Глава 4. Разложение функций в степенные ряды

4.1. Задача разложения функции в степенной ряд. Единственность разложения

В предыдущей главе рассматривая степенной ряд, мы устанавливали область сходимости этого ряда и рассматривали задачу нахождения его суммы.

В настоящей главе мы займемся решением обратной задачи: имея функцию f, найти степенной ряд, который имел бы эту функцию в некоторой области сходимости своей суммой.

Эту задачу называют задачей разложения функции в степенной ряд.

Итак, что значит разложить функцию $y = f(x)$ в степенной ряд?

Определение. Будем говорить, что функция f разлагается в промежутке $(a-r;\ a+r)$ в степенной ряд, если существует такой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ (где $c_0,\ c_1,\ \ldots, c_n, \ldots \in R$), который в этом интервале сходится к данной функции так, что (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = f(x)$ для всех $x \in (a-r;\ a+r)$.

При этом говорят, что функция f в промежутке $(a-r; a+r)$ разлагается в ряд по степеням $(x-a)$, а левую часть равенства (1) называют разложением функции f по степеням $(x-a)$.

Значение указанной выше задачи состоит в том, что разложение функций в степенные ряды находит широкое применение в приближенных вычислениях и является одной из основ приближенных методов математического анализа.

Вследствие простоты конструкции степенного ряда такое разложение дает способ эффективного вычисления значений функции по данному значению аргумента, ибо частичные суммы степенного ряда являются обыкновенными многочленами.

Заменяя данную функцию f частичной суммой ряда, мы сводим вычисления значения этой функции к вычислению значения некоторого многочлена. Беря достаточно большое число первых членов ряда, мы можем вычислить значение функции f с любой заданной степенью точности.

С помощью разложения функций в степенные ряды также можно вычислить значения определенных интегралов от данных функций по любому отрезку, лежащему в области сходимости и ряда к данной функции f.

Теорема 1. Если в некотором интервале $(a-r;a+r)$ функция f разлагается в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то такое разложение единственно.

Доказательство Т.1

Пусть функция f разлагается в интервале $(a-r;a+r)$ в степенной ряд по степеням $(x-a)$. | почему ?

Это значит существует такой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, который сходится к функции $f(x)$ на интервале $(a-r; a+r)$.

Чем f является для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$?

Иначе говоря, функция f является суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, т.е. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

Как выражаются коэффициенты степенного ряда через его сумму ?

Как убедились в §3.6. $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $c_0 = f(a)$. Так как значение функции и ее производной в точке находится однозначно, то коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ однозначно выражаются через f и ее производные в точке $x = a$.

Итак, представление функции степенным рядом (когда это возможно) однозначно.

4.2. Ряд Тейлора

Пусть функция f бесконечно дифференцируема в т. a. Тогда по этой функции однозначно можно вычислить коэффициенты степенного ряда по формуле $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Определение. Степенной ряд с коэффициентами,

вычисляемыми по формуле $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, т.е.

ряд вида $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ldots$

называется рядом Тейлора для функции f,

записанным по степеням $(x - a)$ или, иначе говоря

в окрестности т. a (независимо от того является ли

в какой-либо области функция f его суммой или нет)

Если a=0, то ряд Тейлора принимает вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

и называется рядом Маклорена.

Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд может быть сформулирована так:

Теорема $1'$: Если функция f в некоторой окрестности точки a разлагается в степенной ряд по степеням $(x - a)$, то этим рядом является ряд Тейлора этой функции, составленный в окрестности точки a.

Этот результат даёт подход к решению задачи о разложении функции в степенной ряд. Внимательно посмотрите на вид коэффициентов ряда Тейлора и сформулируйте условие, при выполнении которого можно ставить задачу о разложении функции в ряд по степеням $(x - a)$.

Вид коэффициентов ряда Тейлора показывает, что ставить задачу о разложении функции f в степенной ряд по степеням $(x - a)$ можно лишь в случае, если f бесконечно дифференцируема в точке a. Иначе говоря, бесконечная дифференцируемость функции в точке a является необходимым условием разложения функции в степенной ряд.

