Дисциплина «Цифровая обработка сигналов»

Тема: Спектры периодических и непериодических сигналов

Лекция 3

***Цель лекции:* Изучить спектры периодических и непериодических сигналов**

План:

1. **Ряды Фурье**
2. **Спектры периодических сигналов**
3. **Преобразование Фурье**
4. **Спектры непериодических сигналов**

Ряд Фурье. Спектры периодических сигналов

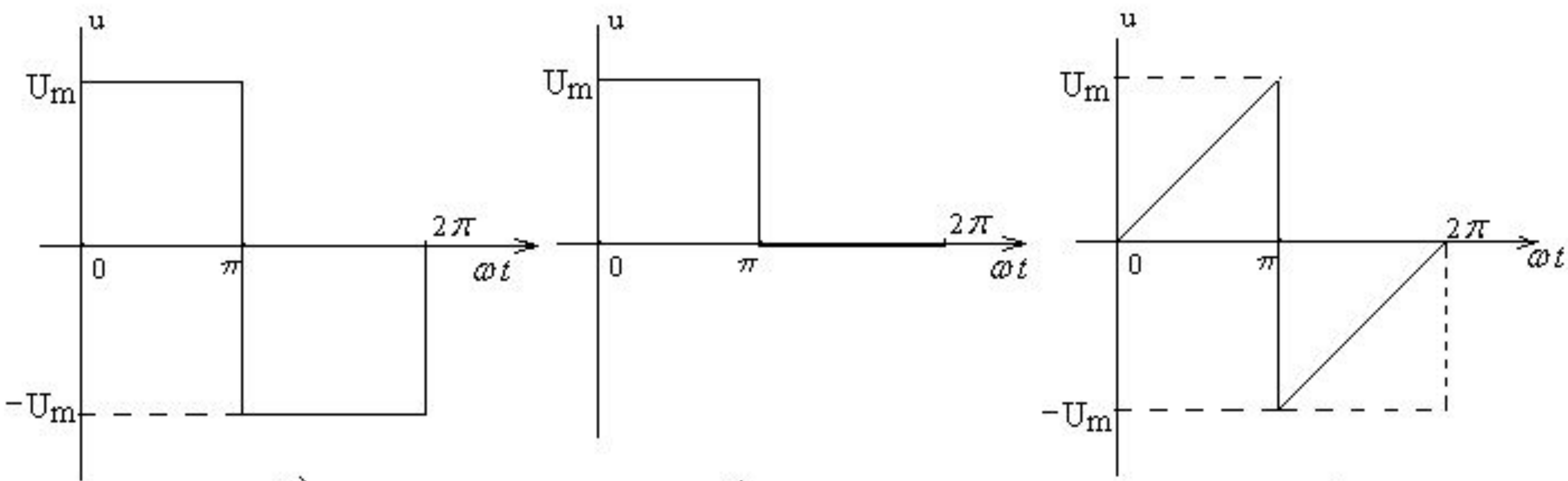
Периодические негармонические функции можно разложить в ряд Фурье. Для этого периодическая функция должна удовлетворять условиям Дирихле:

1. **Иметь конечное число разрывов первого рода (скачков) на периоде T,**
2. **Иметь конечное число экстремумов (максимумов и минимумов).**

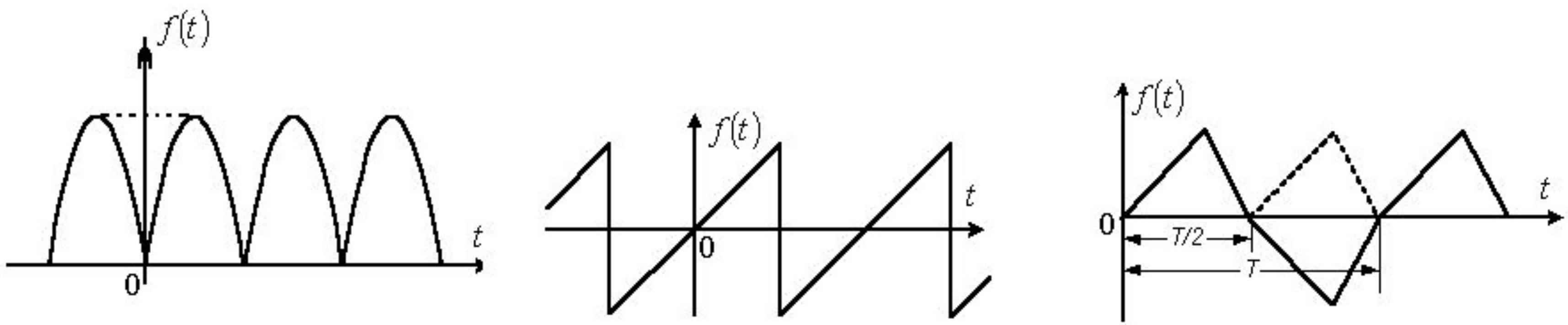
Ряд Фурье имеет несколько форм записи:

1. **Синусно-косинусная,**
2. **Вещественная,**
3. **Комплексная.**

Периодические негармонические функции:



а) в) с)



Синусно-косинусная форма ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t.$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$ - постоянный коэффициент ряда Фурье

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)dt$$ -коэффициенты косинусной составляющей ряда Фурье

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt$$ -коэффициенты синусной составляющей ряда Фурье

k – номер гармоники,

$k = 1$ – основная гармоника;

$\frac{a_0}{2}$ – постоянная составляющая, нулевая гармоника ряда Фурье;

a_k, b_k – коэфициенты ряда Фурье(амплитуды гармоник);

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – частота основной гармоники

T – период периодической функции.

