



Česká zemědělská univerzita v Praze

**Fakulta lesnická  
a dřevařská**

# Dřevařské komodity - cvičení

## 2. Metodologie testování vlastností dřeva a materiálů na jeho bázi



Přemysl Šedivka

Email: [sedivka@fld.czu.cz](mailto:sedivka@fld.czu.cz)

Tel.: +420 224 383 734

FLE 323



# **Metodologie testování vlastností dřeva a materiálů na jeho bázi**

**Statistické plánování a vyhodnocení pokusu – základní popisné statistiky**



# Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika

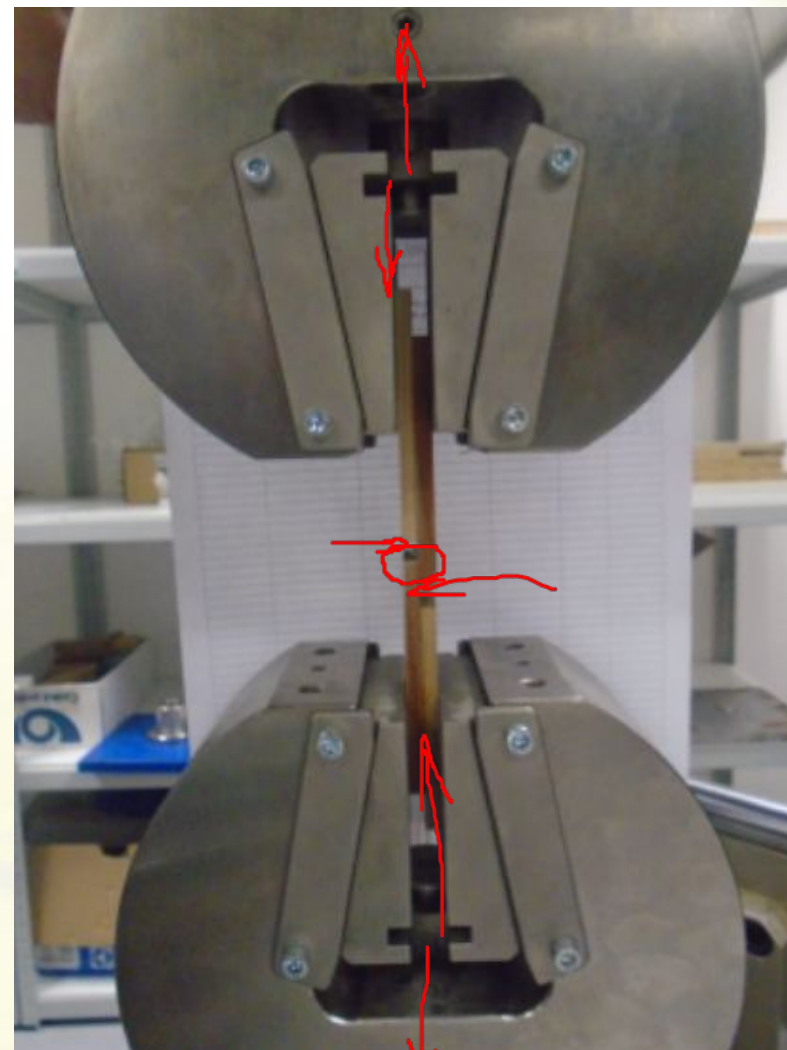
PVAC adhesivum na dřevo



PUR adhesivum na dřevo

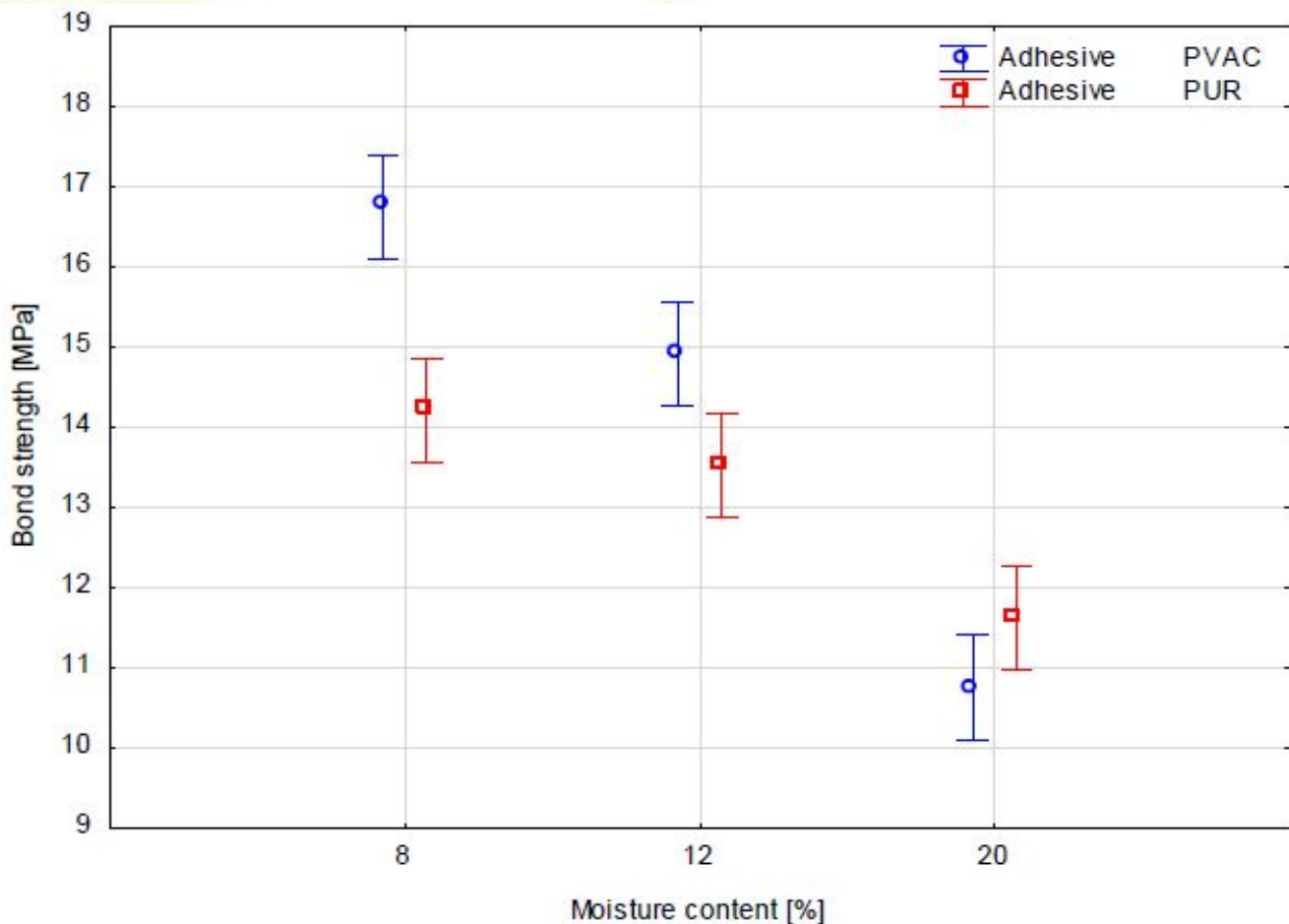


# Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika





# Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika

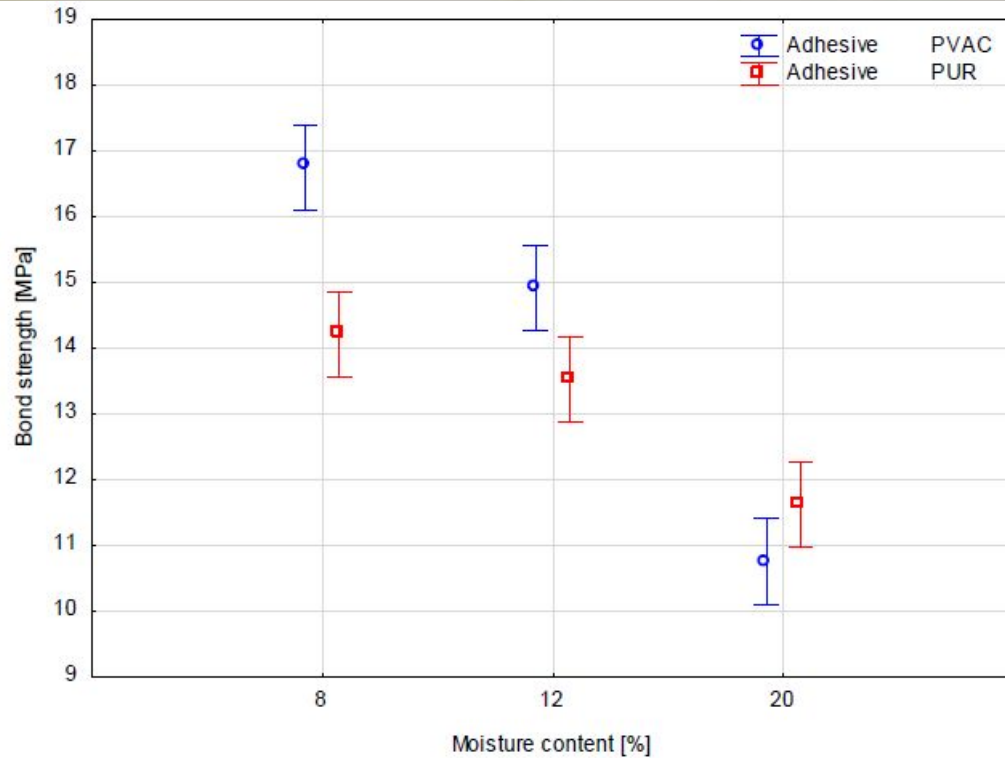


Wood moisture [%]	8			12			20		
Type of test	1	3	5	1	3	5	1	3	5
X [MPa]	14.20	5.82	4.07	13.53	6.12	4.69	11.62	6.44	5.22
