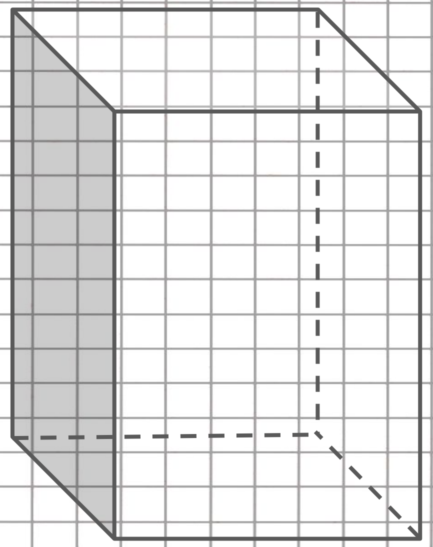
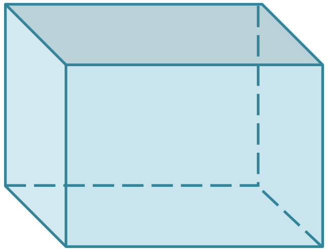
Объем прямоугольного параллелепипеда

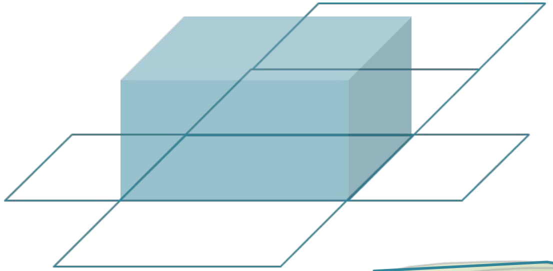
Сегодня на уроке:

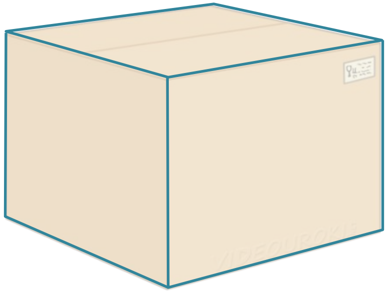


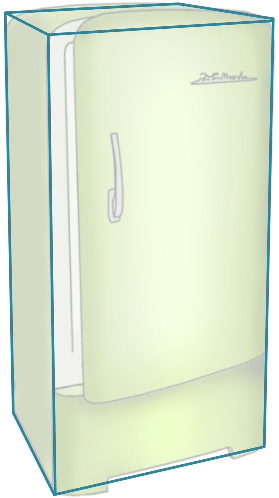
- ✔ поговорим о прямоугольном параллелепипеде
- ✔ вспомним некоторые из его свойств
- ✔ выведем формулы для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

Параллелепипед называется ***прямоугольным***, если все его шесть граней прямоугольники.