$k = 1,2,3\ldots,$ – номер гармоники

Вещественная форма ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = arctg \frac{a_k}{b_k}$$

Комплексная форма ряда Фурье

Комплексная форма:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}$$

Комплексные коэффициенты ряда Фурье:

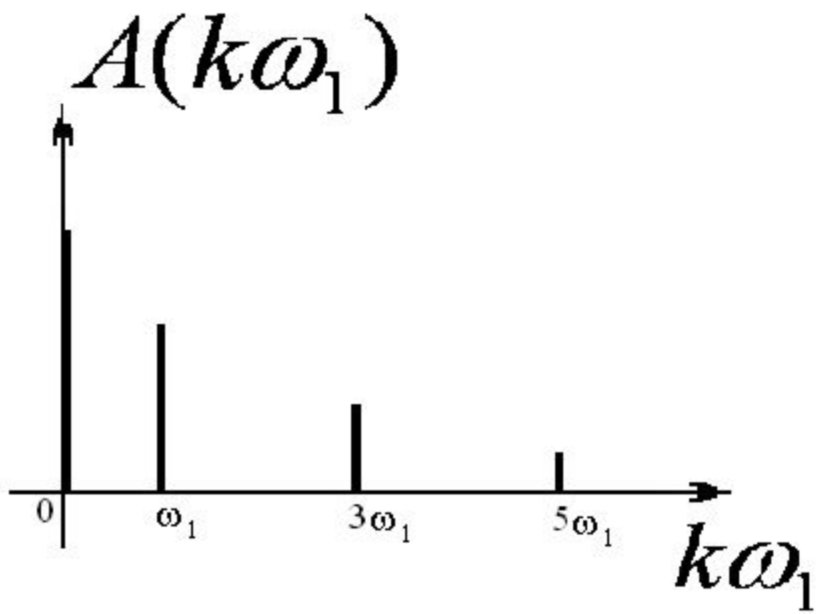
$$\dot{A}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \dot{A}_k(jk\omega_1)$$

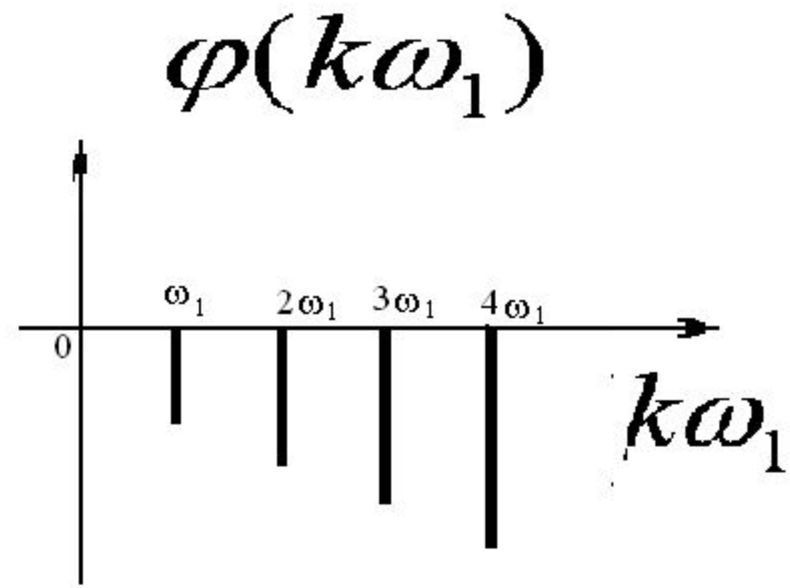
$$\dot{A}_k = A(k\omega_1) e^{-j\varphi(k\omega_1)}$$ - комплексным частотным спектром

Составляющие:

$A(k\omega_1)$ - амплитудным спектром

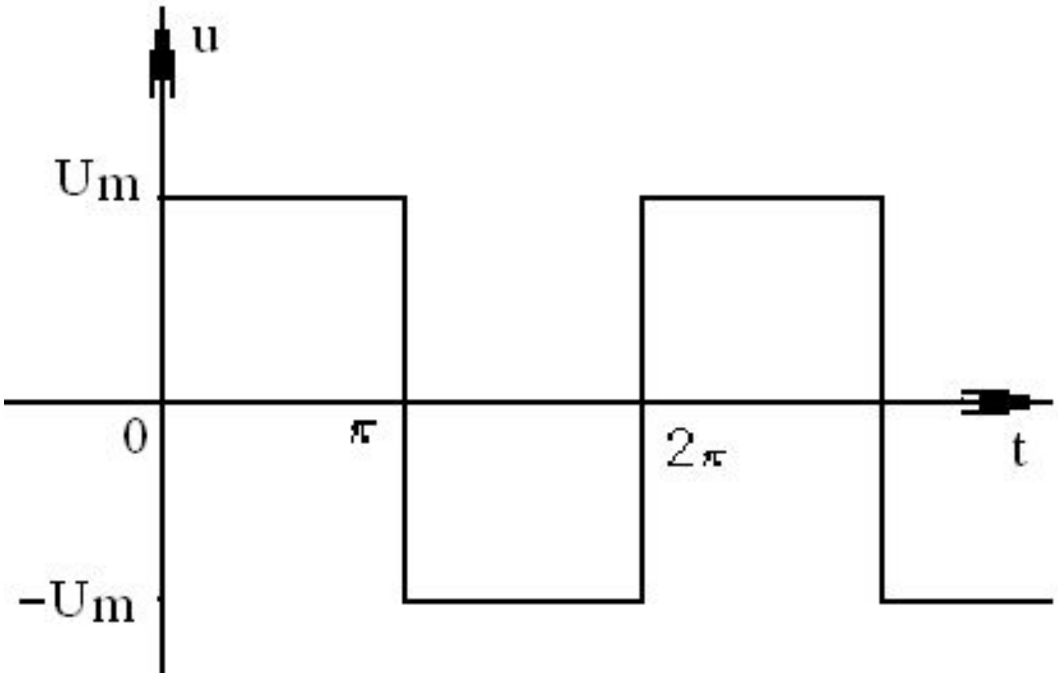
$\varphi(k\omega_1)$ - фазовым спектром





Периодические функции имеют дискретный или линейчатый спектр

Пример. Разложить в ряд Фурье прямоугольный импульс



$$u(t)=\begin{cases} U_m, & 0\le t\le \pi \\ -U_m, & \pi\le t\le 2\pi \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} U_m dt + \int_0^{2\pi} -U_m dt = 0.$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos ktdt = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^\pi U_m \cos ktdt - \int_\pi^{2\pi} U_m \cos ktdt\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos ktdt - \int_\pi^{2\pi} \cos ktdt\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin kt\Big|_0^\pi - \frac{1}{k}\sin kt\Big|_\pi^{2\pi}\right] = 0;$$