Max. [MPa]	15.36	7.55	5.26	16.04	7.40	6.03	13.23	7.40	6.08
Min. [MPa]	11.65	4.61	3.07	11.35	4.81	3.85	10.15	5.28	4.45
SD	1.28	0.94	0.74	1.50	0.90	0.79	1.04	0.60	0.49
v [%]	9.04	16.09	18.13	11.08	14.74	16.89	8.93	9.35	9.44

X – average value; Max. – maximum measured value; Min. – minimum measured value;  
SD – standard deviation; v – coefficient of variation



# Příklad: Pevnost lepeného spoje – základní popisná statistika



Wood moisture [%]	8			12			20		
Type of test	1	3	5	1	3	5	1	3	5
X [MPa]	14.20	5.82	4.07	13.53	6.12	4.69	11.62	6.44	5.22
Max. [MPa]	15.36	7.55	5.26	16.04	7.40	6.03	13.23	7.40	6.08
Min. [MPa]	11.65	4.61	3.07	11.35	4.81	3.85	10.15	5.28	4.45
SD	1.28	0.94	0.74	1.50	0.90	0.79	1.04	0.60	0.49
v [%]	9.04	16.09	18.13	11.08	14.74	16.89	8.93	9.35	9.44

X – average value; Max. – maximum measured value; Min. – minimum measured value; SD – standard deviation; v – coefficient of variation



## Aritmetický průměr:

Je to součet všech hodnot ( $x_i$ ) vydělený počtem všech statistických jednotek souboru ( $n$ ).

Reprezentuje průměrnou hodnotu sledovaného vzorku.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$n$  ... počet čísel

$x$  ... číslo

$\bar{x}$  ... průměr

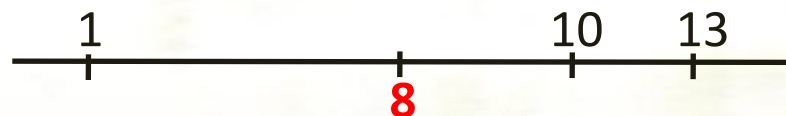


## Příklad: Základní popisná statistika – aritmetický průměr

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9



V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13



Aritmetický průměr:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$n$  ... počet čísel

$x$  ... číslo

$\bar{x}$  ... průměr

Aritmetický průměr:

$$\bar{x} = 8$$

$$\bar{x} = 8$$





## Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

### Rozptyl:

Rozptyl udává, jak moc jsou hodnoty v hodnoceném statistickém souboru rozptýleny. Charakterizuje rozložení hodnot ve vzorku vzhledem k aritmetickému průměru.