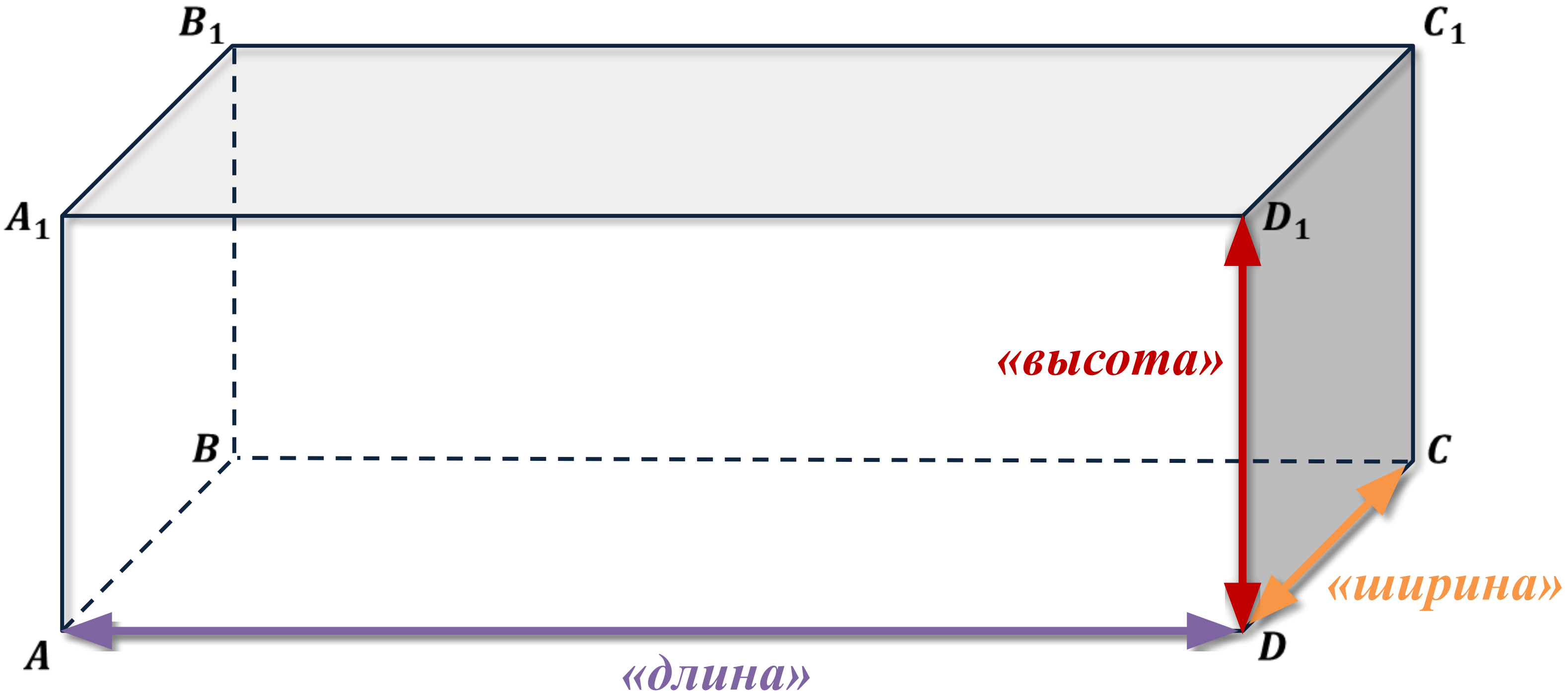








В геометрии эти три величины объединяются общим названием: ***измерения прямоугольного параллелепипеда*.**



DA – длина DC – ширина DD_1 – высота

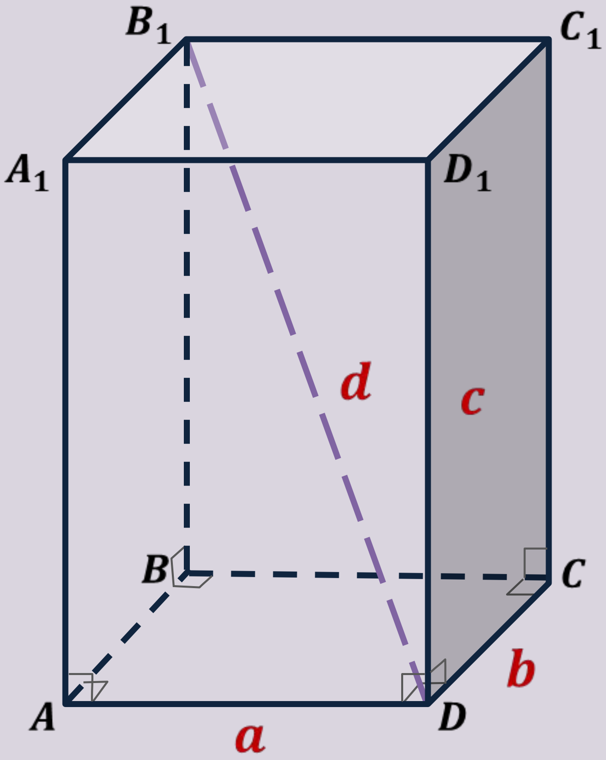
Свойства прямоугольного параллелепипеда:

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство.

