Česká zemědělská univerzita v Praze

Fakulta lesnická a dřevařská

Dřevařské komodity - cvičení

2. Metodologie testování vlastností dřeva a materiálů na jeho bázi

Přemysl Šedivka
Email: sedivka@fld.czu.cz
Tel.: +420 224 383 734
FLE 323

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Metodologie testování vlastností dřeva a materiálů na jeho bázi

Statistické plánování a vyhodnocení pokusu – základní popisné statistiky

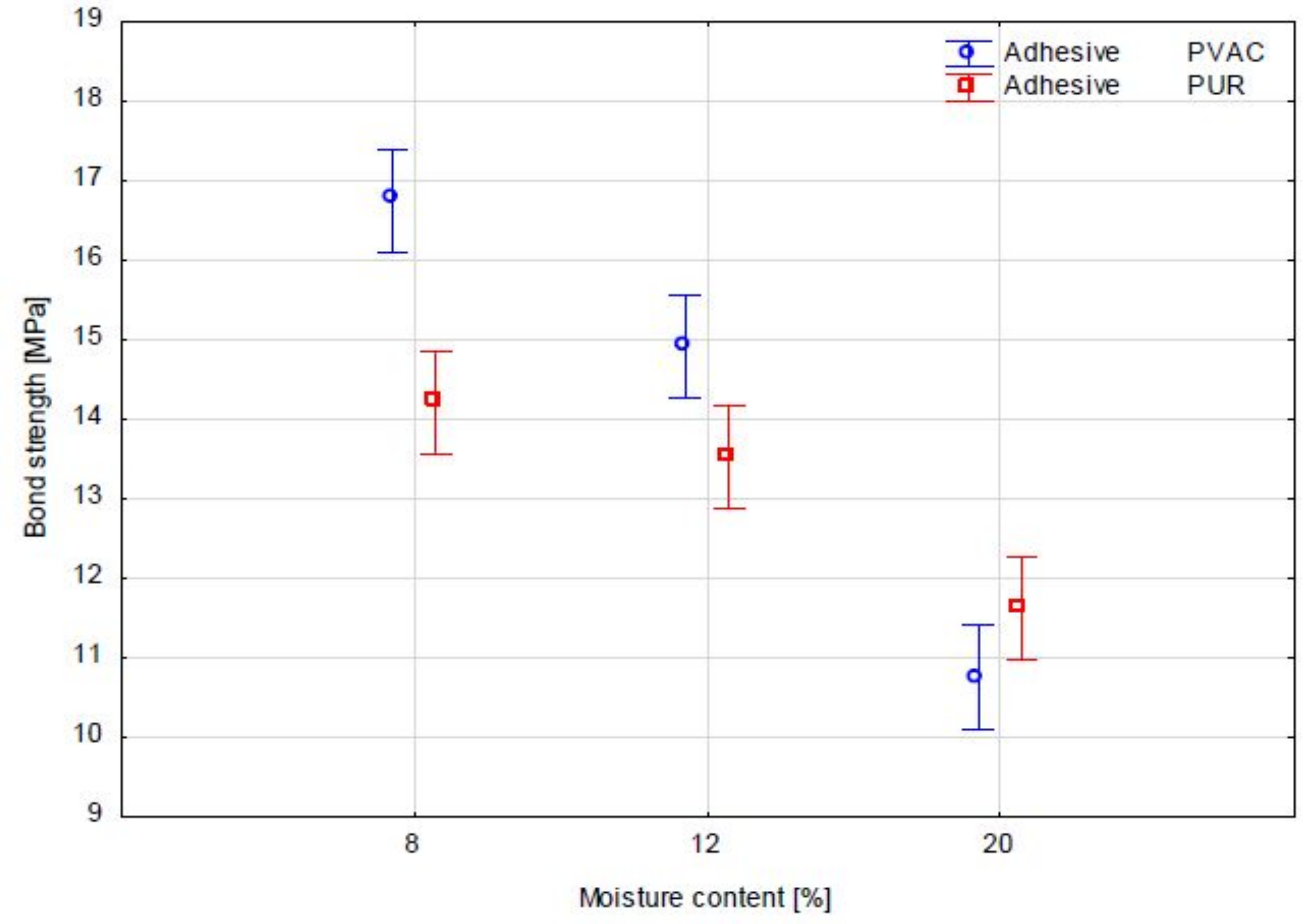
Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika

PVAC adhesivum na dřevo

PUR adhesivum na dřevo

Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika

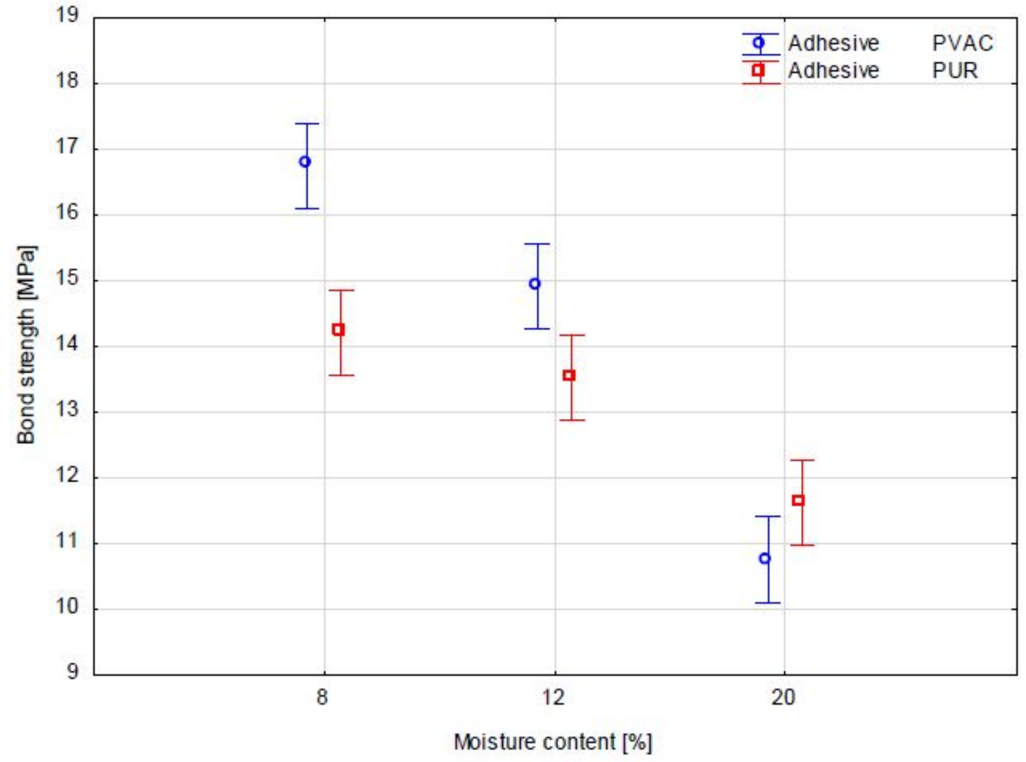
Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika



Wood moisture [%]	8			12			20		
Type of test	1	3	5	1	3	5	1	3	5
X [MPa]	14.20	5.82	4.07	13.53	6.12	4.69	11.62	6.44	5.22
Max. [MPa]	15.36	7.55	5.26	16.04	7.40	6.03	13.23	7.40	6.08
Min. [MPa]	11.65	4.61	3.07	11.35	4.81	3.85	10.15	5.28	4.45
SD	1.28	0.94	0.74	1.50	0.90	0.79	1.04	0.60	0.49
v [%]	9.04	16.09	18.13	11.08	14.74	16.89	8.93	9.35	9.44