Замечание. Может случиться, что составленный для функции f ряд Тейлора сходится на некотором интервале, но его сумма совпадает с f не на всём интервале сходимости.

Пример1. Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ бесконечно дифференцируема в интервале (-1;1).

В этом интервале для неё можно построить степенной ряд: $1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...$, абсолютно сходящийся к этой сумме, т.е. справедливо разложение:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...,\ (-1;1)$$

Пример 2. Функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ бесконечно дифференцируема в промежутке $(-\infty;+\infty)$, а равенство $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ справедливо только для $|x|<1$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\psi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x=0 \end{cases}$

Убедимся, что ψ бесконечно дифференцируема в $(-\infty;+\infty)$. Найдём её производные.

Пусть сначала x=0. Обозначим

$$(*)\ P_n\left(\frac{1}{x}\right)=c_0+c_1\frac{1}{x}+\ldots+c_n\left(\frac{1}{x}\right)^n+\ldots$$

многочлен n-ой степени относительно $\frac{1}{x}$.

Тогда $\psi'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_3\left(\frac{1}{x}\right)$;

$$\psi''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{4}{x^6} - e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{6}{x^4} = e^{-\frac{1}{x^2}} P_6\left(\frac{1}{x}\right),$$

. . . .

$$\psi^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}(\frac{1}{x}).$$

Итак, $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x \neq 0$.

Покажем, что $\psi(\mathrm{x})$ бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$ и вычислим все её производные.

Для этого вычислим $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\dfrac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $m \in \mathbb{N}$.

Обозначим $\dfrac{1}{x^2} = y$. Тогда при $x \to 0$, $y \to \infty$ и

$$**)\ \lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{1}{x^m}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{e^y} = \ldots = 0$$

Докажите полученный результат

Тогда для всякого многочлена $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ имеем:

$$\lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{m=0}^{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^m}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

Пользуясь определением производной от функции в точке и равенством (**) получим:

$$\psi'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Допустим, что при некотором значении $n \in \mathrm{N}$, $\psi^{(n)}(0) = 0$

Тогда по определению производной (n+1) порядка.

$$\psi^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to} \frac{\psi^{(n)}(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Итак, $(\forall\ n \in \mathbb{N})\ \psi^{(n)}(0) = 0$

| *Почему справедливо это утверждение?*

Поскольку любая производная от функции $\psi(x)$ в точке $x = 0$ равна нулю, то все коэффициенты ряда Тейлора $c_n = \dfrac{\psi^{(n)}(0)}{n!}$, равны нулю.

Таким образом ряд Тейлора для функции ψ по степеням x , будет иметь вид

$0+0 \cdot x+0 \cdot x^2+\ldots+0 \cdot x^n+\ldots$

Этот ряд сходится и сумма его равна 0 на $(-\infty; +\infty)$, в то же время функция ψ не равна тождественно нулю на $(-\infty; +\infty)$

4.3. Формула Тейлора

Рассмотрим функцию f, определённую в промежутке L. Предположим, что в некоторой точке $a \in L$ существуют производные до n-го порядка включительно. Что это значит?

Это означает, что f имеет в некоторой окрестности точки a производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и кроме того производную n-го порядка в самой точке a.

Итак, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ существуют в окрестности точки a, $f^{(n)}(x)$ - в точке a.

Составим для функции f многочлен

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n,$$

обладающий свойством: значение многочлена и всех его производных в точке a совпадают со значением функции f и её производных в точке a.

Дифференцируя многочлен $P_n(x)$ n раз получим:

$$P_n^{/}(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$P_n^{//}(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2c_n$$

Положив в каждом из этих равенств $x = a$ и учитывая, что $f(a) = P_n(a)$, $f'(a) = P_n'(a)$, ..., $f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$, получаем $c_0 = f(a)$, $c_1 = \dfrac{f'(a)}{1!}$, ..., $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Итак, для функции f построили многочлен

$$(1)\ P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

обладающий свойством: значения функции f и её производных в точке a совпадают со значением многочлена $P_n(x)$ и его производных в точке a.