Пусть дан прямоугольный параллелепипед P.

V – объем

Докажем, что $V = a \cdot b \cdot c$.

1) a, b и c – конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n $(n \geq 1)$.

Числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ – целые.

Разделим каждое ребро на равные части длины $\frac{1}{10^n}$.

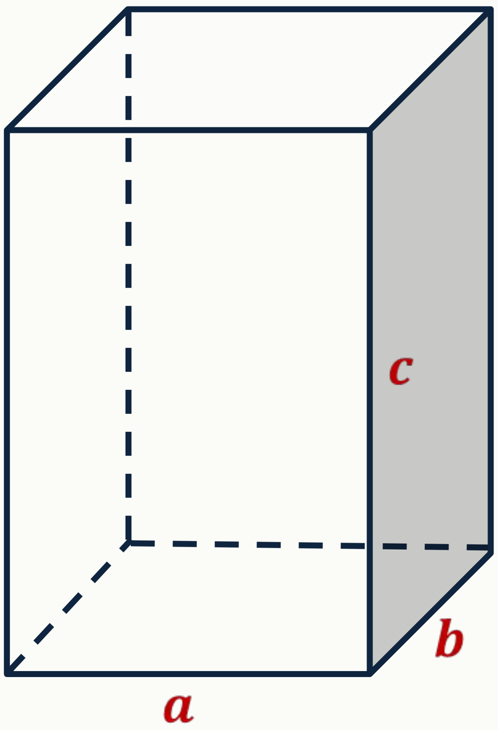
Параллелепипед P разобьется на равные кубы с длиной каждого ребра $\frac{1}{10^n}$.

Общее количество таких кубов равно $abc \cdot 10^{3n}$.

Т.к. объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$, то объем всего параллелепипеда P будет равен $V = abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$.

$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$$

Что и требовалось доказать.



Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство.

Пусть дан прямоугольный параллелепипед P.

V – объем

Докажем, что $V = a \cdot b \cdot c$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c – бесконечная десятичная дробь.

Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-ой.

$a_n \le a \le a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$.

$\times$

$b_n \le b \le b'_n$, где $b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}$.

$\times$

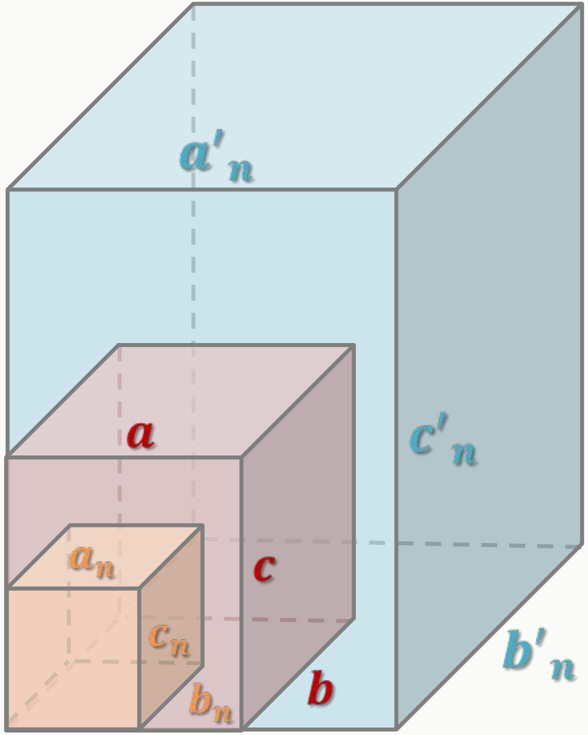
$c_n \le c \le c'_n$, где $c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}$.