X – average value; Max. – maximum measured value; Min. – minimum measured value; SD – standard deviation; v – coefficient of variation

Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika



Wood moisture [%]	8			12			20		
Type of test	1	3	5	1	3	5	1	3	5
X [MPa]	14.20	5.82	4.07	13.53	6.12	4.69	11.62	6.44	5.22
Max. [MPa]	15.36	7.55	5.26	16.04	7.40	6.03	13.23	7.40	6.08
Min. [MPa]	11.65	4.61	3.07	11.35	4.81	3.85	10.15	5.28	4.45
SD	1.28	0.94	0.74	1.50	0.90	0.79	1.04	0.60	0.49
v [%]	9.04	16.09	18.13	11.08	14.74	16.89	8.93	9.35	9.44

X – average value; Max. – maximum measured value; Min. – minimum measured value; SD – standard deviation; v – coefficient of variation

Aritmetický průměr:
Je to součet všech hodnot (x_i) vydělený počtem všech statistických jednotek souboru (n).

Reprezentuje průměrnou hodnotu sledovaného vzorku.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

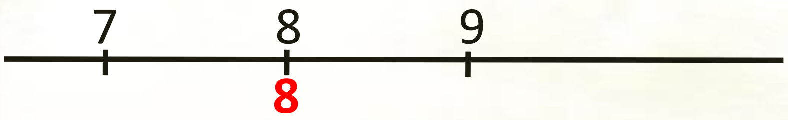
n … počet čísel

x … číslo

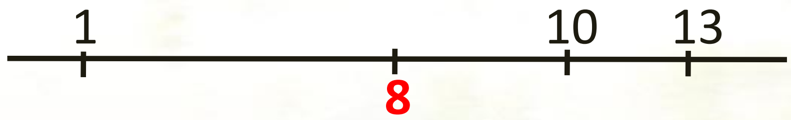
$\overline{x}$ … průměr

Příklad: Základní popisná statistika – aritmetický průměr

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9



V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13



Aritmetický průměr:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + \ldots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{n}^{i=1} x_i$$

n … počet čísel

x … číslo

$\overline{x}$ … průměr

Aritmetický průměr:

$\overline{x} = 8$

$\overline{x} = 8$

Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

Rozptyl:

Rozptyl udává, jak moc jsou hodnoty v hodnoceném statistickém souboru rozptýleny. Charakterizuje rozložení hodnot ve vzorku vzhledem k aritmetickému průměru.

Čím je menší, tím jsou naměřené hodnoty blíže aritmetickému průměru.

$$\sigma = \frac{\sum x_i - x'^2}{n}$$

σ … rozptyl

n … počet hodnot

x_i… číslo

x´… aritmetický průměr

Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

V levé skupině máme tři čísla: 7; 8; 9

V pravé skupině máme tři čísla: 1; 10; 13

Výpočet rozptylu:

x_i	x'	$x_i - x'$	$(x_i - x')^2$
7	8	-1	1
8	8	0	0
9	8	1	1
			2

x_i	x'	$x_i - x'$	$(x_i - x')^2$
1	8	-7	49
10	8	2	4
13	8	5	25
			78

Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

Rozptyl:

$$\sigma = \frac{\sum x_i - x'^2}{n}$$

σ … rozptyl

n … počet hodnot

x_i… číslo

x´… aritmetický průměr

$$\sigma = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

$$\sigma = \frac{78}{3} = 26$$

Soubor hodnot v levé skupině 7, 8, 9 má menší rozptyl, soubor hodnot je statisticky více homogenní.

Soubor hodnot v pravé skupině 1, 10, 13 má větší rozptyl, soubor hodnot je statisticky méně homogenní.

Směrodatná odchylka:

Směrodatná odchylka, podobně jako rozptyl, určuje jak moc jsou hodnoty rozptýleny či odchýleny od průměru hodnot.