Можно ли утверждать, что $f(x) = P_n(x)$?

Поскольку функция f не многочлен, то нельзя утверждать, что $f(x)=P_n(x)$.

Обозначим разность (2) $f(x)-P_n(x)=r_n(x)$, откуда

$$(2')\, r_n(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-...-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Эта формула носит название *формулы Тейлора*

Приобретает интерес оценка разности (2).

Представим $r_n(x)$ в более удобной форме.

Для этого наложим на f более жёсткие условия: будем предполагать, что для f существуют в L все производные до $(n+1)$-го порядка включительно:

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n+1)}(x),\ \ldots$$

Зафиксируем любое $x \in L$ и по образцу правой части равенства

$$(2')\, r_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

составим вспомогательную функцию $\varphi(z)$:

$$(3)\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

причём считаем $z \in (a; x)$ (для определённости положим $x > a$).

Выясним свойства функции φ на $(a;x)$:

1. φ непрерывна на $(a;x)$

2. На концах принимает значения $\varphi(a)=r_n(x),\ \varphi(x)=0$

3. В $(a;x)$ существует $\varphi'(z)=-f'(z)-\left(\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-f'(z)\right)-$

$$-\left(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right)-\ldots$$

$$\ldots-\left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right)$$

После упрощения $\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$ (4)

Выберем ещё одну вспомогательную

функцию $\psi(z)=(x-z)^{n+1}$

Она обладает свойствами:

1. Непрерывна на $(a;x)$; 2. ψ(a)=(x-a)$^{n+1}$, $\psi(x)=0$;

3. В $(a;x)$ имеет производную $\psi'(z)=-(n+1)(x-z)^n$ (5),

отличную от нуля.

Исходя из выясненных свойств функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ какая теорема применима к ним?

К паре функций $\varphi(\mathrm{z})$ и $\psi(\mathrm{z})$ применима теорема Коши:

$$\frac{\varphi(\mathrm{a})\text{-}\varphi(\mathrm{x})}{\psi(a)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, \text{ где } a<c<x, \tag{7}$$

т. е. $c=a+\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$.

Учитывая равенства (4), (5) находим

$$(7) \qquad \frac{r_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

Найдите значения $\varphi'(c)$, $\psi'(c)$, воспользовавшись формулами (5) и (6), подставьте в формулу (7) и найдите $r_n(x)$.

$$r_n(x) = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Итак, $\boxed{r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$ (8)

Полученная форма $r_n(x)$ называется формой Лагранжа остаточного члена

Обозначив $x - a = \Delta x$, $f(x) - f(a) = \Delta f(a)$, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать:

$$\Delta f(a) = \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

В отдельных случаях форма Лагранжа остаточного члена оказывается непригодной для его оценки и приходится прибегать к другим формам. Получим остаточный член в форме Коши.

Для этого положим $\psi(z) = x - z$. Тогда $\psi(a) = x - a,\ \psi(x) = 0,\ \psi'(z) = -1.$

Применяя формулу Коши к функциям

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n \quad (3)$$

$$\psi(z)=x-z$$

$$\varphi(a)=r_n(x),\ \varphi(x)=0 \ (4),\ \varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n \quad (5)$$

и $\psi(a)=x-a,\ \psi(x)=0,\ \psi'(z)=-1$, получим

$$\frac{r_n(x)}{x-a}=\frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!(-1)}$$

Итак $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$ (9)

Положив в формуле (9) c=a+$\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$,

получим $(x\text{-}c)^n = \left(x-a-\theta(x-a)\right)^n = (x-a)^n(1-\theta)^n$

Тогда $\boxed{r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}}$ (10)

Получена форма Коши остаточного члена.

