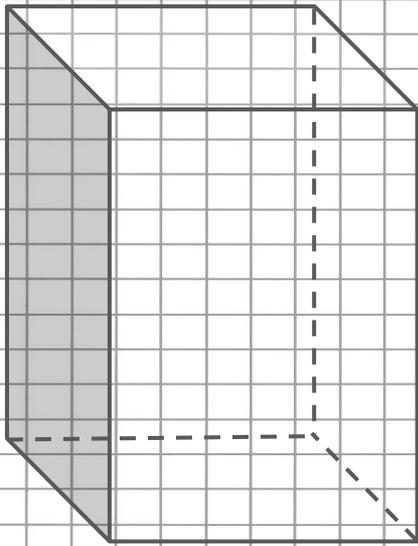


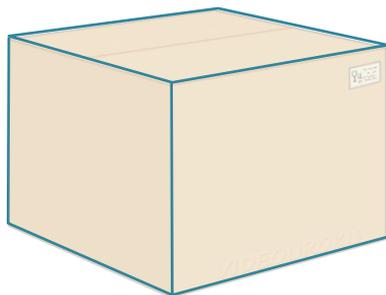
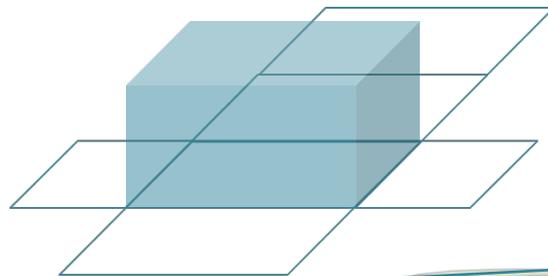
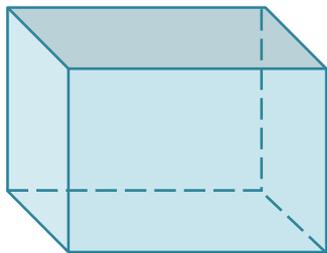
Объем прямоугольного параллелепипеда

Сегодня на уроке:



- ✓ поговорим о прямоугольном параллелепипеде
- ✓ вспомним некоторые из его свойств
- ✓ выведем формулы для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его шесть граней прямоугольники.





«ширина»

«длина»

«высота»

*В геометрии эти три величины
объединяются общим названием:
**измерения прямоугольного
параллелепипеда.***



DA – длина

DC – ширина

DD_1 – высота

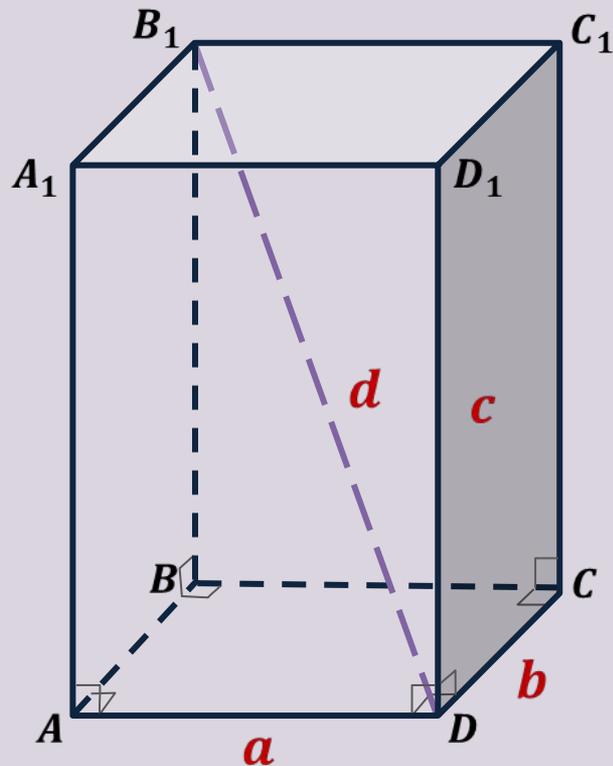
Свойства прямоугольного параллелепипеда:

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство.

Пусть дан прямоугольный параллелепипед P .

V – объем

Докажем, что $V = a \cdot b \cdot c$.

1) a , b и c – конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n ($n \geq 1$).

Числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ – целые.

Разделим каждое ребро на равные части длины $\frac{1}{10^n}$.