Čím je menší, tím jsou naměřené hodnoty blíže aritmetickému průměru.

$$\sigma = \frac{\sum x_i - x'{}^2}{n}$$

$\sigma$  ... rozptyl

$n$  ... počet hodnot

$x_i$  ... číslo

$x'$  ... aritmetický průměr



## Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

V levé skupině máme  
tři čísla: 7; 8; 9

V pravé skupině máme  
tři čísla: 1; 10; 13

Výpočet rozptylu:

$x_i$	$x'$	$x_i - x'$	$(x_i - x')^2$
7	8	-1	1
8	8	0	0
9	8	1	1
<hr/>			<b>2</b>

$x_i$	$x'$	$x_i - x'$	$(x_i - x')^2$
1	8	-7	49
10	8	2	4
13	8	5	25
<hr/>			<b>78</b>



## Příklad: Základní popisná statistika – rozptyl

### Rozptyl:

$$\sigma = \frac{\sum x_i - x'^2}{n}$$

$\sigma$  ... rozptyl

$x_i$  ... číslo

$n$  ... počet hodnot  
průměr

$x'$  ... aritmetický

$$\sigma = \frac{2}{3} = 0,67$$

$$\sigma = \frac{78}{3} = 26$$

Soubor hodnot v levé skupině 7, 8, 9 má menší rozptyl, soubor hodnot je statisticky více homogenní.

Soubor hodnot v pravé skupině 1, 10, 13 má větší rozptyl, soubor hodnot je statisticky méně homogenní.



### Směrodatná odchylka:

Směrodatná odchylka, podobně jako rozptyl, určuje jak moc jsou hodnoty rozptýleny či odchýleny od průměru hodnot.

Vypočítá se jako odmocnina rozptylu.

$$s = \sqrt{\sigma}$$

$\sigma$  ... rozptyl

$s$  ... směrodatná odchylka





### Směrodatná odchylka:

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$$s = \sqrt{\sigma}$$

$$s = \sqrt{0,67} = 0,82$$

Většina hodnot v levé skupině se odchyluje od průměru (8) o méně než 1 v obou směrech, leží mezi hodnotami 7 a 9.

V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13

$$s = \sqrt{26} = 5,1$$

Většina hodnot v pravé skupině se odchyluje od průměru (8) o více než 5 v obou směrech, leží mezi hodnotami 3 a 13.



### **Variační koeficient:**

Variační koeficient je charakteristikou variability rozdělení pravděpodobností náhodní veličiny.

Je to podíl směrodatné odchylky „s“ a aritmetického průměru  $x'$ .

$$v_k = \frac{s}{x'} \cdot 100$$

$v_k$  ... variační koeficient  
 $s$  ... směrodatná odchylka  
 $x'$  ... aritmetický průměr

Variační koeficient se uvádí v %.



**Variační koeficient:** Uvádí sourodost /  
reprezentativnost statistického výběru

Variační koeficient, který je větší než 50%, ukazuje na nesourodost statistického souboru a to v takové míře, že použití aritmetického průměru je už stěží oprávněné/málo reprezentativní.

$$v_k = \frac{s}{x'} \cdot 100$$

$v_k$  ... variační koeficient  
 $s$  ... směrodatná odchylka  
 $x'$  ... aritmetický průměr

Variační koeficient se uvádí v %.



## Příklad: Základní popisná statistika – variační koeficient

**Variační koeficient:** Uvádí se v procentech

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

V pravé skupině máme tři hodnoty: 1; 10; 13

$$v_k = \frac{s}{x'} \cdot 100$$

$$v_k = \frac{0,82}{8} \cdot 100 = 10,2\%$$

Soubor hodnot na levé straně je dostatečně reprezentativní.

$$v_k = \frac{5,1}{8} \cdot 100 = 63,5\%$$

Soubor hodnot na pravé není dostatečně statisticky reprezentativní.

$v_k$  ... variační koeficient  
 $s$  ... směrodatná odchylka  
 $x'$  ... aritmetický průměr





# Statistické vyhodnocení pokusu – medián

## Medián:

Je to je hodnota, která se nachází přesně uprostřed všech hodnot statistického souboru seřazených do neklesající posloupnosti.

