Решение уравнений и неравенств с модулем

Гадирова Натаван Яхьяевна,
учитель математики
МБОУ «Лицей № 4»
г.о. Королев

Содержание

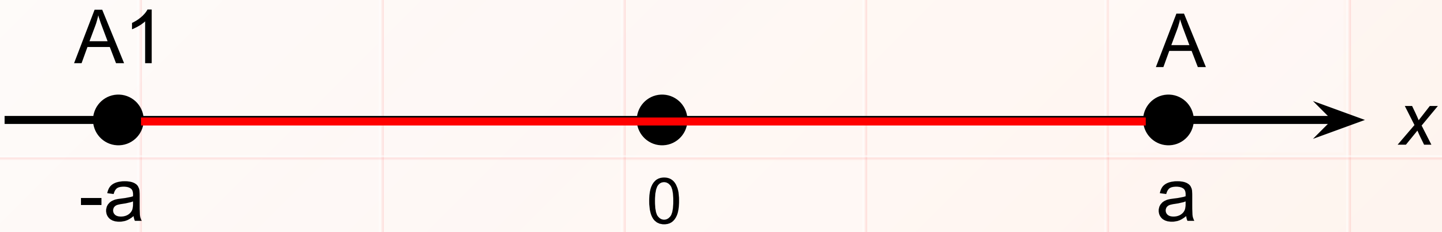
Большинство уравнений с модулем можно решить исходя из определения модуля:

Модулем или абсолютной величиной действительного числа а называется неотрицательное число |а|, равное числу а, если а ≥ 0, и числу (−а), если а < 0.

Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля



$OA=OA_1$ $|a|=|-a|$

Модуль – расстояние от начала отсчета на координатной прямой до точки, изображающей число.

Модуль разности двух чисел a и b равен расстоянию между точками координатной прямой с координатами a и b.

Свойства модуля - абсолютной величины:

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = |-a|$;

3. $|a| \geq a$ и $|a| \geq -a$; или $-|a| \leq a \leq |a|$

4. $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|$; $(b \neq 0)$,

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$, причем $|a + b| = |a| + |b|$, если $a \geq 0$;

   $|a - b| \geq |a| - |b|$;

6. $|a|^2 = a^2 = |a^2|$

Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется уравнением с модулем.

Виды уравнений:

* $|f(x)| = a, \quad a = \text{const}$
* $|f(x)| = g(x)$
* $|f(x)| = |g(x)|$
* $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$

Из определения и свойств модуля вытекают основные методы решения уравнений и неравенств с модулем:

1. “раскрытие” модуля (т.е. использование определения);
2. использование геометрического смысла модуля;
3. метод интервалов;
4. использование равносильных преобразований;
5. замена переменной.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.

Уравнение вида:

$$\left|f\left(x\right)\right| = a, a = \text{const}$$

Равносильно :

$$1. \varnothing, \textit{если } \ a < 0$$

$$2. f(x) = 0, \textit{если } \ a = 0$$

$$3. \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right., \textit{если } \ a > 0$$

Пример 1.

Решить уравнение

$$|x^2 + 3x - 2| = 1$$

Решение:

$$|x^2 + 3x - 2| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 2 = 1 \\ x^2 + 3x - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 3 = 0; \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}, \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Заметим, что если бы мы решали уравнение по определению, то у нас возникли бы затруднения при подстановке корней в соответствующие неравенства.

Рассмотрим уравнения вида

$$|f(x)| = g(x)$$

Такие уравнения можно решать двумя способами:

I способ:

Если *f(x)* имеет более простой вид, чем *g(x)*, то

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -(\mathrm{x}) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 2

Решить уравнение

$$|x-7| = x^3 - 15x^2 + x + 7$$

Решение:

$$|x-7| = x^3 - 15x^2 + x + 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-7 \ge 0, \\ x-7 = x^3 - 15x^2 + x + 7; \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 < 0, \\ -x+7 = x^3 - 15x^2 + x + 7 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 7, \\ x^3 - 15x^2 + 14 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 7, \\ x^3 - 15x^2 + 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 7, \\ \left(x^3 - x^2\right) - 14\left(x^2 - 1\right) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 7, \\ x\left(x^2 - 15x + 2\right) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим уравнение первой системы:

$$\left(x^3 - x^2\right) - 14\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 14(x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 14x + 14\right) = 0$$

$$x = 1; \quad \mathrm{x} = 7 \pm \sqrt{63}$$

Решим уравнение второй системы:

$$x\left(x^2 - 15x + 2\right) = 0$$

$$x = 0; \; x = \frac{15 \pm \sqrt{217}}{2}$$

Вернемся к совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 7,\\ \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = 7+\sqrt{63},\\ x = 7-\sqrt{63},\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x < 7,\\ \left[\begin{array}{l}x = 0,\\ x = \dfrac{15+\sqrt{217}}{2},\\ x = \dfrac{15-\sqrt{217}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 7+\sqrt{63},\\ x = 0,\\ x = \dfrac{15-\sqrt{217}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\mathbf{0;\ 7+\sqrt{63},\ \dfrac{15-\sqrt{217}}{2}}$.