Vypočítá se jako odmocnina rozptylu.

$$s = \sqrt{\sigma}$$

σ … rozptyl

s … směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka:

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$s = \sqrt{\sigma}$

$s = \sqrt{0,67} = 0,82$

Většina hodnot v levé skupině se odchyluje od průměru (8) o méně než 1 v obou směrech, leží mezi hodnotami 7 a 9.

V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13

$s = \sqrt{26} = 5,1$

Většina hodnot v pravé skupině se odchyluje od průměru (8) o více než 5 v obou směrech, leží mezi hodnotami 3 a 13.

Příklad: Základní popisná statistika – variační koeficient

Variační koeficient:

Variační koeficient je charakteristikou variability rozdělení pravděpodobností náhodní veličiny.

Je to podíl směrodatné odchylky „s“ a aritmetického průměru x´.

$$v_k = \frac{s}{x'} \cdot 100$$

v_k … variační koeficient

s … směrodatná odchylka

x´… aritmetický průměr

Variační koeficient se uvádí v %.

Příklad: Základní popisná statistika – variační koeficient

Variační koeficient: Uvádí sourodost / reprezentativnost statistického výběru

Variační koeficient, který je větší než 50%, ukazuje na nesourodost statistického souboru a to v takové míře, že použití aritmetického průměru je už stěží oprávněné/málo reprezentativní.

$$v_k = \frac{s}{x'} \, . \, 100$$

v_k … variační koeficient

s … směrodatná odchylka

x´… aritmetický průměr

Variační koeficient se uvádí v %.

Příklad: Základní popisná statistika – variační koeficient

Variační koeficient: Uvádí se v procentech

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$$v_k = \frac{s}{x'} \cdot 100$$

$$v_k = \frac{0{,}82}{8} \cdot 100 = 10{,}2\%$$

Soubor hodnot na levé straně je dostatečně reprezentativní.

V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13

$$v_k = \frac{5{,}1}{8} \cdot 100 = 63{,}5\%$$

Soubor hodnot na pravé není dostatečně statisticky reprezentativní.

v_k … variační koeficient

s … směrodatná odchylka

x´ … aritmetický průměr

Česká zemědělská univerzita v Praze
Fakulta lesnická a dřevařská

Statistické vyhodnocení pokusu – medián

Medián:
Je to je hodnota, která se nachází přesně uprostřed všech hodnot statistického souboru seřazených do neklesající posloupnosti.

Řečeno jinak, všechny hodnoty *x* seřadíme podle velikosti a vybereme hodnotu, která se nachází uprostřed.

$$\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$ je-li n ***liché*** číslo

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$ je-li n ***sudé*** číslo

n … počet čísel

x … číslo

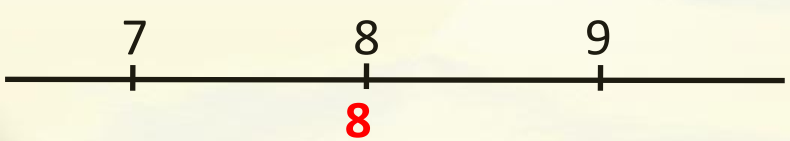
$\tilde{x}$ … medián

Medián:

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$$\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$\tilde{x} = 8$



V pravé skupině máme čtyři hodnoty: 1; 10; 13; 14

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

$\tilde{x} = 11{,}5$

Statistické vyhodnocení pokusu – modus

Modus:
Je to takové hodnota statistického souboru, která má největší četnost, tzn. je to taková hodnota, která se nejčastěji vyskytuje v hodnoceném souboru.

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$\hat{x}$ = 7; 8; 9

Multimodální modus

V pravé skupině máme čtyři hodnoty: 1; 10; 10; 13

$\hat{x}$ = 10

Unimodální modus

Statistické vyhodnocení pokusu – kvartil

Kvartil:

Ve statistice kvartil jsou to tři body, které rozdělují seřazená data do čtyř stejných skupin (podle počtu čísel), z nichž každá představuje čtvrtinu vzorku dat.