Řečeno jinak, všechny hodnoty  $x$  seřadíme podle velikosti a vybereme hodnotu, která se nachází uprostřed.

$$\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

je-li  $n$  **liché** číslo

$n$  ... počet čísel

$x$  ... číslo

$\tilde{x}$  ... medián

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}}{2}$$

je-li  $n$  **sudé** číslo



## Příklad: Základní popisná statistika – medián

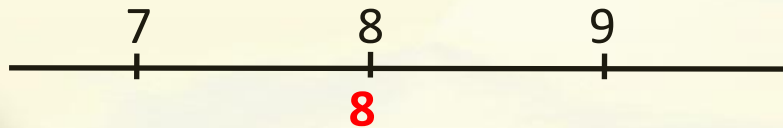
### Medián:

V levé skupině máme  
tři hodnoty: 7; 8; 9

V pravé skupině máme  
čtyři hodnoty: 1; 10; 13; 14

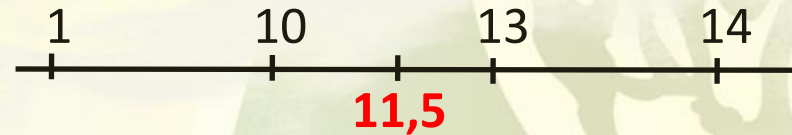
$$\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\tilde{x} = 8$$



$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}}{2}$$

$$\tilde{x} = 11,5$$



## Statistické vyhodnocení pokusu – modus

### Modus:

Je to takové hodnota statistického souboru, která má největší četnost, tzn. je to taková hodnota, která se nejčastěji vyskytuje v hodnoceném souboru.

V levé skupině máme tři hodnoty: 7; 8; 9

$$\hat{x} = 7; 8; 9$$

Multimodální modus

V pravé skupině máme čtyři hodnoty: 1; 10; 10; 13

$$\hat{x} = 10$$

Unimodální modus



### **Kvartil:**

Ve statistice kvartil jsou to tři body, které rozdělují seřazená data do čtyř stejných skupin (podle počtu čísel), z nichž každá představuje čtvrtinu vzorku dat.





## Příklad: Základní popisná statistika – medián

### Kvantil:

V levé skupině máme  
tři hodnoty: 7; 8; 9

V pravé skupině máme  
čtyři hodnoty: 1; 10; 13; 14

Kvantil Q1: 7,5

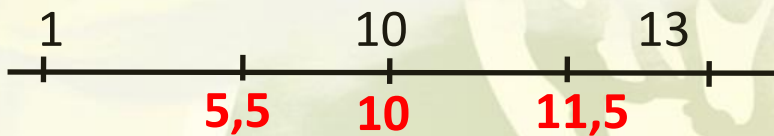
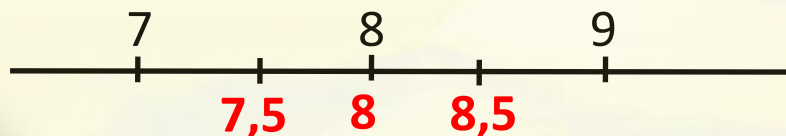
Kvantil Q2: 8

