Лк_4

Потенциальная энергия. Во многих случаях сила, действующая на тело, оказывается зависимой от его положения, от координат тела, и величину силы вдоль координатной оси можно вычислить путем дифференцирования некоторой величины по этой координате.

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad F_y = -\frac{dU}{dy} \qquad F_z = -\frac{dU}{dz} \qquad (3.12)$$

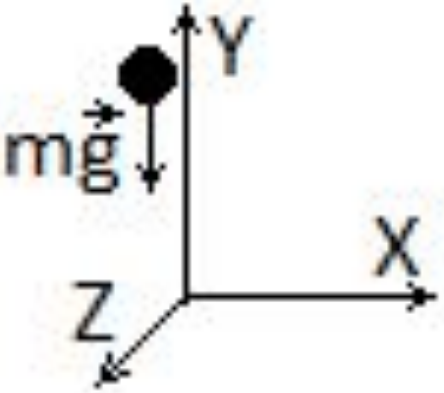
В этом случае сила называется потенциальной, а величина U – потенциальной энергией тела. Поскольку $\Delta\vec{l} = \vec{e}_x\Delta x + \vec{e}_y\Delta x + \vec{e}_z\Delta x$, элементарная работа потенциальной силы

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{l} = \left(-\vec{e}_x\frac{dU}{dx} - \vec{e}_y\frac{dU}{dy} - \vec{e}_z\frac{dU}{dz}\right)\left(\vec{e}_x\Delta x + \vec{e}_y\Delta x + \vec{e}_z\Delta x\right)$$

$$= -\frac{dU}{dx}\Delta x - \frac{dU}{dy}\Delta y - \frac{dU}{dz}\Delta z = -\Delta U_x - \Delta U_y - \Delta U_z = -\Delta U$$

Т.е. равна убыли потенциальной энергии тела.

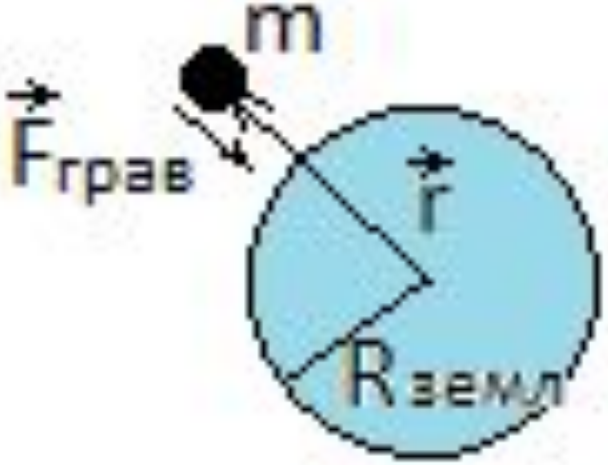
Потенциальная энергия силы тяжести. Сила тяжести тела массой m направлена вертикально вниз а ее модуль равен mg. В системе координат, у которой вертикально направлена ось Y, можно выразить силу тяжести через ее потенциал (потенциальную энергию): U=mgy



$$F_x = -\frac{dU}{dx} = 0;\ F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg;\ F_z = -\frac{dU}{dz} = 0 \qquad (4.1)$$

Формула силы тяжести F_y=-mg верна только вблизи поверхности земли. В общем случае для ее выражения необходимо использовать закон всемирного тяготения:

$$F_{\text{грав}} = G\frac{m_{\text{земл}}m}{r^2} = \frac{gR_{\text{земл}}^2}{r^2}m \qquad (4.2)$$



Эта формула выражает только модуль гравитационной силы через модуль r.