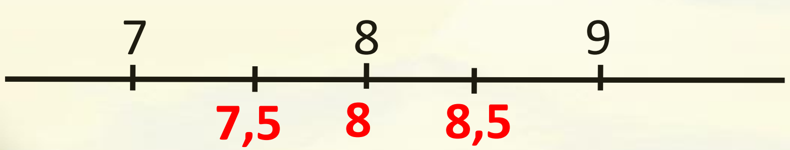
Kvantil:

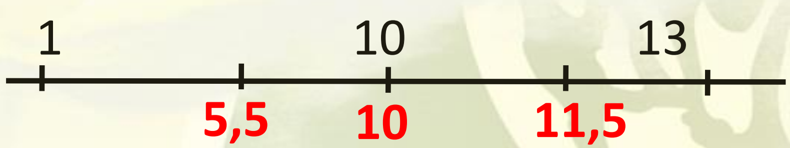
V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

V pravé skupině máme čtyři hodnoty: 1; 10; 13; 14

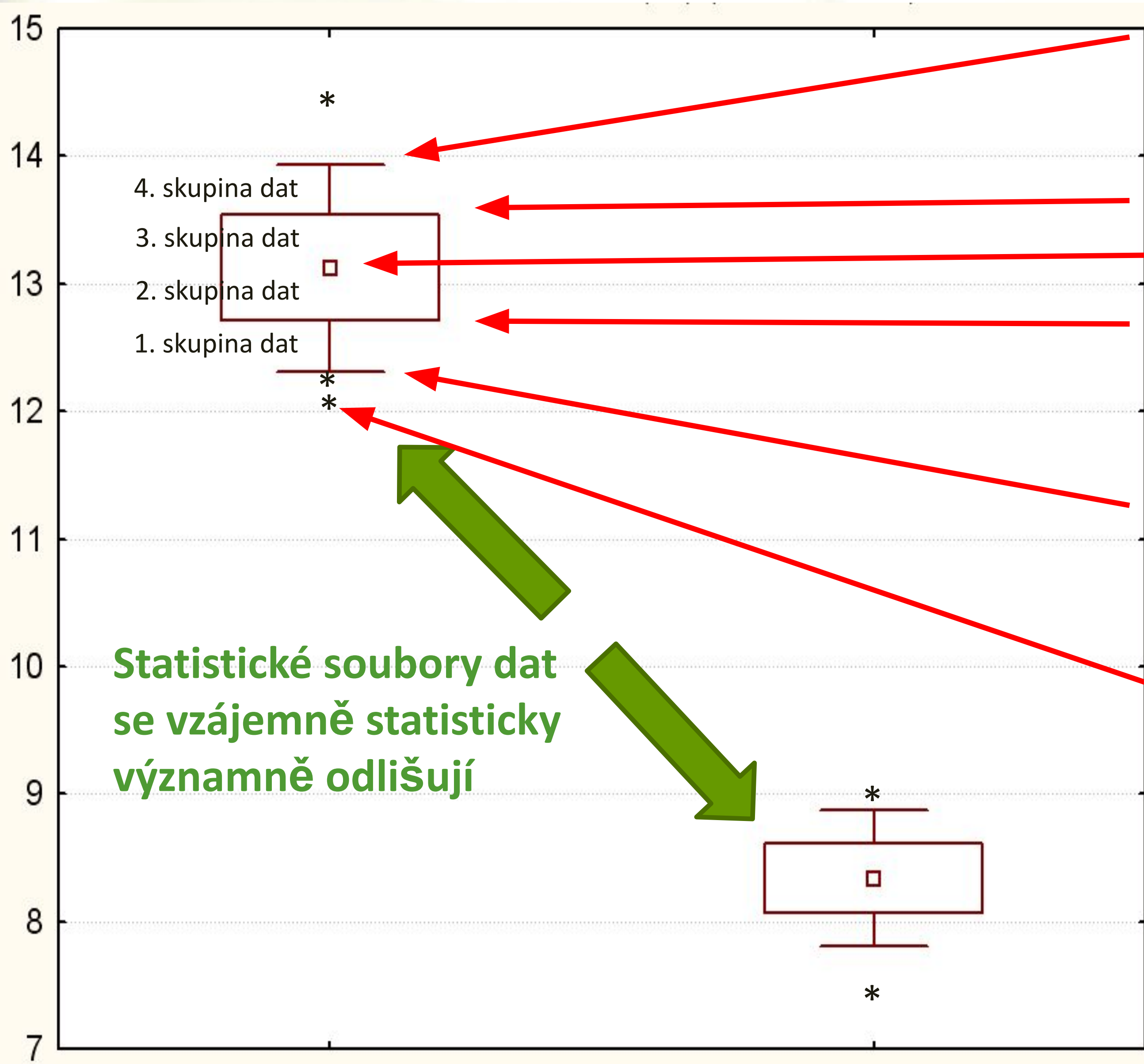
Kvantil Q1: 7,5
Kvantil Q2: 8
Kvantil Q3: 8,5