Итак, если функция f имеет в промежутках $(a-r,\ a]$ или $[a,\ a+r)$ производную до (n+1)-го порядка включительно, то имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}+r_{n}(x),$$

где остаточный член может быть записан

в форме Лагранжа $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (8) или

в форме Коши $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^{n}(x-a)^{n+1}$ (10)

4.4. Условие разложимости функции в ряд Тейлора

Теорема 1 Для того, чтобы ряд Тейлора функции f, построенный в интервале $(a-r, a+r)$ сходился к ней в этом интервале необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$ для всех $x \in (a-r, a+r)$

Доказательство Т.1

1. Необходимость.

Пусть ряд Тейлора для функции f сходится к f в $(a-r;a+r)$, это значит:

$$\left(\forall x \in (a-r;a+r)\right)\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)\right)$$

Какое математическое предложение использовано?

По какому правилу строятся коэффициенты многочлена Тейлора для функции f и ряда Тейлора для функции f по степеням $(x - a)$? Какое соотношение может быть установлено между многочленом Тейлора P_n и частичной суммой ряда Тейлора для функциии f?

$$P_n(x).?.S_n(x)$$

Так как коэффициенты многочлена Тейлора строятся по тому же правилу, что и коэффициенты ряда Тейлора для функции f по степеням $(x - a)$, а именно $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, то $P_n(x) = S_n(x)$ и формула Тейлора принимает вид ....?

$f(x) - S_n(x) = r_n(x)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - S_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) =$$

$$= f(x) - f(x) = 0 \qquad \Big| \textit{Почему?}$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при любых $x \in (a\text{-r}; a\text{+r})$

Необходимое условие доказано.

2. Достаточность

Пусть $(\forall x \in (a-r;a+r))\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0\right)$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=0 \Rightarrow \left|\textit{почему?}\right.$

$\Rightarrow f(x)-\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ряд Тейлора для f по степеням $(x-a)$

сходится к f в $(a-r;a+r)$

Достаточное условие доказано.

Теорема 2 Если функция f бесконечно дифференцируема в $[a; x]$ и все её производные ограничены в этом промежутке одним и тем же числом, то ряд Тейлора для функции f сходится к функции f в $[a; x]$.

Прежде чем перейти к доказательству, выясним: что означает ограниченность в $[a; x]$ всех производных функции f одним числом?

Доказательство Т.2

Ограниченность всех производных функции f в $[a;x]$ одним числом означает:

$$\left(\exists M \in \mathbb{R}^{+}\right)\left(\forall t \in [a;x]\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left(\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M\right).$$

Воспользуемся формой Лагранжа для записи остаточного члена: $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где

$a < c < x$

В силу ограниченности в $[a;x]$ всех производных функции f одним и тем же числом M получаем:

$$(\forall t \in [a;x]) \quad |r_n(t)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1} \right| = \frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+1},$$

где $a < c < t$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{(n+1)!}\left|t-a\right|^{n+1}$ и исследуем его

на сходимость, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\left|t-a\right|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!M\left|t-a\right|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|t-a\right|}{n+2}=0<1$$ при

любом $a<t<x$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+1}$ сходится, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+!}=0$$

| *почему?*

В силу неравенства

$$(\forall t\in[a;x])\left(|r_n(t)|\le\frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+1}\right)$$

| *почему?*

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

Последнее означает сходимость ряда Тейлора к функции f в $[a;x]$

4.5. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

4.5.1. Алгоритм решения задачи на разложение функции в ряд Тейлора

Укажем примерный план решения задачи на разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки a.

1. Найти последовательно производные функции f: f', f'', f''' ,..., $f^{(n)}(x)$,... .

2. Вычислить значения функции f и ее производных в точке a: $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$,..., $f^{(n)}(a)$,... .

3. Найти коффициенты ряда Тейлора:

$$c_0 = f(a), \; c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

4. Записать формально ряд Тейлора, соответствующий функции f:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

5. Найти интервал сходимости $(a-r, a+r)$ построенного ряда.