Потенциал гравитационной силы земли можно записать в виде:

$$U = G\frac{m_{\text{земл}} m}{r} = \frac{g R_{\text{земл}}^2}{r} m \qquad (4.3)$$

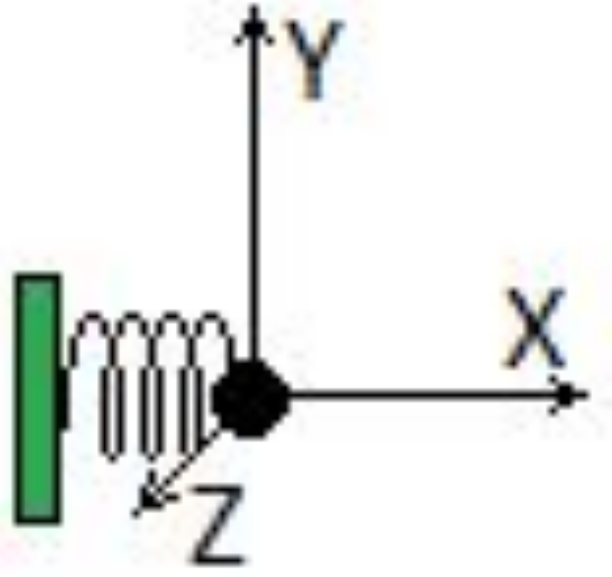
Действительно, производная

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$

Поэтому гравитационная сила, направленная вдоль r, выразится формулой, совпадающей с законом всемирного тяготения (4.2)

$$F_{\text{грав}} = -\frac{dU}{dr} = \frac{g R_{\text{земл}}^2}{r^2} m$$

Сила упругости. При деформации, например, пружины вдоль оси X возникает сила упругости, выражаемая законом Гука $F_{\text{упр}} = -\vec{e}_x kx$ (4.4)



В данной формуле x – это величина деформации, k – коэффициент жесткости. Знак минус показывает, что сила действует против деформации. Легко видеть, что потенциал силы упругости равен

$$U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2} \tag{4.5}$$

Действительно, если продифференцировать (4.5), то получим

$$-\frac{dU_{\text{упр}}}{dx} = -kx = F_{\text{упр}}$$

Как видно из этого обзора, в механике многие силы, действующие на тело, являются потенциальными. Их потенциал называют потенциальной энергией данного тела. ***Главным отличительным свойством потенциальных сил является независимость совершаемой ими работы от формы траектории движения. Величина работы определяется только положением начальной и конечной точек.***

Работа потенциальной силы равна разности потенциалов – разности потенциальных энергий в конечной и начальной точках пути. ***Если траектория движения замкнута, начальная и конечная точки совпадают, работа потенциальной силы равна нулю.***

Закон изменения и сохранения механической энергии. Полная механическая энергия системы материальных точек E складывается из их кинетической энергии W и потенциальной энергии U, т.е.

$$E = W + U. \qquad (4.6)$$

При движении материальных точек внутри системы изменяются как скорости точек, так и их взаимное расположение, определяющее потенциальную энергию. Пусть скорость произвольной (i -той точки) изменяется под действием сил со стороны других точек.

Полное изменение кинетической энергии i-той точки в соответствии с выражением (4.6) определяется работой всех сил, действующих на эту точку - как внутренних так и внешних:

$\Delta W_i = A_i$

Сложив выражения приращения кинетической энергии для всех точек системы, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (4.7)$$

Левая часть этого уравнения является кинетической энергией всей системы, которую можно обозначить ΔW, а правая часть есть общая работа всех сил, которую можно представить, как сумму трех слагаемых:

1. работы всех внутренних потенциальных сил - $A_{\text{внутр. пот}}$;

2. работы всех внутренних непотенциальных сил - $A_{\text{внутр. непот}}$;

3. работы всех внешних сил - $A_{\text{внеш}}$. При этом надо учесть, что суммарная работа всех внутренних потенциальных сил с обратным знаком равна изменению потенциальной энергии системы ΔU. Поэтому равенство (4.7) приобретает такой вид:

$$\Delta W = -\Delta U + A_{\text{внутр. непотен}} + A_{\text{внеш}} .$$

Перенося ΔU в левую часть этого равенства и замечая, что $\Delta W + \Delta U = \Delta E$, получим:

$$\Delta E = A_{\text{внутр. непотен}} + A_{\text{внеш}} \qquad (4.8)$$

Эта формула представляет совыражает ***закон изменения механической энергии:***

Изменение полной механической энергии системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно суммарной работе всех внутренних не потенциальных и всех внешних сил за этот промежуток времени.