Kvantil Q1: 5,5
Kvantil Q2: 10
Kvantil Q3: 11,5





Příklad: Základní popisná statistika – krabicové grafy



$x_{max.}$ maximální hodnota

$x_{0,75}$ horní kvartil

$\tilde{x}$ medián

$x_{0,25}$ dolní kvartil

$x_{min.}$ minimální hodnota

extrémní hodnoty

Příklad: Stanovení počtu měřených vzorků pro testování lepeného spoje

Stanovení počtu měřených vzorků

- Pomocí výběrového šetření chceme odhadnout průměrnou hodnotu pevnosti lepeného spoje dřeva. Odhad se požaduje provádět s 95% spolehlivostí (na hladině významnosti 0,95) a připouští se maximální chyba 1,2 kPa.
- Z realizovaného výzkumu/testování, které proběhlo v minulých letech, je známa hodnota směrodatné odchylky testovaného vzorku měření, která má hodnotu 2,0. Stanovte minimální rozsah výběru, který by zajistil požadovanou přesnost a spolehlivost.
- Známé skutečnosti:

  Požadovaná hladina významnosti: $1 - \alpha = 0{,}95$

  Maximální chyba: $\Delta = 1{,}2$ (kPa)

  Směrodatná odchylka hodnoty pevnosti spoje: $\sigma = 2{,}0$

Stanovení počtu měřených vzorků

- Vychází se ze vzorce přípustné chyby odhadu průměru v základním souboru:

$$\Delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

Δ … maximální chyba

σ … směrodatná odchylka

1-α … hladina významnosti

$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$ …. hodnota kvantilu definovaná z tabulky kvantilů normálního rozdělení

$$n \geq \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma^2}{\Delta^2} = \frac{1,96^2 \cdot 2^2}{1,2^2} = 10,67 \text{ vzorků}$$

Minimální počet vzorků byl stanoven na 11, respektive u každého měření musí být realizováno **11 platných měření.**