Kvantil Q3: 8,5

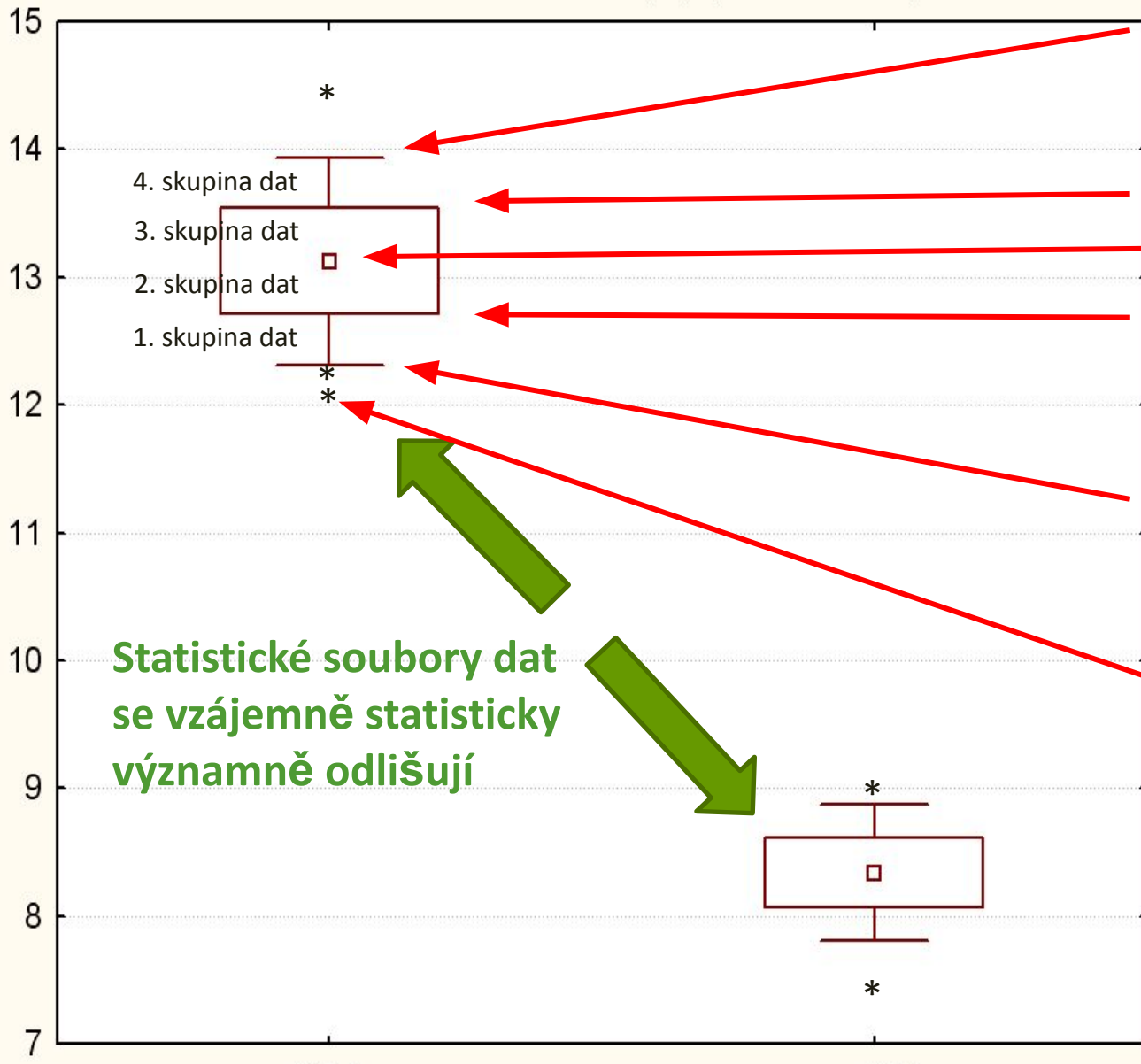
Kvantil Q1: 5,5

Kvantil Q2: 10

Kvantil Q3: 11,5



# Příklad: Základní popisná statistika – krabicové grafy



- $x_{\max.}$  maximální hodnota
- $x_{0,75}$  horní kvartil
- $\tilde{x}$  medián
- $x_{0,25}$  dolní kvartil
- $x_{\min.}$  minimální hodnota
- extrémní hodnoty



# Příklad: Stanovení počtu měřených vzorků pro testování lepeného spoje



## Stanovení počtu měřených vzorků

- Pomocí výběrového šetření chceme odhadnout průměrnou hodnotu pevnosti lepeného spoje dřeva. Odhad se požaduje provádět s 95% spolehlivostí (na hladině významnosti 0,95) a připouští se maximální chyba 1,2 kPa.
- **Z realizovaného výzkumu/testování, které proběhlo v minulých letech, je známa hodnota směrodatné odchylky testovaného vzorku měření, která má hodnotu 2,0.** Stanovte minimální rozsah výběru, který by zajistil požadovanou přesnost a spolehlivost.
- Známé skutečnosti:
  - Požadovaná hladina významnosti:  $1 - \alpha = 0,95$
  - Maximální chyba:  $\Delta = 1,2$  (kPa)
  - Směrodatná odchylka hodnoty pevnosti spoje:  $\sigma = 2,0$





## Stanovení počtu měřených vzorků

- Vychází se ze vzorce přípustné chyby odhadu průměru v základním souboru:

$$\Delta = u_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\Delta$  ... maximální chyba

$\sigma$  ... směrodatná odchylka

$1 - \alpha$  ... hladina významnosti

$u_{1 - \frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$  .... hodnota kvantilu

definovaná z tabulky kvantilů normálního rozdělení

$$n \geq \frac{u_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2} = \frac{1,96^2 \cdot 2^2}{1,2^2} = 10,67 \text{ vzorků}$$

Minimální počet vzorků byl stanoven na 11, respektive u každého měření musí být realizováno **11 platných měření**.