В качестве примера применения этого закона рассмотрим вывод так называемой второй космической скорости, под которой подразумевается скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно оказалось способным преодолеть притяжение Земли и улететь от нее в бесконечность. Для этого используем выражение для работы силы тяжести при удалении тела с поверхности земли на бесконечно большое от нее расстояние. Согласно (4.3) потенциальная энергия тела на поверхности земли равна $mgR_з$. При удалении тела в бесконечность его потенциальная энергия становится нулевой. Изменение потенциальной энергии ΔU=mgRз.

Приравняем эту величину кинетической энергии улетающего тела $T=m_2v^2/2$, что означает нулевое значение скорости улетевшего тела на бесконечности. В результате получим:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR_з$$

Откуда выразим необходимую начальную скорость

$$v = \sqrt{2gR_з} = 11174\,\frac{м}{с}$$

Динамика системы материальных точек

Рассмотрим систему из множества взаимодействующих материальных точек. Пронумеруем точки натуральными числами - 1, 2, 3,.... Обозначим массы точек через m_i, где i - номер точки, а силы взаимодействия между k-той и i-той точками – f_{ki}. В отсутствии внешних сил в такой системе имеется точка, которая движется по прямой линии с постоянной скоростью, в соответствие с первым законом Ньютона. Эта точка называется центром масс. Радиус-вектор центра масс - $R_{цм}$ определяется следующей формулой:

$$\vec{R}_{цм} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (4.9)$$

Сумма масс частиц, стоящая в знаменателе (4.9) представляет собой полную массу всей системы, обозначим ее через М. Определим скорость движения центра масс:

$$v_{\text{цм}} = \frac{d\vec{R}_{\text{цм}}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} \tag{4.10}$$

Под знаком суммы в (4.10) стоит сумма импульсов всех частиц системы, которая представляет собой полный импульс системы

$$p_{\text{полн}} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M v_{\text{цм}} \tag{4.11}$$

Таким образом, полный импульс системы материальных точек можно отождествить с импульсом воображаемой материальной точки с массой, равной полной массе системы и находящейся в ее центре масс.

Продифференцировав полный импульс (4.11), получим уравнение движения

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{цм}}}{dt} = \sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum F_i \qquad (4.12)$$

Произведение массы i-той точки на ее ускорение заменили силой, действующей на точку. Каждая из точек может испытывать на себе действие сил других точек системы, а также действие внешних сил. При суммировании внутренних сил по всем точкам системы мы получим ноль, в соответствие с третьим законом Ньютона. Поэтому в правой части (4.12) останется только сумма внешних сил, которую обозначим через $F_{\text{внеш}}$.

После этого уравнение (4.12) примет привычный вид второго закона Ньютона:

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{цм}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \qquad (4.13)$$

Уравнение (4.13) эквивалентно уравнению движения материальной точки, вся масса которой сосредоточена в центре масс, а все внешние силы, действующие на точки системы, приложены к этому центру масс. Точка центра масс (4.9) занимает вполне определенное положение относительно материальных точек системы. Если система не является твердым телом, то взаимное положение ее точек с течением времени изменяется. Меняется и положение центра масс относительно точек системы, но в каждый момент он имеет положение, определяемой (4.9) и подчиняется уравнению движения (4.13).

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий отдельных точек в выбранной системе отсчета:

$$W = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \qquad (4.14)$$

Представим скорость каждой точки в виде векторной суммы скоростей центра масс - $v_{цм}$ и скорости точки относительно центра масс – $v_{iц}$

$$v_i^2 = (\vec{v}_{цм} + \vec{v}_{iц}) \cdot (\vec{v}_{цм} + \vec{v}_{iц}) = v_{цм}^2 + 2\vec{v}_{цм}\vec{v}_{iц} + \vec{v}_{iц}^2$$

Подставив в формулу кинетической энергии, получим

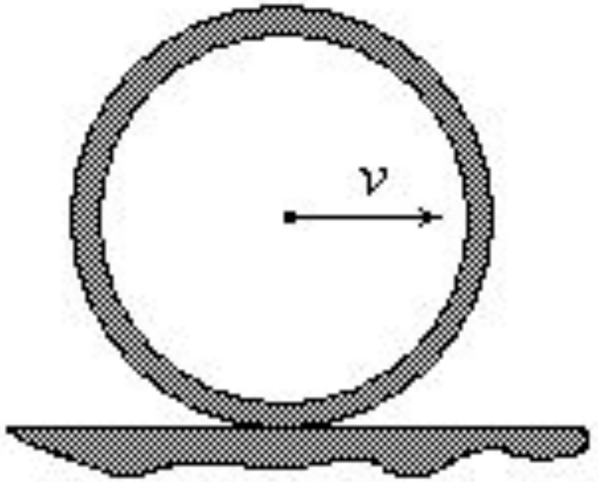
$$T = \frac{1}{2}v_{цм}^2\sum m_i + \vec{v}_{цм}\sum m_i\,\vec{v}_{iц} + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_{iц}^2$$

