

## Кривые, заданные параметрически

Если кривая задана с помощью уравнений  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , где  $t \in [a; b]$  - параметр, то говорят, что кривая задана параметрически.

Построение эскиза такой кривой удобно производить в следующей последовательности:

1. Найти области определения функций  $x(t)$  и  $y(t)$  и построить эскизы их графиков. Определить нули и точки экстремумов.
2. Составить таблицу значений  $x$  и  $y$ , взяв в качестве контрольных значений параметра  $t$  те, в которых  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$  - нули, и  $x'(t) = 0$ ,  $y'(t) = 0$  - экстремумы.  
Указать характер монотонности функций  $x$  и  $y$  на промежутках между выбранными точками.
3. Построить кривую в декартовых координатах  $(x, y)$ , последовательно соединяя точки в соответствии с возрастанием параметра  $t$ .

Иногда построение упрощается с помощью исключения параметра  $t$  из уравнений и получения прямой зависимости между  $x$  и  $y$ .

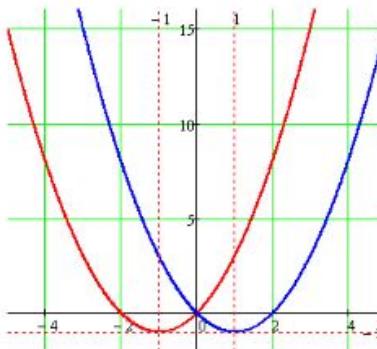
## Пример построения кривой, заданной параметрически

Построим кривую, заданную уравнениями  $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$ .

1. Построим графики кривых  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ .

Графиком функций  $x = t^2 - 2t$  является парабола, проходящая через точки  $(0; 0)$  и  $(2; 0)$ , с вершиной точке  $(1; -1)$  (синий контур).

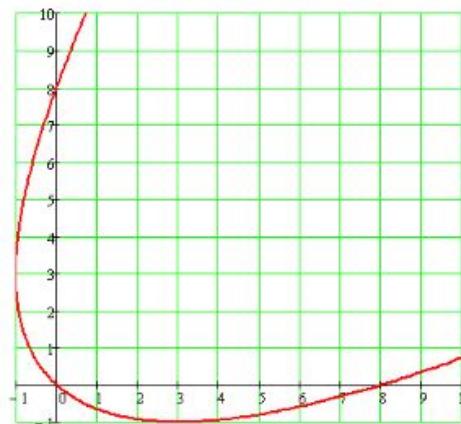
Графиком функций  $y = t^2 + 2t$  является парабола, проходящая через точки  $(0; 0)$  и  $(-2; 0)$ , с вершиной точке  $(-1; -1)$  (красный контур).



2. Составим таблицу значений, взяв в качестве характерных значений параметра  $t$ , значения, соответствующие нулям и точкам экстремумов графиков  $x(t)$  и  $y(t)$ , укажем характер монотонности функций:

$t$	$-\infty$		$-2$		$-1$		$0$		$1$		$2$		$+\infty$
$x$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$
направление кривой		$\checkmark$		$\checkmark$		$\nwarrow$		$\nwarrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

3. Отметим точки на графике и соединим их с учетом направления хода кривой



Рассмотрим построение кривых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^\alpha t \\ y = \sin^\alpha t \end{cases}$$

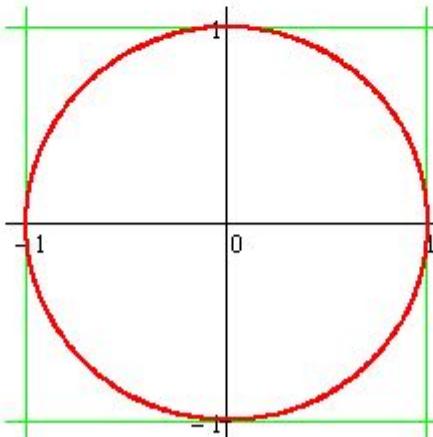
Функции  $x(t)$  и  $y(t)$  определены для любых значений параметра  $t$  и являются периодическими с периодом  $2\pi$ , поэтому достаточно построить кривую на интервале  $[0; 2\pi]$ .

$t$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi$
$x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$y$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
направление кривой		$\nwarrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Пусть  $\alpha = 1$ :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Последовательно соединяя точки  $(x, y)$ , найденные в таблице, построим кривую:



Заметим, что  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$  – уравнение единичной окружности с центром в нуле в декартовых координатах.