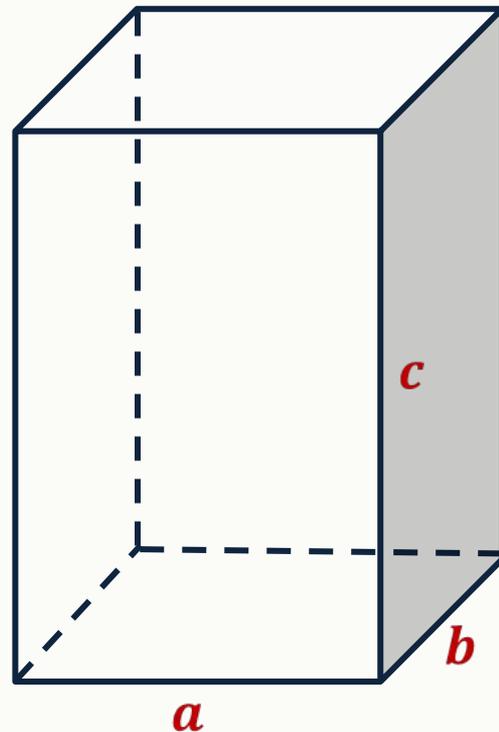
Параллелепипед P разобьется на равные кубы с длиной каждого ребра $\frac{1}{10^n}$.

Общее количество таких кубов равно $abc \cdot 10^{3n}$.

Т.к. объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$, то объем всего параллелепипеда P будет равен $V = abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Что и требовалось доказать.



Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство.

Пусть дан прямоугольный параллелепипед P .

V – объем

Докажем, что $V = a \cdot b \cdot c$.

2) Хотя бы одно из измерений a , b и c – бесконечная десятичная дробь.

Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n , b_n , c_n , которые получаются из чисел a , b , c , если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n + 1)$ -ой.

$$a_n \leq a \leq a'_n, \text{ где } a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}.$$

$$b_n \leq b \leq b'_n, \text{ где } b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}.$$

$$c_n \leq c \leq c'_n, \text{ где } c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}.$$

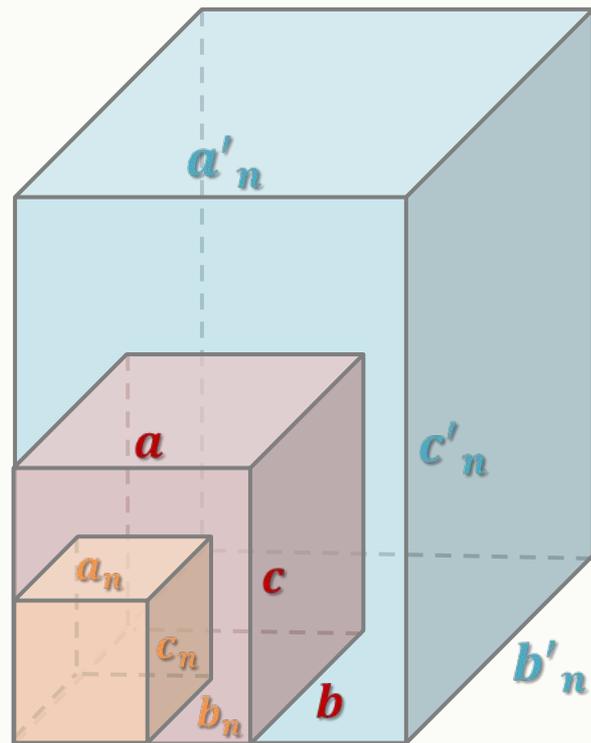
$$a_n b_n c_n \leq abc \leq a'_n b'_n c'_n \Leftrightarrow V_n \leq V \leq V'_n$$

Будем неограниченно увеличивать n .

Число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число

$a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа abc .

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство.

Пусть грань с ребрами a и b – основание прямоугольного параллелепипеда.

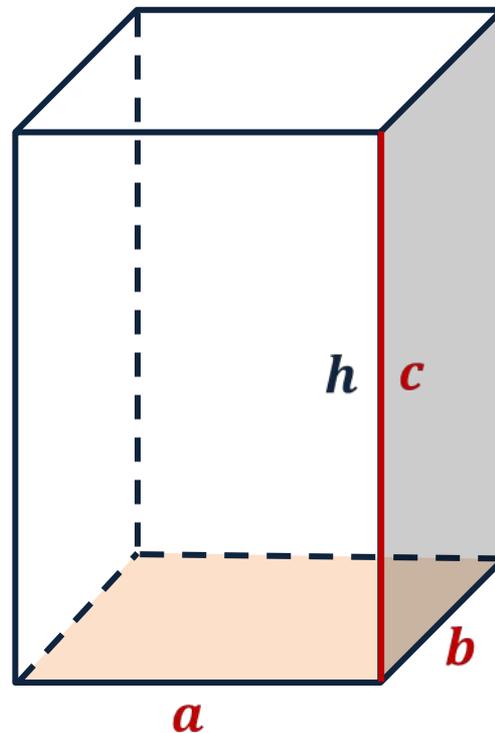
$$S_{\text{осн}} = a \cdot b$$

$$h = c$$

$V = a \cdot b \cdot c = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания,
 h – высота прямоугольного параллелепипеда.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Что и требовалось доказать.