6. Найти множество тех $x \in (a-r, a+r)$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, то есть построенный ряд сходится к f.

Только для таких x возможна запись:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\,.$$

4.5.2. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=e^x$

Функция $f(x)=e^x$ определена на $D(f)=R$.

1. Найдем производные: $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ..., $f^{(n)}(x)=e^x$,... . Все производные существуют на множестве $D(f)=R$.

2. Находим значения функции и производных в точке $x=0$: $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, ..., $f^{(n)}(0)=1$,... .

3. Находим коффициенты ряда Маклорена:

$$c_0 = f(0) = 1\ ,\quad c_2 = \frac{f(0)}{1!} = \frac{1}{1!}\ ,\ldots,\quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\ ,\ldots$$

4. Записываем формально ряд Маклорена для

$$f(x) = e^x :\quad e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

5. Найдем интервал сходимости построенного ряда, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1\ .$$

Область сходимости $(-\infty;+\infty)$.

6. Зафиксируем произвольное $h \in R^{+}$

$(\forall\, x \in [-h, h])(|f^{(n)}(x)| = |e^{x}| \leqslant |e^{h}| = e^{h} \Rightarrow$

все производные ограничены одним числом e^{h}

Следовательно, построенный ряд сходится в

$(-\infty; +\infty)$ к функции $f(x) = e^{x}$:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!} + \ldots,\ (-\infty; +\infty)$$

4.5.3. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=\sin x$

Область определения данной функции $D(f)=\mathbb{R}$.

1. Найдем производные:

$$f(x)=\sin x;\; f'(x)=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2+x\right),$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n+x\right),\ldots$$

Все производные существуют на $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Найдем значение функции и производных в точке $x=0$:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=-1, \quad \ldots$$

$$f^{(n)}_{(0)}=\left[\begin{array}{l} 0, \textit{если}\; n=2\mathrm{k} \\ (-1)^{k-1}, \textit{если}\; n=2\mathrm{k}-1 \end{array}\right.$$

3. Найдем коэффициенты ряда Маклорена:

$$c_0=0, \quad c_1=\frac{1}{1!}, \quad c_2=0, \quad c_3=\frac{-1}{3!}, \ldots$$

$$\ldots, \quad c_{2\mathrm{k}-1}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\mathrm{k}-1)!}, \quad c_{2\mathrm{k}}=0, \ldots$$

4. Записываем ряд Маклорена для $f(x)=\sin x$.

$$\sin x \sim x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

5. Находим интервал сходимости построенного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|(2n-1)!}{(2n+1)!|x^{2n-1}|}=|x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0<1.$$

Ряд сходится на $(-\infty,+\infty)$.

6. $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \ |f^{(n)}(x)| = \left|\sin \frac{\pi}{2}(n+x)\right| \leq 1, \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд сходится на $\mathbb{R}$ к $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, (-\infty, +\infty).$$

4.5.4. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \left(-\infty; +\infty\right).$$

<u>Получить разложение самостоятельно.</u>

4.5.5. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = ln(1+x)$

Функция определена на множестве $D(f) = (-1; +\infty)$.

Найдем $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ может быть разложена в

степенной ряд $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots$

Этот ряд равномерно сходится в $(-1, 1)$ | почему?

Проинтегрируем этот ряд по отрезку $[0, x]$, где $|x| < 1$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^x = \ln(1+x) =$$

$$= \int_0^x dx - \int_0^x xdx + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x x^{n-1}dx + \cdots =$$

Почему возможно почленное интегрирование?

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots.$$ Этот ряд сходится в том же интервале $(-1, 1)$. Равенство (*) $\ln(1+x) =$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$ справедливо на $(-1, 1)$.

Исследуем сходимость построенного ряда к $f(x)=\ln(1+x)$ на концах интервала $(-1,1)$.