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

$$a_n b_n c_n \le abc \le a'_n b'_n c'_n \quad \Leftrightarrow \quad V_n \le V \le V'_n$$

Будем неограниченно увеличивать n.

Число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа abc.



Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство.

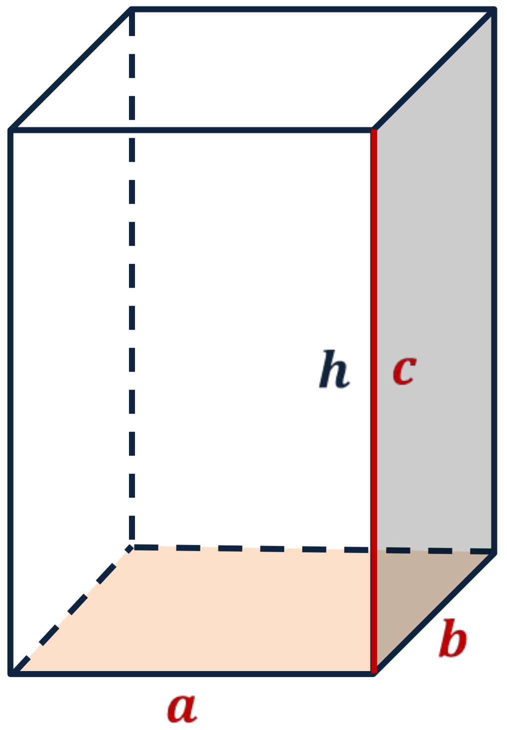
Пусть грань с ребрами a и b – основание прямоугольного параллелепипеда.

$$\boldsymbol{S}_{\text{осн}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{h}$, где $\boldsymbol{S}_{\text{осн}}$ – площадь основания,
$\boldsymbol{h}$ – высота прямоугольного параллелепипеда.

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{h}}$$



Что и требовалось доказать.

Следствие. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство.

Достроим прямую треугольную призму с основанием ABC ($\angle A = 90°$) до прямоугольного параллелепипеда.

$\boldsymbol{V = 2S_{\Delta ABC} \cdot h}$, где $\boldsymbol{S_{\Delta ABC}}$ – площадь основания ΔABC,
$\boldsymbol{h}$ – высота призмы.

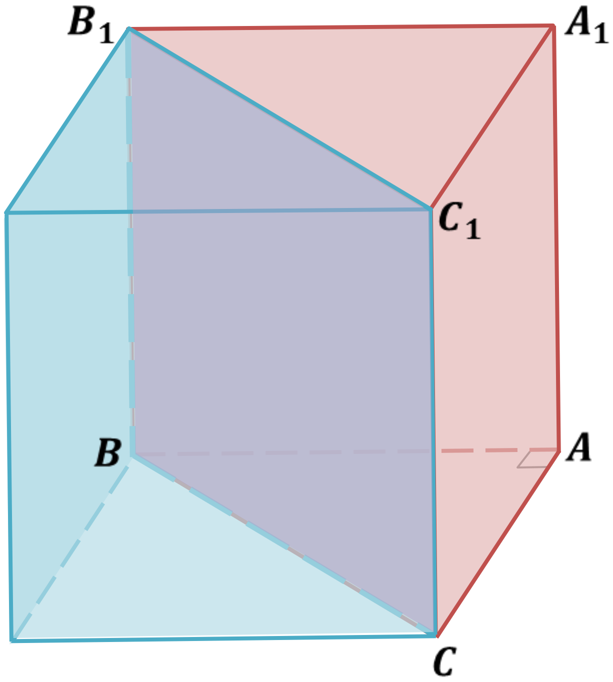
Плоскость B_1BC разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы.

Эти призмы равны, так как имеют равные основания и равные высоты.

$$\boldsymbol{V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{2} \cdot 2S_{\Delta ABC} \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h}}$$

Что и требовалось доказать.