Следствие. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство.

Достроим прямую треугольную призму с основанием ABC ($\angle A = 90^\circ$) до прямоугольного параллелепипеда.

$V = 2S_{\Delta ABC} \cdot h$, где $S_{\Delta ABC}$ – площадь основания ΔABC ,
 h – высота призмы.

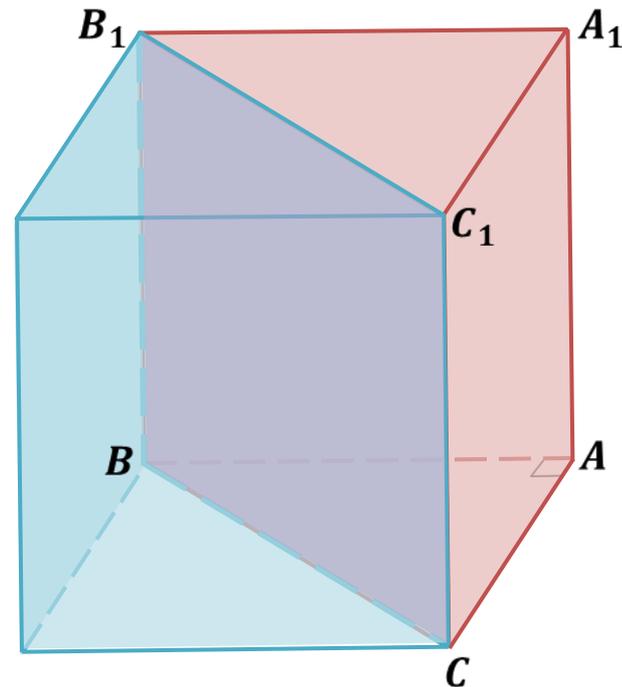
Плоскость B_1BC разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы.

Эти призмы равны, так как имеют равные основания и равные высоты.

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{2} \cdot 2S_{\Delta ABC} \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Что и требовалось доказать.



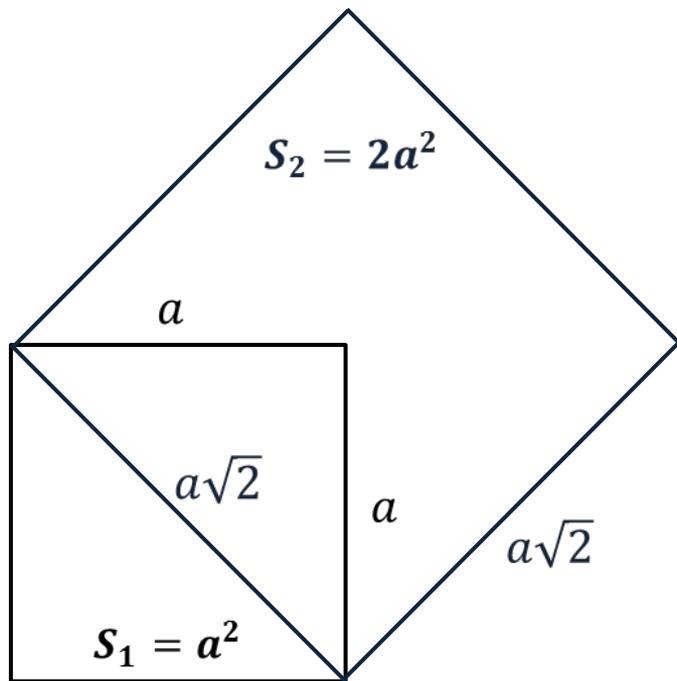
Замечание.

Рассмотрим квадрат со стороной a .

Из теоремы Пифагора его диагональ $d = a\sqrt{2}$.

Поэтому площадь построенного на ней квадрата вдвое больше площади данного квадрата.

Таким образом, не составляет труда построить сторону квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.



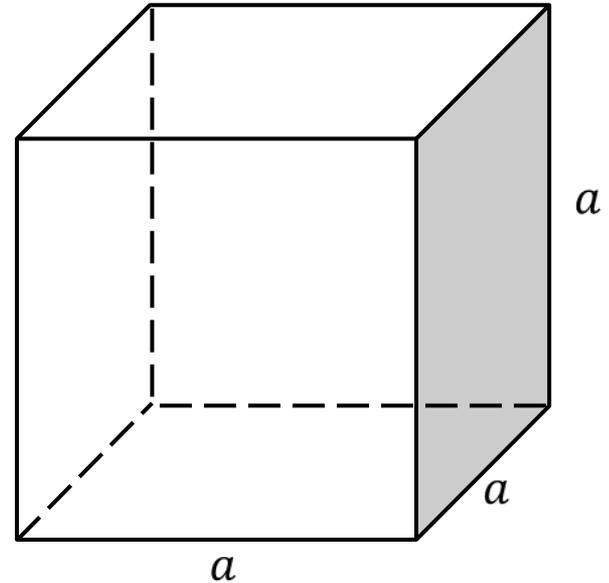
Замечание.