При $x=-1$ теряет смысл $\ln(1+x)$, поэтому и равенство (*) лишено смысла.

При $x=1$ имеет смысл $\ln(1+x)$ и ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\cdots$$ сходится.

Остается проверить справедливость равенства

$$(**)\quad \ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots.$$

Для проверки равенства (**) поступим так:

будем делить 1 на $(1+x)$ и остановимся, сделав n - ый шаг,

получим: $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$.

Проинтегрируем это равенство по отрезку $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2=x\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Big|_0^1+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx.$$

$$\ln 2=\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}_{S_n \text{ ряда } (**)}+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx.$$

$$\ln 2 = S_n(x) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \Rightarrow \ln 2 - S_n(x) = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Для доказательства справедливости равенства (**) остается доказать $\lim\limits_{n\to\infty} |\ln 2 - S_n(x)| = 0.$

С этой целью дадим оценку $\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right|$:

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right| \le \left|\int_0^1 x^n\,dx\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\ln 2 - S_n(x)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \ln 2.$$

Итак, разложение $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$

справедливо на промежутке $(-1,1]$.

Пример.

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{2+x}{2-x}$.

$$D(f) = \left\{x \middle| \frac{2+x}{2-x} > 0\right\} = \{x | -2 < x < 2\}.$$

$$\ln\frac{2+x}{2-x} = \ln\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{x}{2}\right), \ (-2,2).$$

Запишем разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \ (-1,1].$$

Из последнего равенства, заменив x на $\dfrac{x}{2}$, получаем

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+\cdots,\ (-2,2]$$

Аналогично получаем

$$\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}-\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots-\frac{x^n}{n\cdot 2^n}-\cdots,\ [-2,2).$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\ln\frac{2+x}{2-x}=2\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\cdots\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3\cdot 2^2}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot 2^{2n-2}}+\cdots,\ (-2,2).$$

4.5.6. Разложение в ряд Маклорена степенной функции. Биномиальный ряд

Разложим в ряд функцию $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin N$. Будем рассматривать функцию $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, а не $f(x)=x^{\alpha}$, так как при $x=0$ функция $f(x)=x^{\alpha}$ и все ее производные обращаются в нуль и получается ряд, у которого все коэффициенты равны нулю.

Число α считаем отличным от натурального, так как при $\alpha \in N$ функция является многочленом и совпадает со своим рядом Маклорена.

1. Находим производные:

$$f(x) = (1+x)^{\alpha},$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

....

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

....

2. Находим значения f и производных в точке $x=0$:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = \alpha,$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

....

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

....

3. Найдем коэффициенты ряда Маклорена:

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{\alpha}{1!}, c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \ldots, c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \ldots$$

4. Записываем ряд Маклорена для $f(x) = (1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

5. Находим интервал сходимости построенного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}\right| =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|.$$

Ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$, т.е. в интервале (-1;1).

6. Покажем сходимость построенного ряда к функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ *в* $(-1;1)$. Для этого запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши и покажем что $\lim\limits_{x\to\infty} r_n(x)=0$.

Остаточный член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta\ (x-a))}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n,$$

где a=0, $0<\theta<1$,

$$f^{n+1}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

Итак, $r_n(x) = ?$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \times$$

$$\times x^{n+1}(1-\theta)^n = \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \times$$

$$\times x^n \alpha x \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-1-n+1)}{n!} x^n}_{(1)} \cdot \underbrace{\alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1}}_{(2)} \times$$

$$\times \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{(3)}.$$

Множитель (1) представляет собой общий член биномиального ряда для степенной функции с показателем $(\alpha - 1)$.

В силу сходимости ряда он при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Второй множитель (2) не зависит от n и ограничен $|\alpha x|\left|(1+\theta x)^{\alpha-1}\right| \leq |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$.