Второе слагаемое в данной формуле равно нулю так как суммарный импульс всех точек относительно центра масс всегда равен нулю. Тогда формула для кинетической энергии перепишется в виде:

$$T = \frac{1}{2} v_{\text{цм}}^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{i\text{ц}}^2 \tag{4.15}$$

Первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию эквивалентной материальной точки, расположенной в центре масс, второе слагаемое - сумму кинетических энергий всех точек в системе центра масс. Вычисление кинетической энергии относительно центра масс во многих практических случаях оказывается значительно проще, чем при пользовании исходной формулой (4.14).

Определим для примера кинетическую энергию катящегося со скоростью v обруча, имеющего массу m (см. рис.). Очевидно, что центр масс обруча находится в его центре, он движется со скоростью v. Скорость точек обода относительно его центра также равна v, поскольку центр относительно поверхности качения имеет скорость v, а скорость нижней точки, соприкасающейся с поверхностью относительно ее равна нулю. Следовательно



$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_{i\text{ц}}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$$

Лк_5. 4.2. Динамика твердого тела. Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко скрепленных друг с другом. Обычно различают три вида движения тела: поступательное, вращательное и плоское.

При поступательном движении все точки тела движутся по параллельным траекториям, так что для описания движения тела в целом достаточно знать закон движения одной точки, обычно – центра масс тела. При вращательном движении все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной оси, а угловые скорости точек одинаковы. Для каждой из материальных точек, составляющих твердое тело, выполняются уравнения:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (4.16)$$

$$\vec{M} = j \times \vec{\varepsilon} \qquad (4.17)$$

Первое из них определяет момент силы F, действующий на точку, а второе является уравнением ее движения и связывает угловое ускорение -ε с моментом силы, действующей на точку, и моментом инерции точки.

Суммируя уравнения движения (4.17) для каждой точки вращающегося твердого тела и учитывая, что угловые ускорения всех точек одинаковы, будем иметь