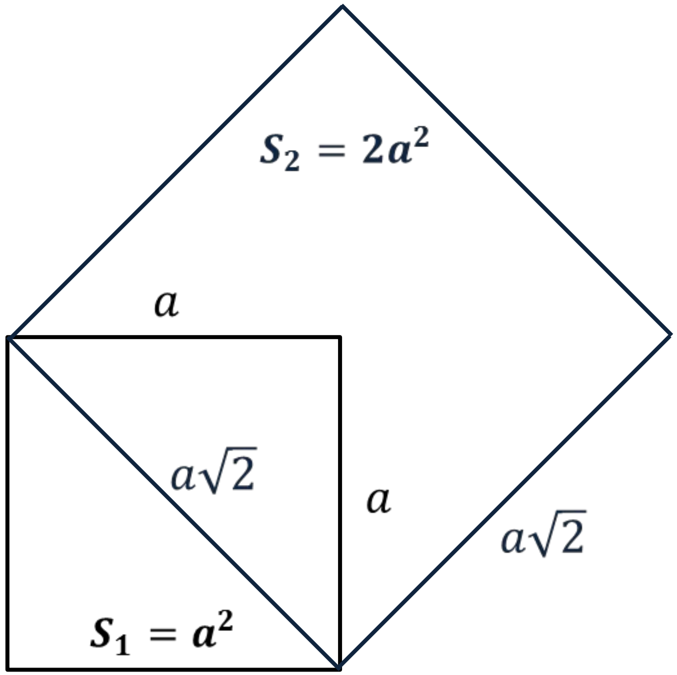
Замечание.

Рассмотрим квадрат со стороной a.

Из теоремы Пифагора его диагональ $d = a\sqrt{2}$.

Поэтому площадь построенного на ней квадрата вдвое больше площади данного квадрата.

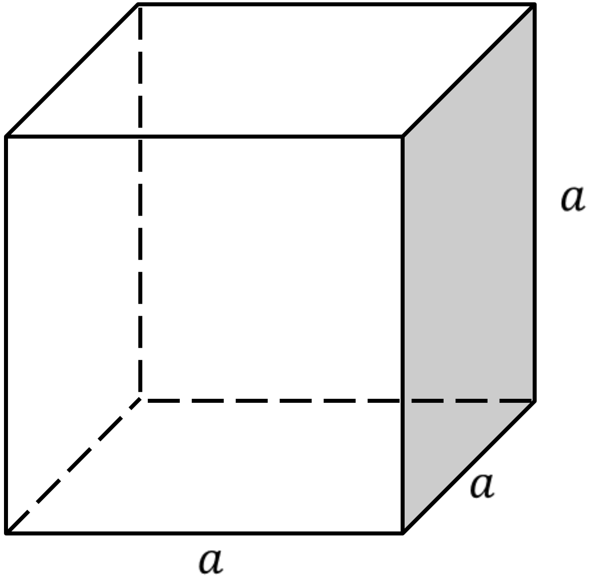
Таким образом*, не составляет труда построить сторону квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.*



Замечание.

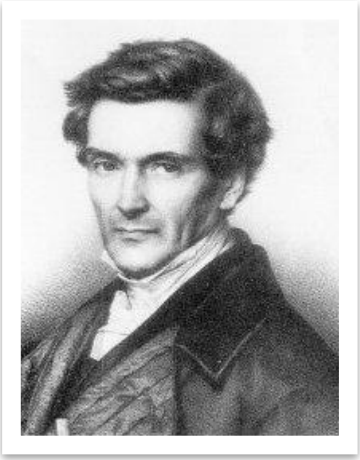
Рассмотрим куб со стороной a.

Вопрос: можно ли с помощью циркуля и линейки построить сторону куба, объем которого вдвое больше объема данного куба, т.е. построить отрезок, равный произведению $\sqrt[3]{2}a$?