Tabulka 1: Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

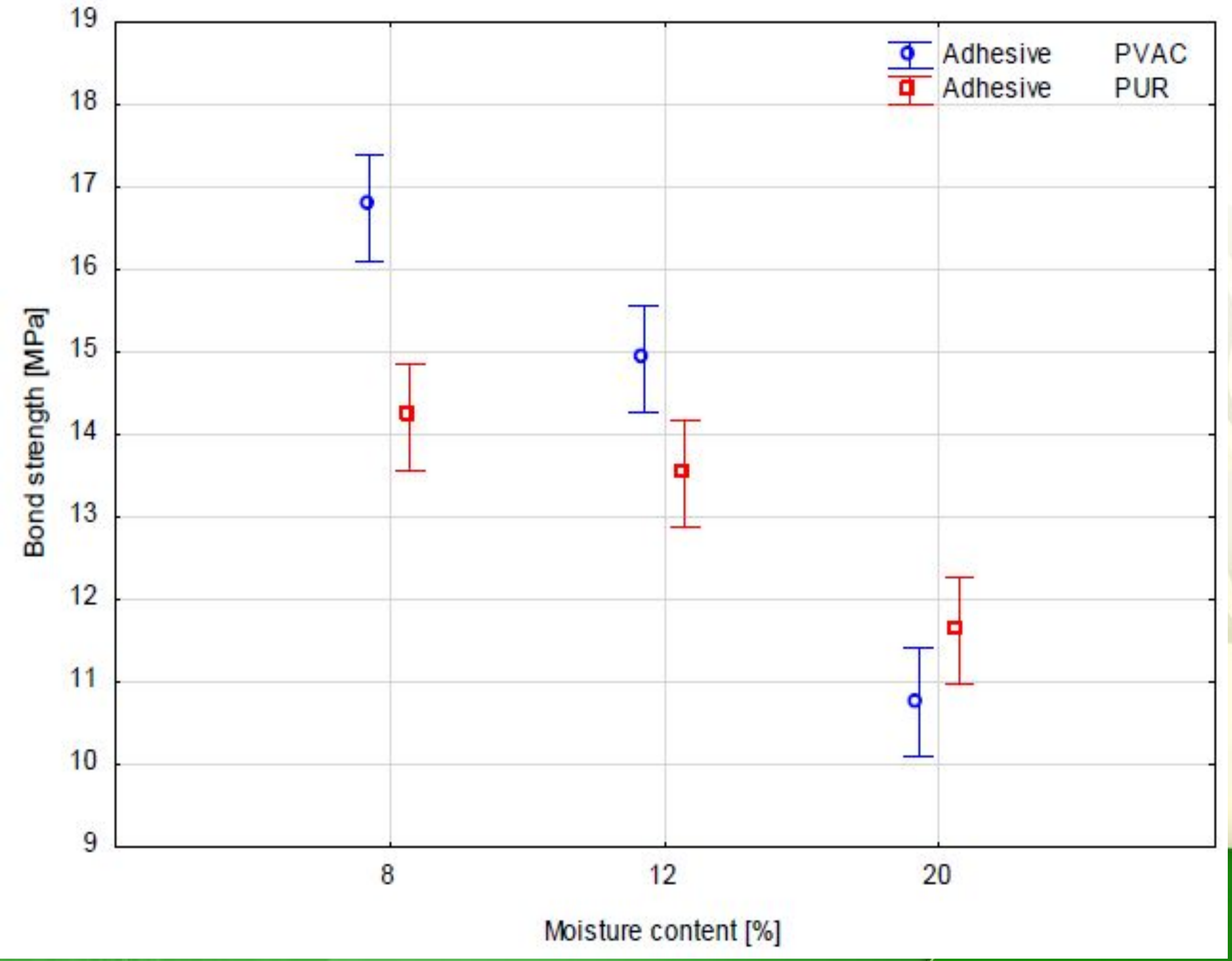
Pro x<0 užijte vztahu: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Pro kvantily norm. normálního rozdělení platí: $x_p = -x_{1-p}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	$\boxed{0,975}$	0,976	0,976	0,977
2	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999

Příklad: Statistické porovnání průměrných hodnot

- Porovnání průměrných hodnot pevností lepených spojů dřeva 2 typů adhesiv, které jsou při vytvrzování vystaveny různé vzdušné relativní vlhkosti



Příklad: Statistické porovnání průměrných hodnot

- Porovnání průměrných hodnot pevností lepených spojů dřeva 3 typů adhesiv, u nichž je pevnost testována po definovaném čase vytvrzování – test ANOVA