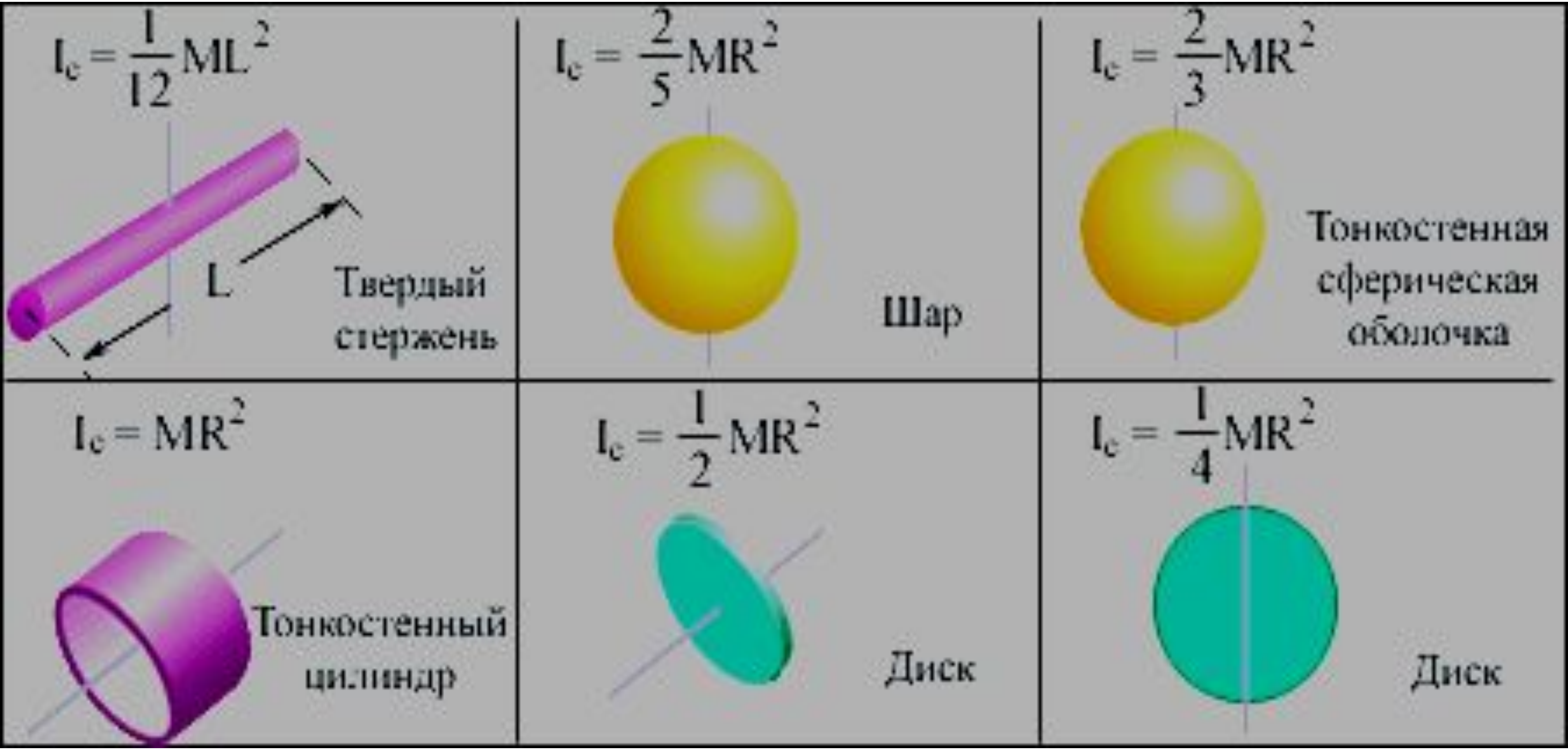
$$\sum \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum \vec{J}_i$$

При суммировании моментов, обусловленных внутренними силами, системы точек получается ноль, так как силы взаимодействия любых двух точек в сумме дают ноль.

В результате, при суммировании моментов сил, действующих на все точки тела, останется только сумма моментов внешних сил, которую обозначим как результирующий момент - $M_{рез}$. При суммировании моментов инерции всех точек тела получим суммарный момент инерции $j = \sum j_i$. В результате уравнение вращательного движения твердого тела примет такой же вид как уравнение вращения материальной точки:

$$\overrightarrow{M}_{\text{рез}} = \vec{\varepsilon} j \tag{4.18}$$

Для вычисления момента инерции твердого тела его необходимо представить в виде множества материальных точек и просуммировать их моменты инерции. Для многих тел эти расчеты уже сделаны и представлены в таблице.



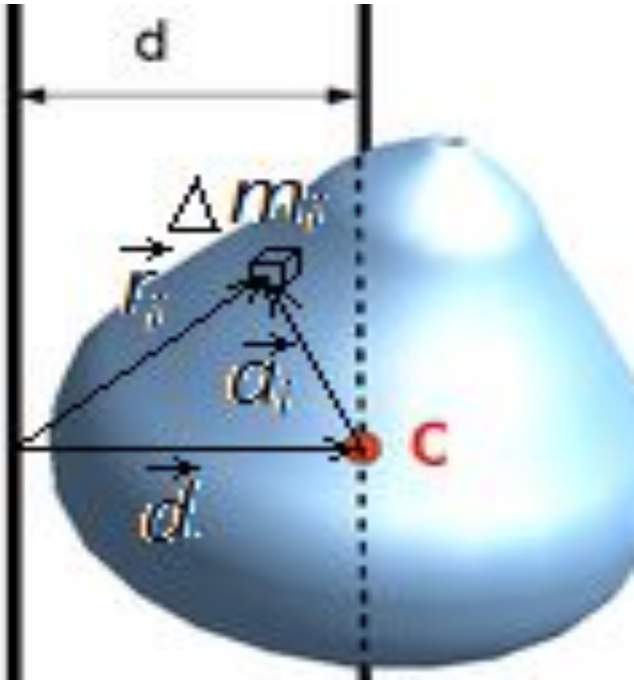
$I_c = \frac{1}{12}ML^2$
L
Твердый стержень
$I_c = \frac{2}{5}MR^2$
Шар
$I_c = \frac{2}{3}MR^2$
Тонкостенная сферическая оболочка
$I_c = MR^2$
Тонкостенный цилиндр
$I_c = \frac{1}{2}MR^2$
Диск
$I_c = \frac{1}{4}MR^2$
Диск