Для  $\alpha = 2$  уравнения для координат точек кривой следующие:

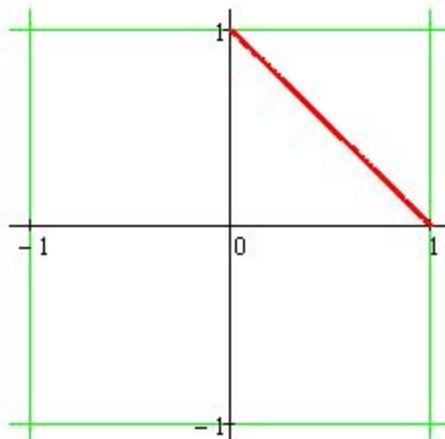
$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

Заметим, что  $x + y = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ .

Уравнение  $x + y = 1$  определяет прямую, проходящую через точки  $(1; 0)$  и  $(0; 1)$ , а так как для любых значений параметра  $t$

$$x = \cos^2 t \geq 0 \text{ и } y = \sin^2 t \geq 0,$$

то искомая кривая будет являться отрезком прямой  $x + y = 1$ , заключенной между точками  $(1; 0)$  и  $(0; 1)$ .



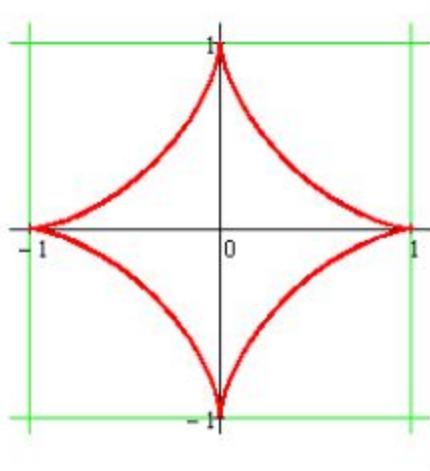
Для  $\alpha = 3$ :

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Переменные  $x$  и  $y$  принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos^3 t \leq \cos^2 t \text{ и } \sin^3 t \leq \sin^2 t,$$

то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать ближе к началу координат, чем прямая  $x + y = 1$ . В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



Для  $\alpha = \frac{1}{3}$  уравнения для координат точек кривой следующие

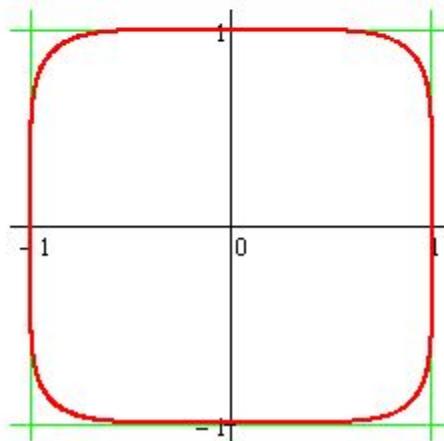
$$\begin{cases} x = \cos^{\frac{1}{3}} t \\ y = \sin^{\frac{1}{3}} t \end{cases}$$

Переменные  $x$  и  $y$  принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos^{\frac{1}{3}} t \geq \cos^2 t \text{ и } \sin^{\frac{1}{3}} t \geq \sin^2 t,$$

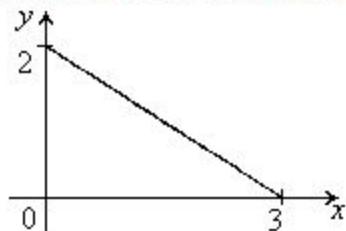
то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать дальше от начала координат, чем прямая  $x + y = 1$ .

В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



---

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



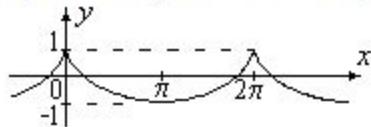
$\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \cos t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.

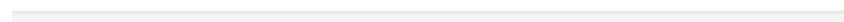


$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

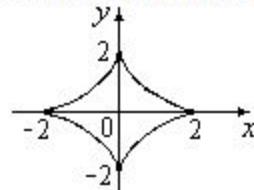
$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$

$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$

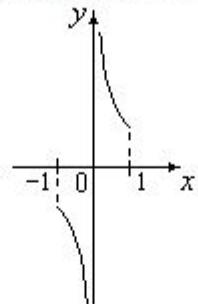


Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



- $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t \end{cases}$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



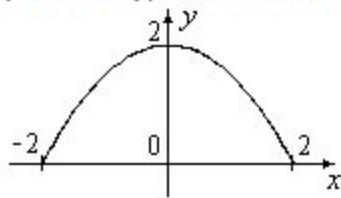
$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin t} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t}, \\ y = \sin t \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\ln |\sin t| \end{cases}$

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2|\sin t| \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

---

Год открытия НЭТИ?



1953



1960



1950



1962