Эта задача получила название:

«задача об удвоении куба».



В 1837 году французский математик **Пьер Лоран Ванцель** доказал, что *такое построение невозможно*.

Одновременно им была доказана неразрешимость еще одной задачи на построение – «задачи о трисекции угла» *(произвольный данный угол разделить на три равных угла)*.

К числу классических неразрешимых задач на построение относится также «задача о квадратуре круга» *(построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга)*.

Задача. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональю 13 см и сторонами основания 4 см и 3 см.

Решение.

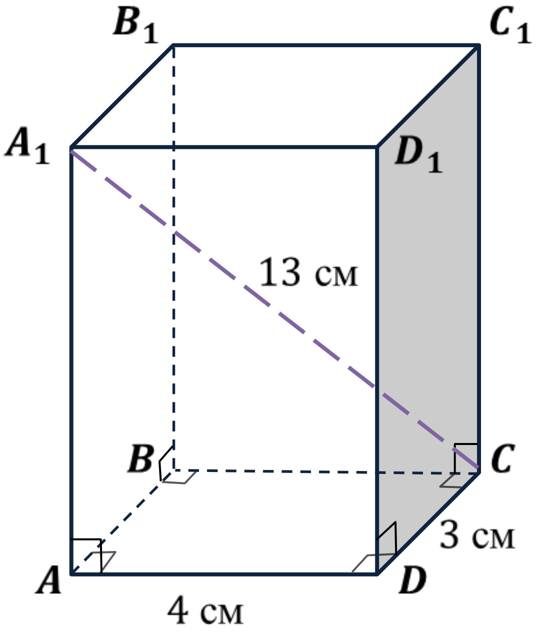
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{13^2 - 4^2 - 3^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 \text{ (см}^3\text{)}$$



Ответ: 144 см^3.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед, основание $ABCD$ – квадрат. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 396 см³. Определите высоту прямоугольного параллелепипеда, если $AD = 6$ см.

Решение.

$$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

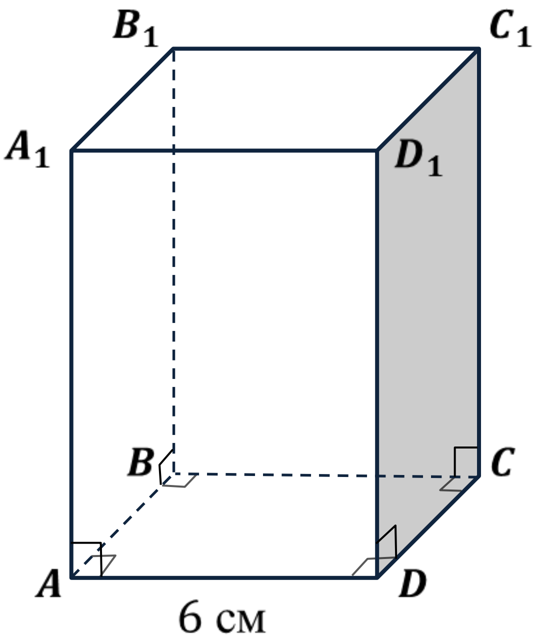
$$h = \frac{V}{S_{\text{осн}}}$$

Т.к. $ABCD$ – квадрат, то $S_{\text{осн}} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см²).

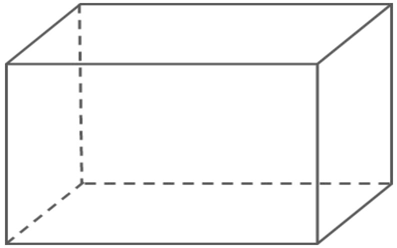
$V = 396$ см³

$$h = \frac{396}{36} = 11 \text{ (см)}$$

Ответ: 11 см.



Объем прямоугольного параллелепипеда



Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$