Теорема Штейнера. Позволяет вычислить момент инерции тела относительно любой оси, если известен его момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс.

$$j = j_c + md^2 \tag{4.19}$$

j_c - известный момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, j - искомый момент инерции относительно параллельной оси, m - масса тела, d - расстояние между указанными осями.

Для доказательства запишем общую формулу момента инерции тела, относительно произвольной оси $j = \sum_i j_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2$
где Δm_i - масса точечного элемента тела, на которые оно разбивается для вычисления момента инерции, r_i - расстояние от точечного элемента до оси, относительно которой вычисляется момент инерции. Радиус-вектор точечного элемента массы можно представить в виде суммы
$\vec{r}_i = \vec{d} + \vec{a}$. Подставим это в формулу для момента инерции $j = d^2 \sum_i \Delta m_i + 2\vec{d} \sum_i \Delta m_i \vec{a}_i + \sum_i \Delta m_i a_i^2$
В этом выражении среднее слагаемое равно нулю по определению центра масс. В результате имеем формулу (4.19).



Задача: определить момент инерции стержня с массой m и длиной l относительно его конца:

Решение: Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину – центр масс возьмем из таблицы:

$$j_c = \frac{ml^2}{12}$$

Если ось проходит через конец стержня, она смещена от центра масс на расстояние *l/2*. По теореме Штернера:

$$j = J_c * m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов точечных элементов, образующих тело. Мо мент инерции і-того точечного элемента определяется формулой:

$$\vec{N}_i = J_i \vec{\omega}$$

При суммировании моментов импульса всех точек твердого тела в левой части получим его момент импульса тела, а в правой, в виду того, что угловая скорость вращения одинакова для всех точек, будем иметь ее произведение на сумму моментов инерции всех точек, т.е. - на момент инерции тела:

$$\vec{N} = j\vec{\omega} \qquad (4.20)$$

Для i-той материальной точки тела производная по времени от момента импульса равна моменту силы, действующей на точку:

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \vec{M}_i$$

Вновь проведя суммирование этого равенства по всем точкам твердого тела, получим в левой части производную от момента импульса этого тела, а в правой только сумму моментов внешних сил, так как сумма моментов внутренних сил равна нулю

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}_{\text{рез}} \qquad (4.21)$$

где N - это момент импульса тела, а Мрез - суммарный момент внешних сил, действующих на него.

Подставим в (4.21) вместо N его выражение (4.20) и получим:

$$j\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \tag{4.22}$$

Это уравнение в каком-либо из его вариантов является основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела.

Закон сохранения момента импульса - это один из фундаментальных законов природы. Если на тело не действуют внешние силы, или их равнодействующий момент равен нулю то согласно (4.22)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = 0$$

Следовательно, N = const.

Кинетическая энергия вращающегося тела. При поступательном движении кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$W = \frac{mv^2}{2}$$

Модуль линейной скорости точечного элемента вращающегося тела равен $v_i = \omega R_i$. Подставим этот модуль в формулу для кинетической энергии i-того точечного элемента вращающегося тела

$$W_i = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} \qquad (4.23)$$

Просуммируем энергии точечных элементов и получим кинетическую энергию всего вращающегося тела:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\omega^2R_i^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iR_i^2=\frac{j\omega^2}{2} \qquad (4.24)$$

Мы видим, что формулы динамики поступательного и вращательного движения по форме похожи друг на друга. Для наглядности запишем эти формулы в общую таблицу

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m [кг]	Момент инерции mR^2 [кг$м^2$]
Второй закон Ньютона	
Кинетическая энергия	