Третий множитель $\left|\dfrac{1\text{-}\theta}{1+\theta x}\right|^{n} < 1$, т.к. при x>-1

$1+\theta$x >1-θ. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Таким образом имеет место разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots \quad (-1;1).$$

Мы не касались вопроса о справедливости его при $x=\pm 1$, т.к. его решение требует кропотливого исследования остаточного члена.

Ограничимся указаниями, что при $x=1$ разложение имеет место при $\alpha>1$, а при $x=-1$ для $\alpha>0$.

Задание :

запишите разложение в ряд функций

$f(x) = (1+x)^{-1}$, $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$,

$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Пример. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = arctgx$.

Найдем $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ее можно рассматривать как сумму ряда $1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$ в (-1;1).

Проинтегрируем равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

ПОЧЕМУ ЭТО ВОЗМОЖНО?

по промежутку $[0\,;x] \subset (-1;\,1)$.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx + \ldots +$$

$$+(-1)^n \int_0^x x^{2x}\,dx + \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad (-1;\,1).$$

Можно доказывать, что это равенство справедливо и при $x = \pm 1$.

4.6. Применение рядов к приближенному вычислению значений функции.

Допустим нужно вычислить значение функции f в т. $x_0 \in D(f)$. Если функция f разлагается в ряд $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + ...$ в интервале $(a-r,\ a+r)$ и $x_0 \in (a-r,\ a+r)$, подставив в полученное разложение $x = x_0$, получим верное равенство

$$f(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - a) + ... + c_n(x_0 - a)^n + ...$$

Ограничиваясь несколькими первыми членами, получим приближенное равенство

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - a) + \ldots +$$
$$+ c_n(x_0 - a)^n.$$

Погрешность метода не превосходит

$$\left|f(x_0) - S_n(x_0)\right| = \left|r_n(x_0)\right|.$$

При достаточно большом n эту погрешность можно сделать сколь угодно малой.

Таким образом, значение функции можно вычислить с любой заданной степенью точности. Если, например, нужно вычислить значение $f(x_0)$ с точностью до ε, то в разложении функции в ряд достаточно взять такое число членов, чтобы остаток не превосходил ε: $\left|r_n(x_0)\right| < \varepsilon$.

Укажем некоторые методы оценки остатка.

1) Если ряд $c_0 + c_1(x_0 - a) + ... + c_n(x_0 - a)^n + ...$ получился знакочередующийся, то остаток ряда $r_n(x_0) = c_{n+1}(x_0 - a)^{n+1} + c_{n+2}(x_0 - a)^{n+2} + ...$ тоже знакочередующийся ряд и его сумма не превосходит его первого члена $c_{n+1}(x_0 - a)^{n+1}$, т.е. $\left|r_n(x_0)\right| \le \left|c_{n+1}(x_0 - a)^{n+1}\right|$.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x_0 - a)^n$ знакоположительный,

то здесь могут помочь следующие утверждения:

1. Если (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходящиеся положительные ряды и члены первого ряда не превосходят членов второго ряда, то и n-ный остаток первого не превосходит n-ого остатка второго.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{20}$ с точностью до 0,001.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots.\quad(-1,1).$$

Положив в этом разложении $x_0=\frac{1}{4}$, получим

$$4\sqrt{1+\frac{1}{4}}=4(1+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4^3}+\ldots)=$$

$$=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 4^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 6\cdot 8\cdot 4^4}+\ldots)$$

3) Иногда оценку остатка производят с помощью остаточного члена формулы Тейлора, записаного в той или иной форме. Для вычисления функции с заданной степенью точности ε, нужно n подобрать так, чтобы $|r(x_0)| < \varepsilon$.

Пример 1. Вычислить ln 1,2 взяв 4 члена разложения и оценить погрешность.