$a_k = 0$ *при любом* k.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin kt dt = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} U_m \sin k\, t dt - \int_{\pi}^{2\pi} U_m \sin k\, t dt\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\cos kt\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\pi k}\left[-\cos k\pi + \cos 0 + \cos 2k\pi - \cos k\pi\right] =$$

$$= \begin{cases} k - \textit{четное}, b_k = 0 \\ k - \textit{нечетное}, b_k = \dfrac{4U_m}{\pi k}\left(k = 1,3,5,7\right) \end{cases}$$

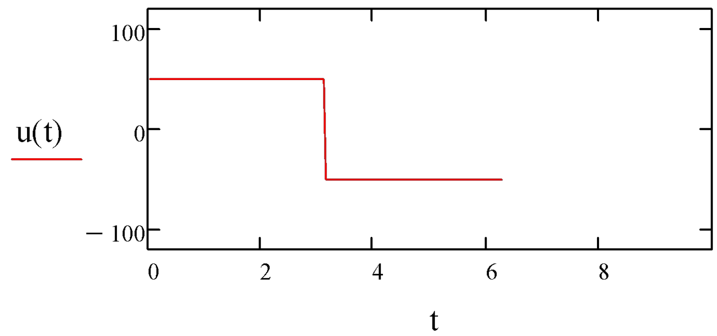
$$f(t) = \sum_{k=1,3,5....}^{\infty} b_k \sin \omega_1 t = \sum_{k=1,3,5....}^{\infty} \frac{4 \cdot U_m}{\pi k} \sin \omega_1 t$$

$$f(t) = \frac{4U_m}{\pi} \sin \omega_1 t + \frac{4U_m}{3\pi} \sin 3\omega_1 t + \frac{4U_m}{5\pi} \sin 5\omega_1 t ...$$

$$u = 63{,}66 \sin \omega_1 t + 21{,}22 \sin 3\omega_1 t + 12{,}73 \sin 5\omega_1 t + ...$$

ПРИМЕР №1. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ДВУПОЛЯРНОГО ИМПУЛЬСА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

$$u(t) := \begin{cases} Um & \text{if } 0 < t < \pi \\ (-Um) & \text{if } \pi < t < 2\cdot\pi \end{cases}$$



$$a0 := \frac{1}{T}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} u(t)\,dt = 0$$

$$b(k) := \frac{2}{T}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} u(t)\cdot\sin(k\cdot t)\,dt$$

