Кривые, заданные параметрически

Если кривая задана с помощью уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [a;b]$ - параметр, то говорят, что кривая задана параметрически.

Построение эскиза такой кривой удобно производить в следующей последовательности:

1. Найти области определения функций $x(t)$ и $y(t)$ и построить эскизы их графиков. Определить нули и точки экстремумов.

2. Составить таблицу значений x и y, взяв в качестве контрольных значений параметра t те, в которых $x(t) = 0,\ y(t) = 0$ - нули, и $x'(t) = 0,\ y'(t) = 0$ - экстремумы.
Указать характер монотонности функций x и y на промежутках между выбранными точками.

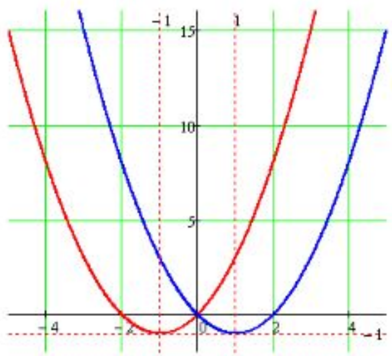
3. Построить кривую в декартовых координатах (x, y), последовательно соединяя точки в соответствии с возрастанием параметра t.

Иногда построение упрощается с помощью исключения параметра t из уравнений и получения прямой зависимости между x и y.

Пример построения кривой, заданной параметрически

Построим кривую, заданную уравнениями $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$.

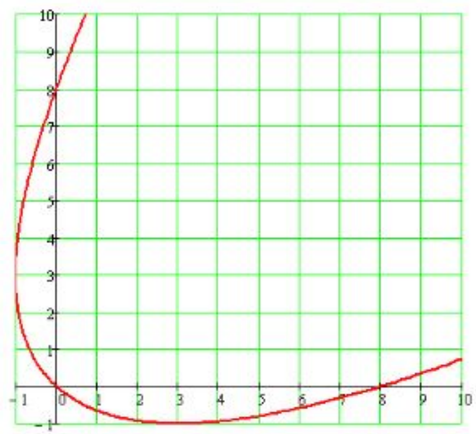
1. Построим графики кривых $x = x(t)$ и $y = y(t)$.
   Графиком функций $x = t^2 - 2t$ является парабола, проходящая через точки $(0;0)$ и $(2;0)$, с вершиной точке $(1;-1)$ (синий контур).
   Графиком функций $y = t^2 + 2t$ является парабола, проходящая через точки $(0;0)$ и $(-2;0)$, с вершиной точке $(-1;-1)$ (красный контур).



2. Составим таблицу значений, взяв в качестве характерных значений параметра t, значения, соответствующие нулям и точкам экстремумов графиков $x(t)$ и $y(t)$, укажем характер монотонности функций:

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x	$+\infty$	↘	8	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3	↗	8	↗	$+\infty$
направление кривой		↙		↙		↖		↖		↗		↗	

3. Отметим точки на графике и соединим их с учетом направления хода кривой



Рассмотрим построение кривых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^{\alpha} t \\ y = \sin^{\alpha} t \end{cases}.$$

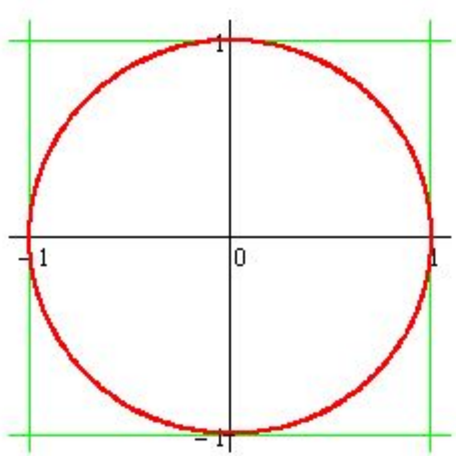
Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены для любых значений параметра t и являются периодическими с периодом 2π, поэтому достаточно построить кривую на интервале $[0; 2\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
направление кривой		$\nwarrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Пусть $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Последовательно соединяя точки (x, y), найденные в таблице, построим кривую:



Заметим, что $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ – уравнение единичной окружности с центром в нуле в декартовых координатах.