Запишем разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) \;=\; x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots,(-1,1]$$

Нам нужно вычислить ln 1,2, следовательно нужно положить $x_0 = 0,2$: $\ln(1+0,2) =$

$$= 0,2-\frac{(0,2)^3}{3}+\frac{(0,2)^3}{3}-\frac{(0,2)^4}{4}+\frac{(0,2)^5}{5}-\ldots$$

Оставим 4 члена разложения, получим приближённое равенство: $\ln(1+0,2) \approx$

$\approx 0,2=0,02+0,02+0,026\text{-}0,0004=0,1822$

$$r_4 = \frac{(0,2)^5}{5} - \frac{(0,2)^6}{6} + \ldots \le \frac{(0,2)^5}{5} =$$

$$= \frac{0,00032}{5} \le 0,0001$$

Итак, $\ln 1,2 \approx 0,182$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{20}$ с точностью до 0,001.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-.... \quad (-1,1).$$

Положив в этом разложении $x_0=\frac{1}{4}$, получим

$$4\sqrt{1+\frac{1}{4}}=4(1+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4^3}+...)=$$

$$=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 4^3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4^4}+...)$$

Поскольку ряд знакочередующийся, подбираем такой член, чтобы его модуль не превосходил 0,001. Таковым оказывается член $\left|\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4^3}\right| < 0,001.$

Итак,

$$\sqrt{20} \approx 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4^2} \qquad \approx 4,469 \approx 4,47.$$

4.7. Приближенное вычисление интегралов с помощью рядов.

Разложение подинтегральной функции в степенной ряд и почленное интегрирование ряда оказывается полезным для приблежённого вычисления определённого интеграла, который не берётся в конечном виде.

Итак, если требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

а $\int f(x)dx$ не выражается в элементарных функциях,

то $f(x)$ разлагают в степенной ряд (*) $\sum_{n=0}^{\infty} Cn(x-d)^n$ и

почленно интегрируют по $[a;b]$ при условии, что $[a;b]$ содержится в интервале сходимости разложения (*):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} Cn \int_a^b (x-d)^n dx.$$

Ряд справа числовой ряд, и заменяя его частичной суммой получаем приближённое значение интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Запишем разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad (-\infty, +\infty).$$

$$(*)\ \ e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad (-\infty, +\infty).$$

Поскольку $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset (-\infty, +\infty)$ проинтегрируем

почленно (*) по $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx + \frac{1}{2!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^4dx - \frac{1}{3!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^6dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^5}{2!5}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 2^7} + \ldots - \text{ряд какой?}$$

Оценим остаток, он не должен превосходить 0,001. Ищем такой член ряда чтобы он по модулю не превосходил 0,001.

Находим $\dfrac{1}{3!7\cdot 2^7} < 0,001$. Отбрасываем все члены начиная с четвёртого $\dfrac{1}{3!7\cdot 2^7}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5} =$$

$$= 0,500 - 0,042 + 0,003 \approx 0,461 \approx 0,46.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 f(x)dx$ с точностью до 0,0001, если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} \text{ для } x\neq 0,\\ 1 \text{ для } x=0.\end{cases}$$

Функция непрерывна на $[0,1]$, интеграл существует.

Запишем разложение в ряд Маклорена $f(x)=\sin x$.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad (-\infty,+\infty).$$

$$f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots \quad (-\infty,+\infty).$$

$[0,1] \subset (-\infty, +\infty)$. Проинтегрируем почленно последний ряд по $\left[0,1\right]$:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx -$$

$$- \int_0^1 \frac{x^6}{7!} dx + \ldots = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3 \cdot 3!}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5 \cdot 5!}\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{x^7}{7 \cdot 7!}\Big|_0^1 + \ldots = 1 - \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 120} - \frac{1}{7 \cdot 5760} + \ldots$$

Поскольку ряд знакочередующийся, ищем член, который по модулю не превосходит 0,0001.

Таковым является член

$\left|-\frac{1}{7\cdot 7!}\right| = \left|-\frac{1}{7\cdot 5760}\right| < 0,0001$, начиная с него все

члены ряда можно отбросить. Получим:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1 - 0,5556 + 0,00167 =$$

$$= 0,44607 \approx 0,446.$$