# Tabulka 1: Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

Pro  $x < 0$  užitje vztahu:  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

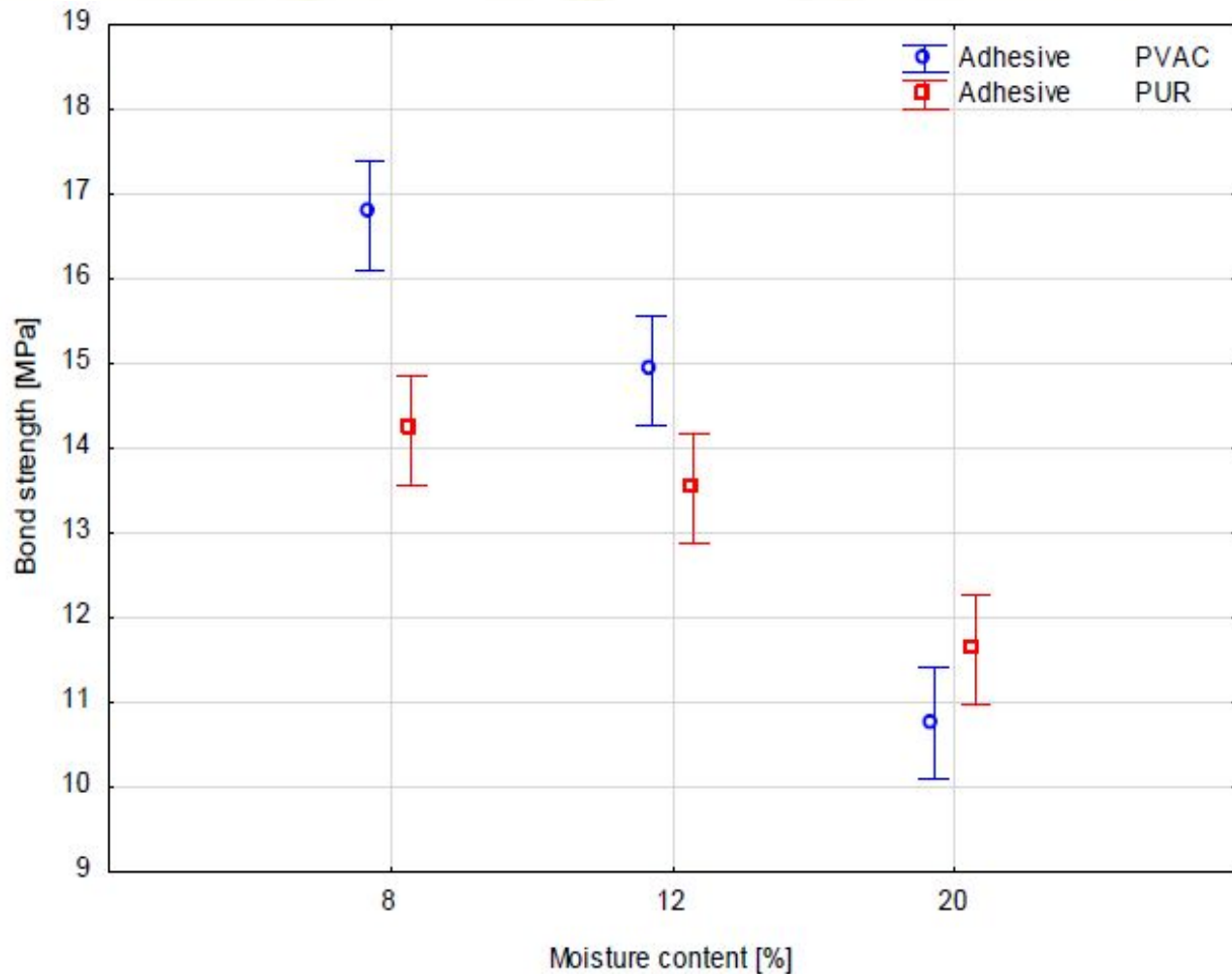
Pro kvantily norm. normálního rozdělení platí:  $x_p = -x_{1-p}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999



## Příklad: Statistické porovnání průměrných hodnot

- Porovnání průměrných hodnot pevností lepených spojů dřeva 2 typů adhesiv, které jsou při vytvrzování vystaveny různé vzdušné relativní vlhkosti





## Příklad: Statistické porovnání průměrných hodnot

- Porovnání průměrných hodnot pevností lepených spojů dřeva 3 typů adhesiv, u nichž je pevnost testována po definovaném čase vytvrzování – test ANOVA