Для $\alpha = 2$ уравнения для координат точек кривой следующие:

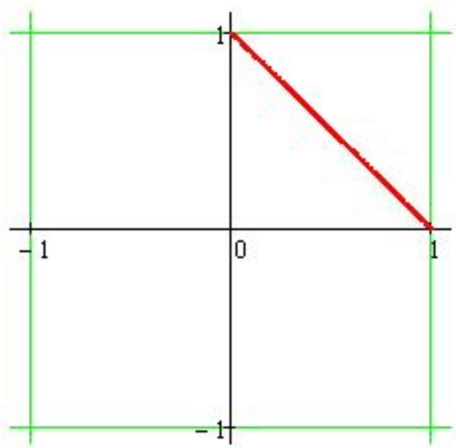
$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}.$$

Заметим, что $x + y = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Уравнение $x + y = 1$ определяет прямую, проходящую через точки $(1;0)$ и $(0;1)$, а так как для любых значений параметра t

$$x = \cos^2 t \geq 0 \text{ и } y = \sin^2 t \geq 0,$$

то искомая кривая будет являться отрезком прямой $x + y = 1$, заключенной между точками $(1;0)$ и $(0;1)$.



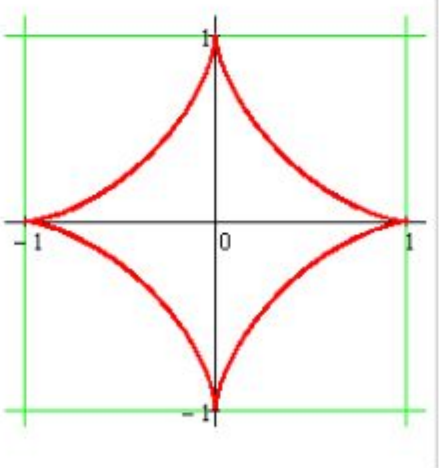
Для $\alpha = 3$:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Переменные x и y принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos^3 t \leq \cos^2 t \text{ и } \sin^3 t \leq \sin^2 t,$$

то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать ближе к началу координат, чем прямая $x + y = 1$. В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



Для $\alpha = \frac{1}{3}$ уравнения для координат точек кривой следующие

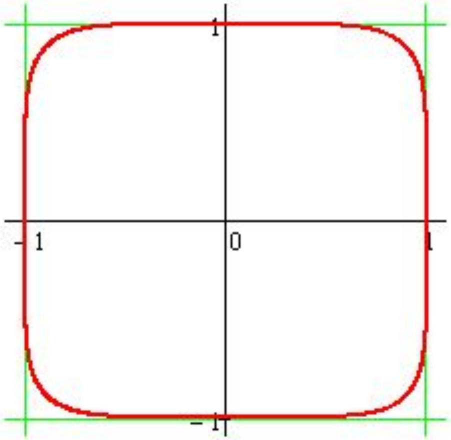
$$\begin{cases} x = \cos^{\frac{1}{3}} t \\ y = \sin^{\frac{1}{3}} t \end{cases}$$

Переменные x и y принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

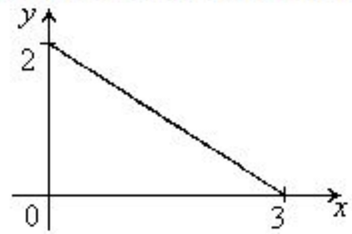
$$\cos^{\frac{1}{3}} t \ge \cos^2 t \text{ и } \sin^{\frac{1}{3}} t \ge \sin^2 t,$$

то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать дальше от начала координат, чем прямая $x + y = 1$.

В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



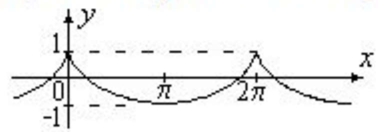
$$\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



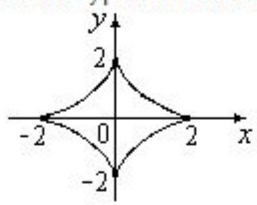
- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$

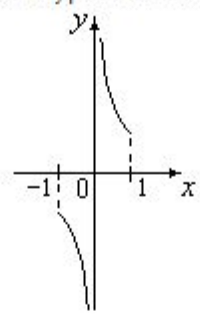
- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



- $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



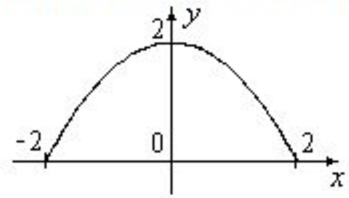
$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t}, \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\ln|\sin t| \end{cases}$$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2|\sin t| \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$$

Год открытия НЭТИ?

- 1953
- 1960
- 1950
- 1962