$$ak(k) := \frac{2}{T}\cdot\int_0^{2\cdot\pi} u(t)\cdot\cos(k\cdot t)\,dt$$

$$u1(t) := 63.662\cdot\sin(t)$$

$$k := 1, 3 .. 11$$

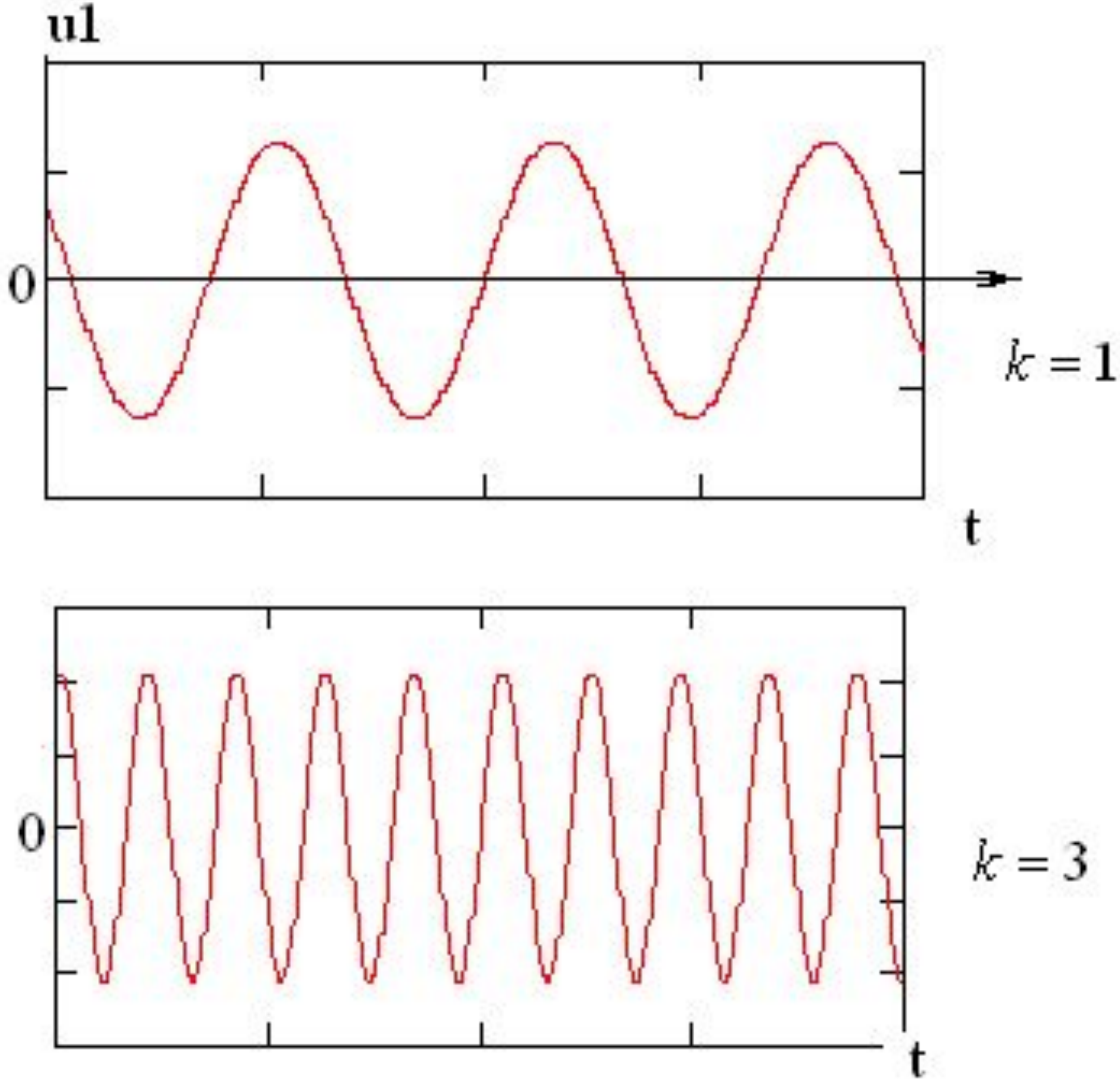
$$u3(t) := 21.221\cdot\sin(3\cdot t)$$

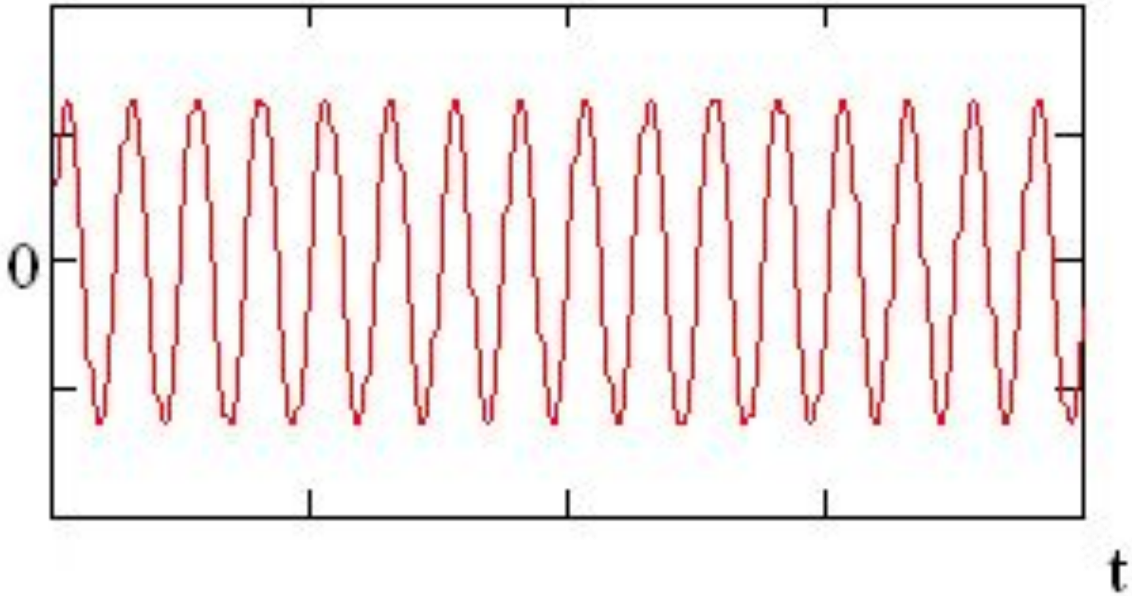
$$u5(t) := 12.732\cdot\sin(5\cdot t)$$

$$u7(t) := 9.095\cdot\sin(7\cdot t)$$

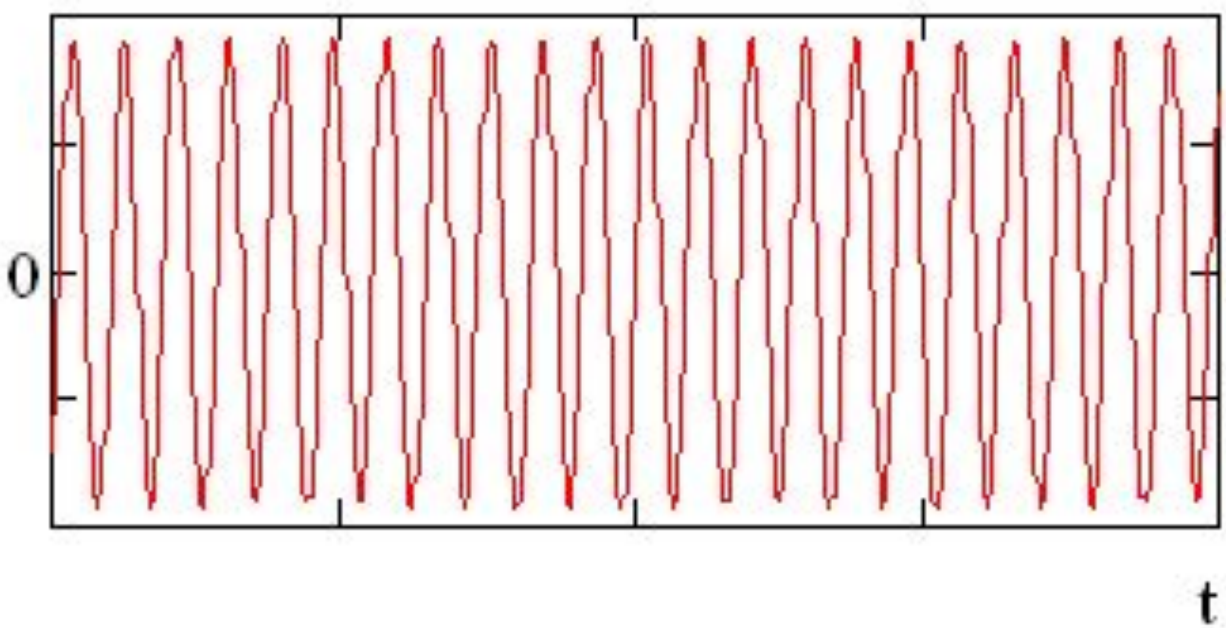
$$u9(t) := 7.074\cdot\sin(9\cdot t)$$

$$u11(t) := 5.787\cdot\sin(11\cdot t)$$

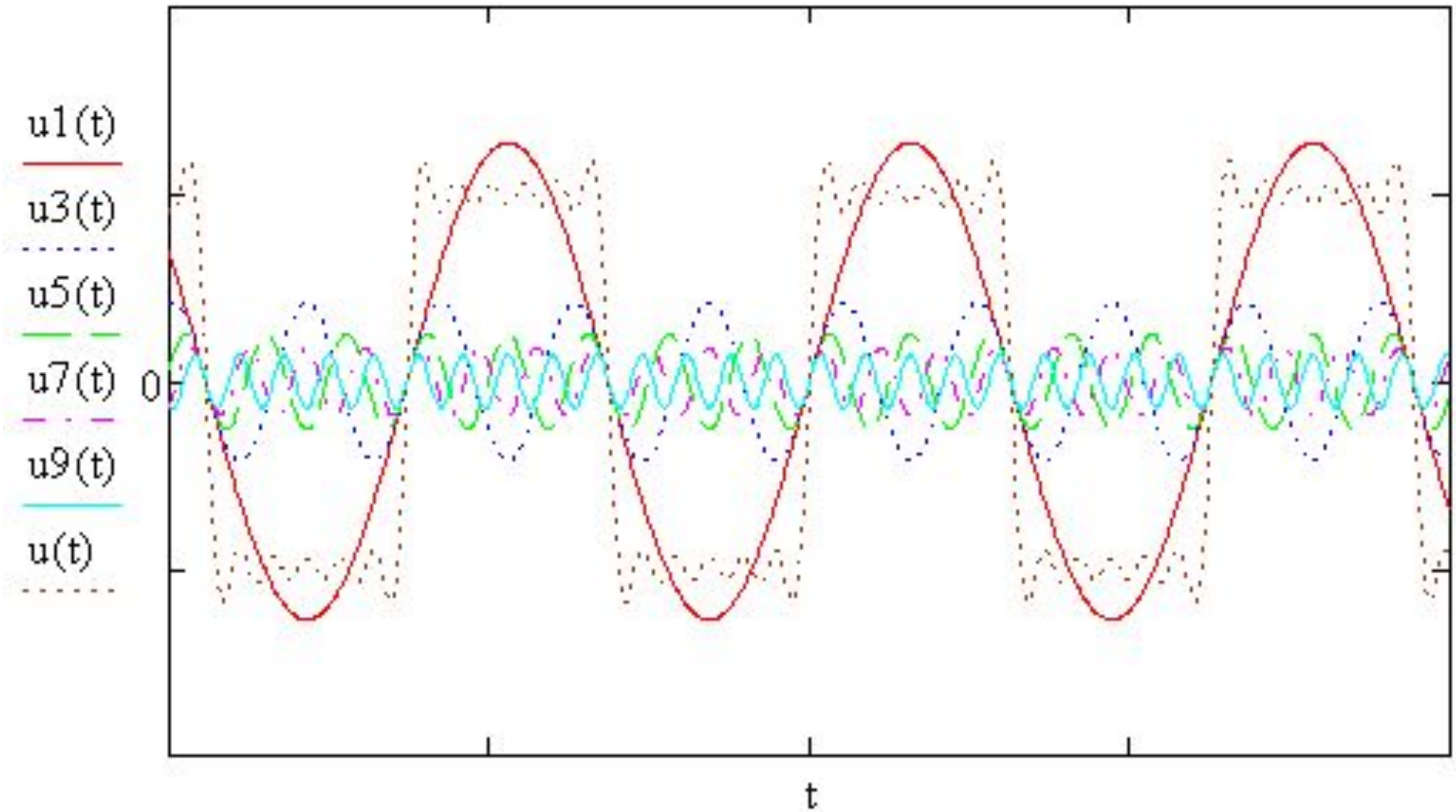

u1
0
t
k = 1
0
t
k = 3



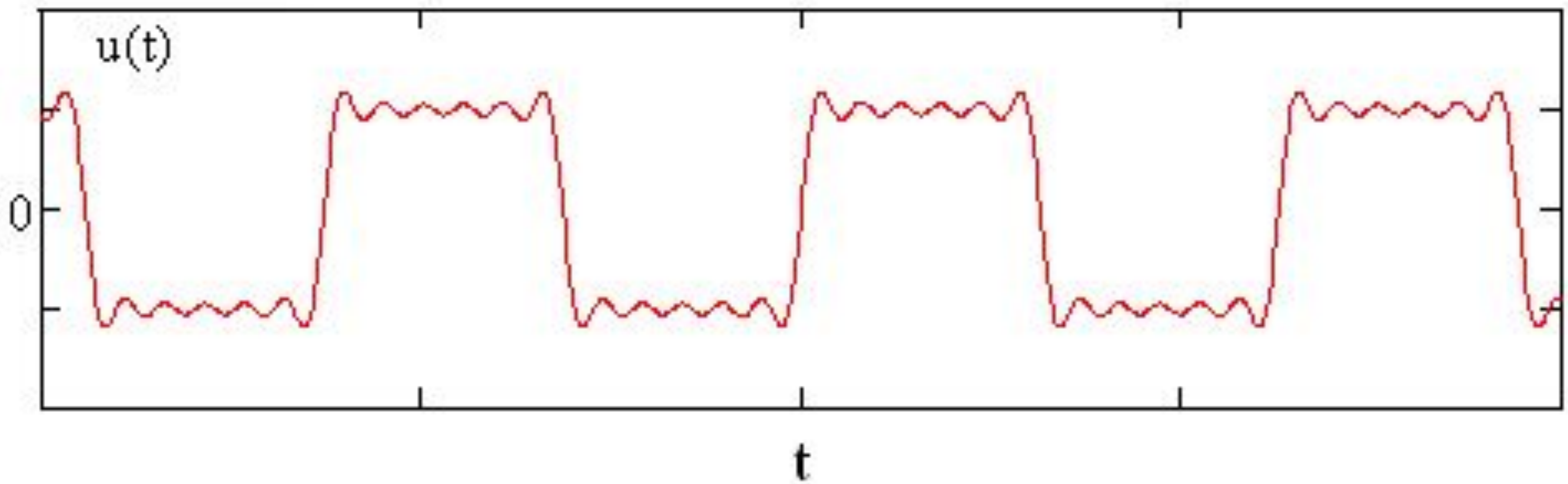
$k = 5$

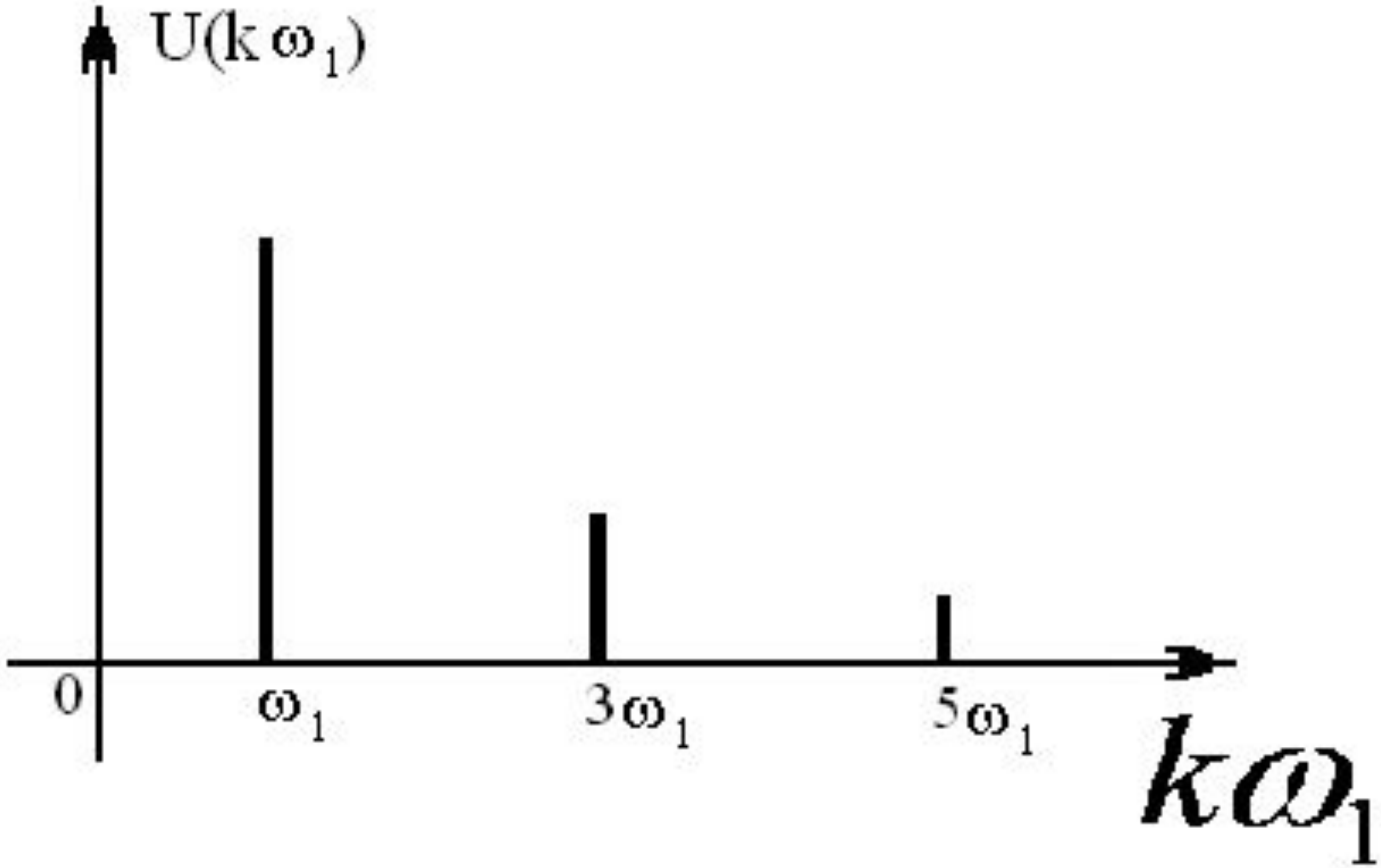


$k = 7$



u1(t)
u3(t)
u5(t)
u7(t)
u9(t)
u(t)
0
t


u(t)
0
t



Периодические функции имеют линейчатый спектр, т.е. спектр периодических функций дискретный.

Спектр непериодических сигналов можно получить с помощью преобразования Фурье.

Преобразование Фурье позволяет получить спектральные функции непериодических функций.