Рассмотрим куб со стороной a .

Вопрос: можно ли с помощью циркуля и линейки построить сторону куба, объем которого вдвое больше объема данного куба, т.е. построить отрезок, равный произведению $\sqrt[3]{2}a$?

Эта задача получила название:

«задача об удвоении куба».

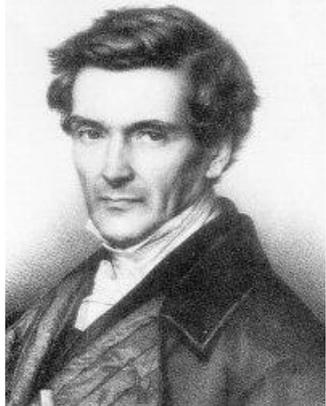


В 1837 году французский математик

Пьер Лоран Ванцель доказал, что *такое построение невозможно*.

Одновременно им была доказана неразрешимость еще одной задачи на построение – «задачи о трисекции угла» (*произвольный данный угол разделить на три равных угла*).

К числу классических неразрешимых задач на построение относится также «задача о квадратуре круга» (*построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга*).



Задача. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональю 13 см и сторонами основания 4 см и 3 см.

Решение.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

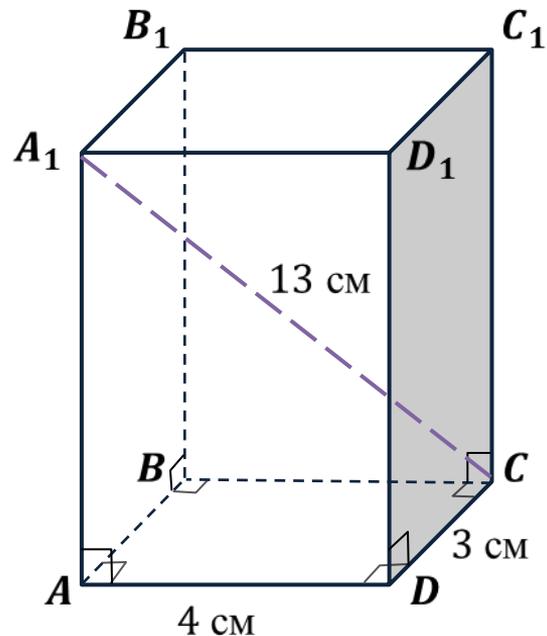
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{13^2 - 4^2 - 3^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 144 см³.



Задача. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольный параллелепипед, основание $ABCD$ – квадрат. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 396 см^3 . Определите высоту прямоугольного параллелепипеда, если $AD = 6 \text{ см}$.

Решение.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

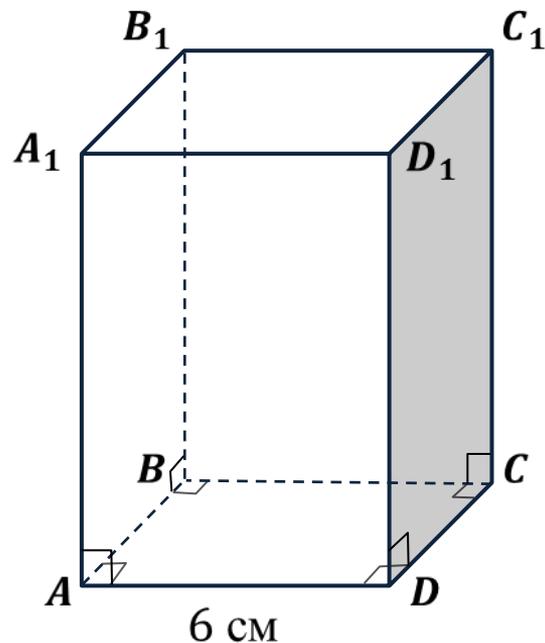
$$h = \frac{V}{S_{\text{осн}}}$$

Т.к. $ABCD$ – квадрат, то $S_{\text{осн}} = AD^2 = 6^2 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$.

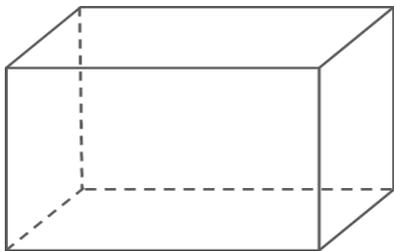
$$V = 396 \text{ см}^3$$

$$h = \frac{396}{36} = 11 \text{ (см)}$$

Ответ: 11 см.



Объем прямоугольного параллелепипеда



Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$