Непериодическую функцию времени, удовлетворяющую условиям Дирихле и абсолютно интегрируемая в бесконечных пределах может быть преобразована в частотную область с помощью преобразования Фурье.

Преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt -$$ прямое двухстороннее преобразование Фурье

Если выполняется условие:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ f(t), t \geq 0 \end{cases}$$

преобразование Фурье называется односторонним преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$f(t)-$ непериодическая функция времени

$F(j\omega)-$ спектральная плотность, спектральная функция, спектр непериодической функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega -$$

обратное преобразование Фурье

$f(t)-$ абсолютно интегрируемые функции в бесконечном интервале

Преобразование Фурье – частный случай преобразования Лапласа при $p = j\omega$

$$F(j\omega) = F(p)\Big|_{p=j\omega}$$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad p = \sigma + j\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$f(t)$ – непериодическая функция времени

$F(j\omega)$ – спектральная плотность, спектральная функция, спектр непериодической функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega -$$

обратное преобразование Фурье

Эти формулы позволяют преобразовать непериодическую функцию времени $f(t)$ в функцию частоты $F(j\omega)$.
Так как спектральная $F(j\omega)$ функция комплексная величина, ее можно показать в показательной и в алгебраической форме.

$$F(j\omega) = \left|F(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) + jB(\omega)$$

$\left|F(j\omega)\right| -$ Модуль называется амплитудный спектр, четная функция

$\varphi(\omega) -$ Аргумент называется фазовый спектр, нечетная функция.

1. Определить спектр функции $f(t) = e^{-\alpha t}$.

Изображение по Лапласу функции $f(t) = e^{-\alpha t}$:

$$e^{-\alpha t} \div \frac{1}{p+\alpha}$$

$$F(p) \div \left. \frac{1}{p+\alpha} \right|_{p=j\omega}$$

Спектральная функция:

$$F(j\omega) \div \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j\, arctg \frac{\omega}{\alpha}}$$

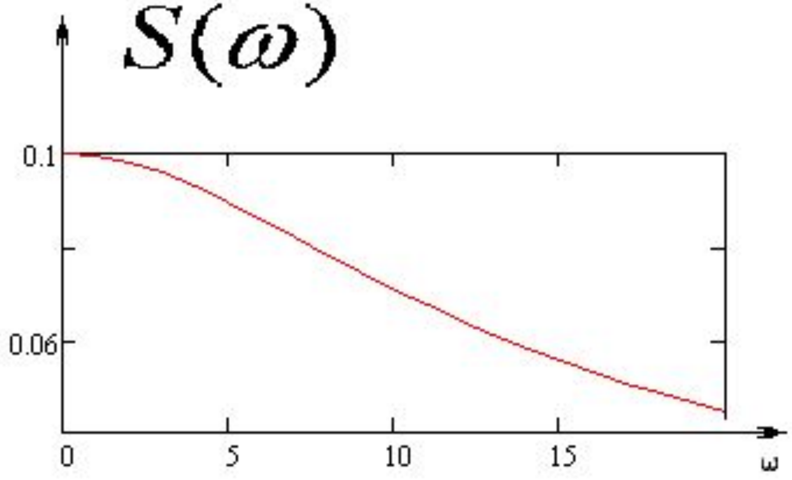
Амплитудный спектр:

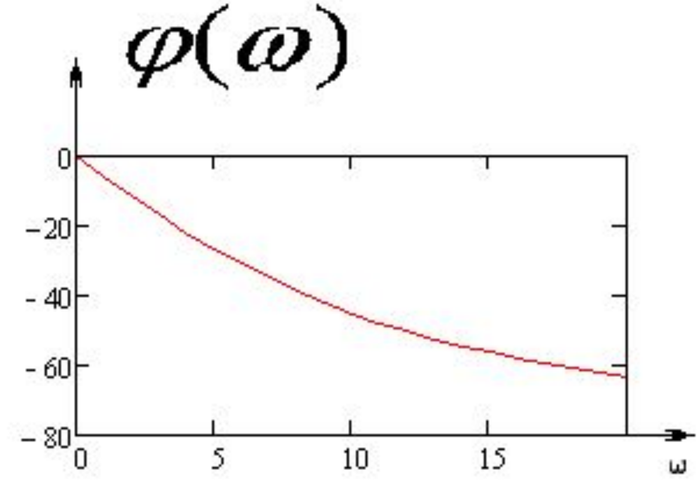
$$S(\omega) = \left| F(j\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Фазовый спектр:

$$\varphi(\omega) = -arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

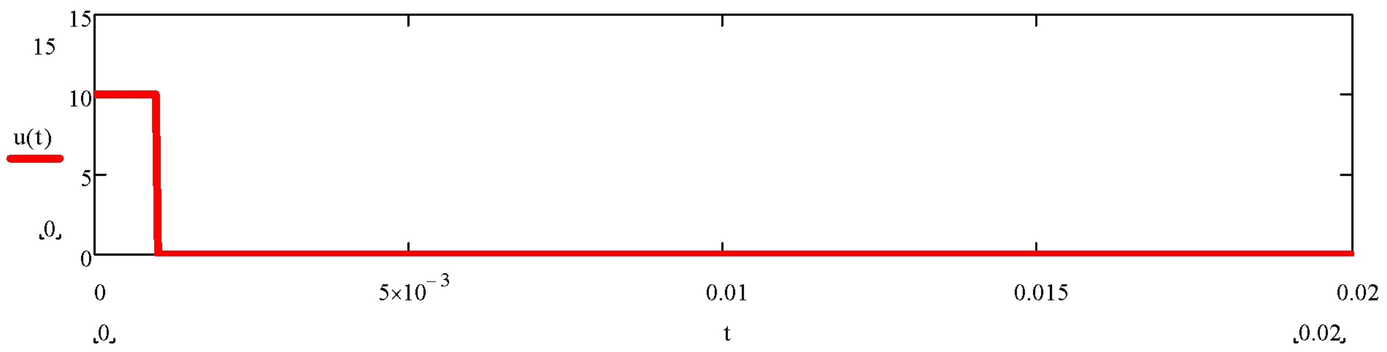
Графики $S(\omega), \quad \varphi(\omega)$





Спектр непериодической функции сплошной

Пример. Спектр прямоугольного импульса



$$u(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{if } \tau \le t \le T \end{cases}$$

$U := 10$

$\tau := 0.001$

$T := 0.02$

$$F(k) := \int_0^T u(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k \cdot t}\, dt$$

$F(k)$

$S(k) := |F(k)|$

$\psi(k) := \arg(F(k))$

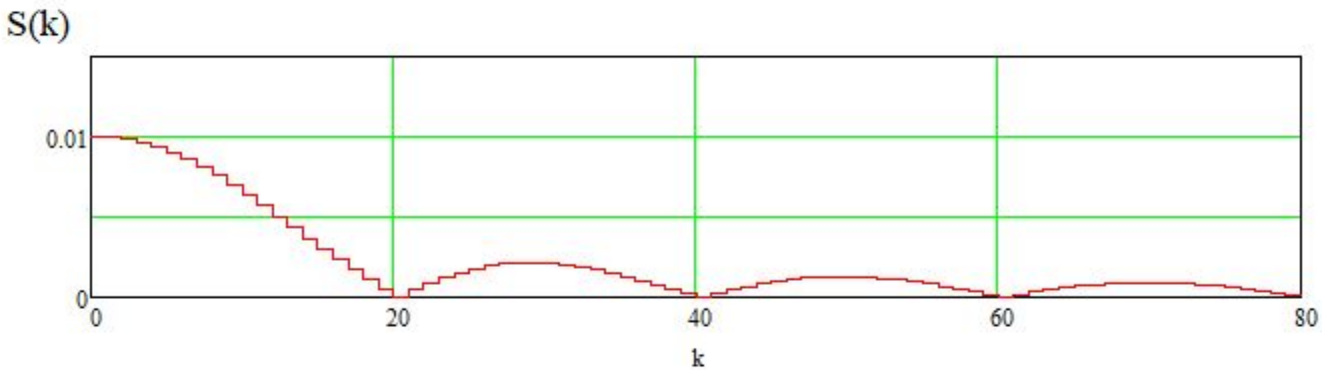
	0
0	0.01
1	$9.836 \cdot 10^{-3} - 1.558i \cdot 10^{-3}$
2	$9.355 \cdot 10^{-3} - 3.04i \cdot 10^{-3}$
3	$8.584 \cdot 10^{-3} - 4.374i \cdot 10^{-3}$
4	$7.568 \cdot 10^{-3} - 5.499i \cdot 10^{-3}$
5	$6.366 \cdot 10^{-3} - 6.366i \cdot 10^{-3}$
6	$5.046 \cdot 10^{-3} - 6.945i \cdot 10^{-3}$
7	$3.679 \cdot 10^{-3} - 7.22i \cdot 10^{-3}$
8	$2.339 \cdot 10^{-3} - 7.198i \cdot 10^{-3}$
9	$1.093 \cdot 10^{-3} - 6.9i \cdot 10^{-3}$
10	$-6.366i \cdot 10^{-3}$
11	$-8.942 \cdot 10^{-4} - 5.646i \cdot 10^{-3}$
12	$-1.559 \cdot 10^{-3} - 4.799i \cdot 10^{-3}$
13	$-1.981 \cdot 10^{-3} - 3.888i \cdot 10^{-3}$
14	$-2.162 \cdot 10^{-3} - 2.976i \cdot 10^{-3}$
15	...

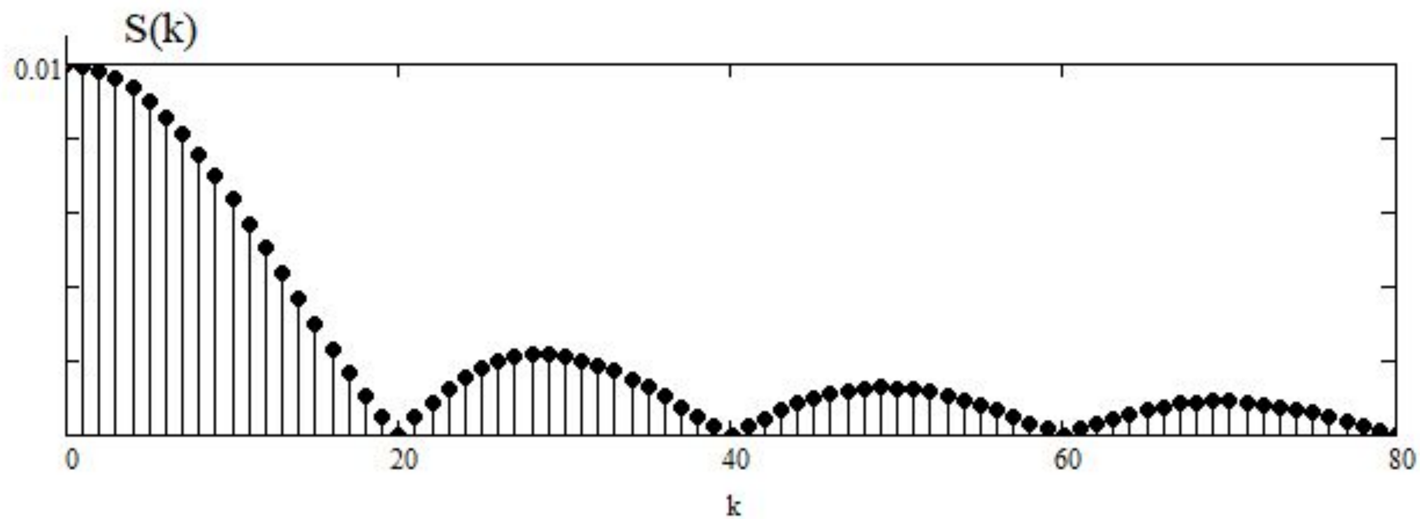
$S(k) =$

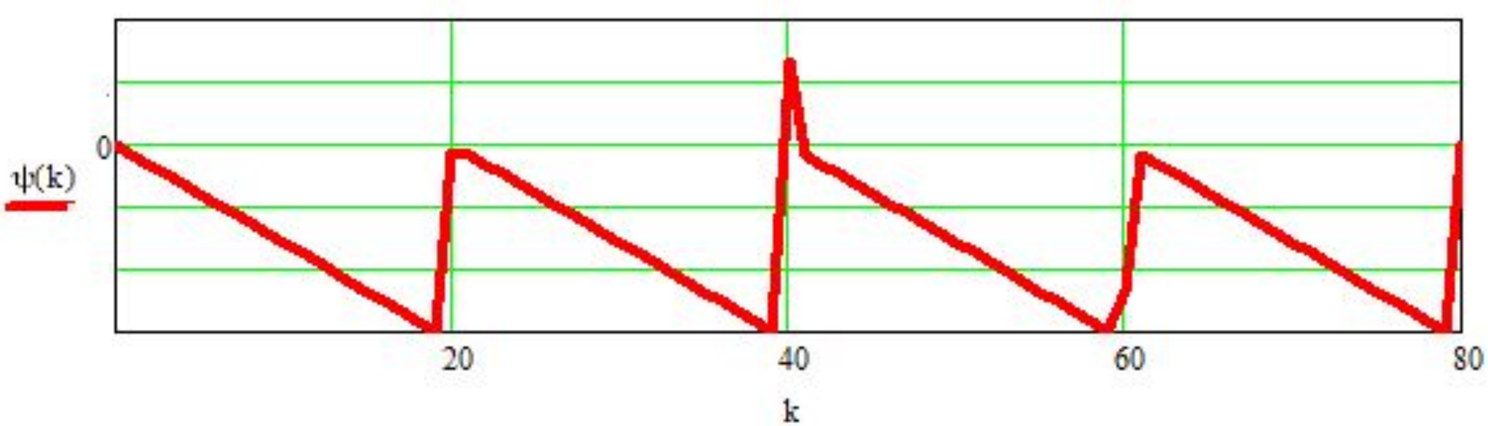
0.01
$9.959 \cdot 10^{-3}$
$9.836 \cdot 10^{-3}$
$9.634 \cdot 10^{-3}$
$9.355 \cdot 10^{-3}$
$9.003 \cdot 10^{-3}$
$8.584 \cdot 10^{-3}$
$8.103 \cdot 10^{-3}$
$7.568 \cdot 10^{-3}$
$6.986 \cdot 10^{-3}$
$6.366 \cdot 10^{-3}$
$5.716 \cdot 10^{-3}$
$5.046 \cdot 10^{-3}$
$4.363 \cdot 10^{-3}$
$3.679 \cdot 10^{-3}$
...

$\psi(k) =$

0
-0.157
-0.314
-0.471
-0.628
-0.785
-0.942
-1.1
-1.257
-1.414
-1.571
-1.728
-1.885
-2.042
-2.199
...


S(k)
0.01
0
0
20
40
60
80
k


S(k)
0.01
0
20
40
60
80
k


0
ψ(k)
20
40
60
80
k

Спектр непериодической функции сплошной.

Контрольные вопросы

1. Из каких тригонометрических функций формируется периодический сигнал?
2. Что такое постоянная составляющая ряда Фурье?
3. Какие формы ряда Фурье используются для описания периодических сигналов?
4. Что такое амплитудный спектр и фазовый спектр?
5. Какой вид имеет амплитудный и фазовый спектр периодических сигналов?
6. Какой вид имеет амплитудный и фазовый спектр непериодических сигналов?
7. Какие функции могут быть разложены в тригонометрический ряд Фурье?