II способ: Если *g(x)* имеет более простой вид, чем *f(x)*.

Если *g(x)<0*, то уравнение *|f(x)|=g(x)* не имеет решений

Если *g(x)≥0*, то

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

Пример 3

Решить уравнение $\left|6x^3-2x^2+4x-33\right|=10x-35$

Решение:

$$\left|6x^3-2x^2+4x-33\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-35\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 6x^3-2x^2+4x-33=10x-35, \\ 6x^3-2x^2+4x-33=-10x+35 \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$6x^3-2x^2+4x-33=10x-35 \Leftrightarrow 6x^3-2x^2-6x+2=0$$

$$\Leftrightarrow 6x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-1\right)\left(3x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, \\ x=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение совокупности:

$$6x^3-2x^2+4x-33=-10x+35 \Leftrightarrow 6x^3-2x^2+14x-68=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^3-48-2x^2+8+14x-28=0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-2)(x^2+2x+4)-2(x-2)(x+2)+14(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x^2+5x+17)=0 \quad \Leftrightarrow x=2$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} 10x-35\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, \\ x=\dfrac{1}{3}, \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, уравнение решений не имеет.

Рассмотрим уравнения вида

$$|f(x)| = |g(x)|$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

И мы получаем следующую равносильность:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 4

Решить уравнение

$$\left|x^5-6x^2+9x-6\right|=\left|x^5-2x^3+6x^2-13x+6\right|$$

Решение:

$$\left|x^5-6x^2+9x-6\right|=\left|x^5-2x^3+6x^2-13x+6\right|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5-6x^2+9x-6=x^5-2x^3+6x^2-13x+6, \\ x^5-6x^2+9x-6=-x^5+2x^3-6x^2+13x-6. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^5-2x^3-4x=0, \\ 2x^3-12x^2+22x-12=0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\left(x^4-x^2-2\right)=0, \\ 2\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=0. \end{array}\right.$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$2x\left(x^4-x^2-2\right)=0 \quad \Leftrightarrow x\left(x^4-1-x^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)\right)=0 \quad \Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение совокупности:

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \quad \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Вернемся к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\pm\sqrt{2}, \\ x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $0, \pm\sqrt{2}, 1, 2, 3.$

Рассмотрим уравнения вида

$$\left|f_1(x)\right| + \left|f_2(x)\right| + \ldots + \left|f_n(x)\right| = g(x)$$

Для решения уравнений такого вида удобно воспользоваться следующим алгоритмом:

1)Найти нули подмодульных выражений;

2)Провести столько параллельных прямых, сколько содержится модулей в данном уравнении;

3)Нанести на каждую прямую знаки, соответствующие подмодульной функции;

4)Через точки, соответствующие подмодульным нулям, провести вертикальные прямые, которые разобьют параллельные прямые на интервалы;

5)Раскрыть модули на каждом интервале и решить на этом интервале уравнение.

Пример 5

Решить уравнение

$$|x+1|+|2-x|-|x+3|=4$$

Решение:

$$|x+1|=0$$
$$|2-x|=0$$
$$|x+3|=0$$

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=-3$$

	I	II	III	IV
$\lvert x+1\rvert$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\lvert 2-x\rvert$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\lvert x+3\rvert$	$-$	$+$	$+$	$+$

x

-3 -1 2

Раскрывая модули на каждом интервале, получим совокупность систем:

$$|x+1|+|2-x|-|x+3|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -3, \\ -x-1+2-x+x+3=4 \end{cases} \\ \begin{cases} -3<x\le -1, \\ -x-1+2-x-x-3=4 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x\le 2, \\ x+1+2-x-x-3=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x+1-2+x-x-3=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -3, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3<x\le -1, \\ x=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x\le 2, \\ x=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x=8 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=-2,\ x=8.$$

Ответ: -2; 8

В некоторых случаях удобнее использовать метод замены переменной.

Пример 6

Решить уравнение $(x-2)^2+2|x-2|-8=0$

Решение:
Данное уравнение может быть решено несколькими способами.

Например:

Способ 1. Используя определение модуля.

Способ 2. Свести уравнение к равносильности $|f(x)|=g(x)$

Способ 3. Замена переменной.

Заметим, что $(x-2)^2=|x-2|^2$ Замена: $|x-2|=t, \mathrm{t}\geq 0$

Уравнение принимает вид: $t^2+2t-8=0,\ t_1=-4\ (\text{п.к.}),\ \mathrm{t}_2=2$

Обратная замена: $|x-2|=2 \Leftrightarrow x=4, \mathrm{x}=0$

Ответ: 0; 4

Бывает и так , что уравнение нельзя отнести ни к одному из рассмотренных типов, а так затруднительно решить его исходя из определения. В этом случае удобно воспользоваться **графическим** способом решения.

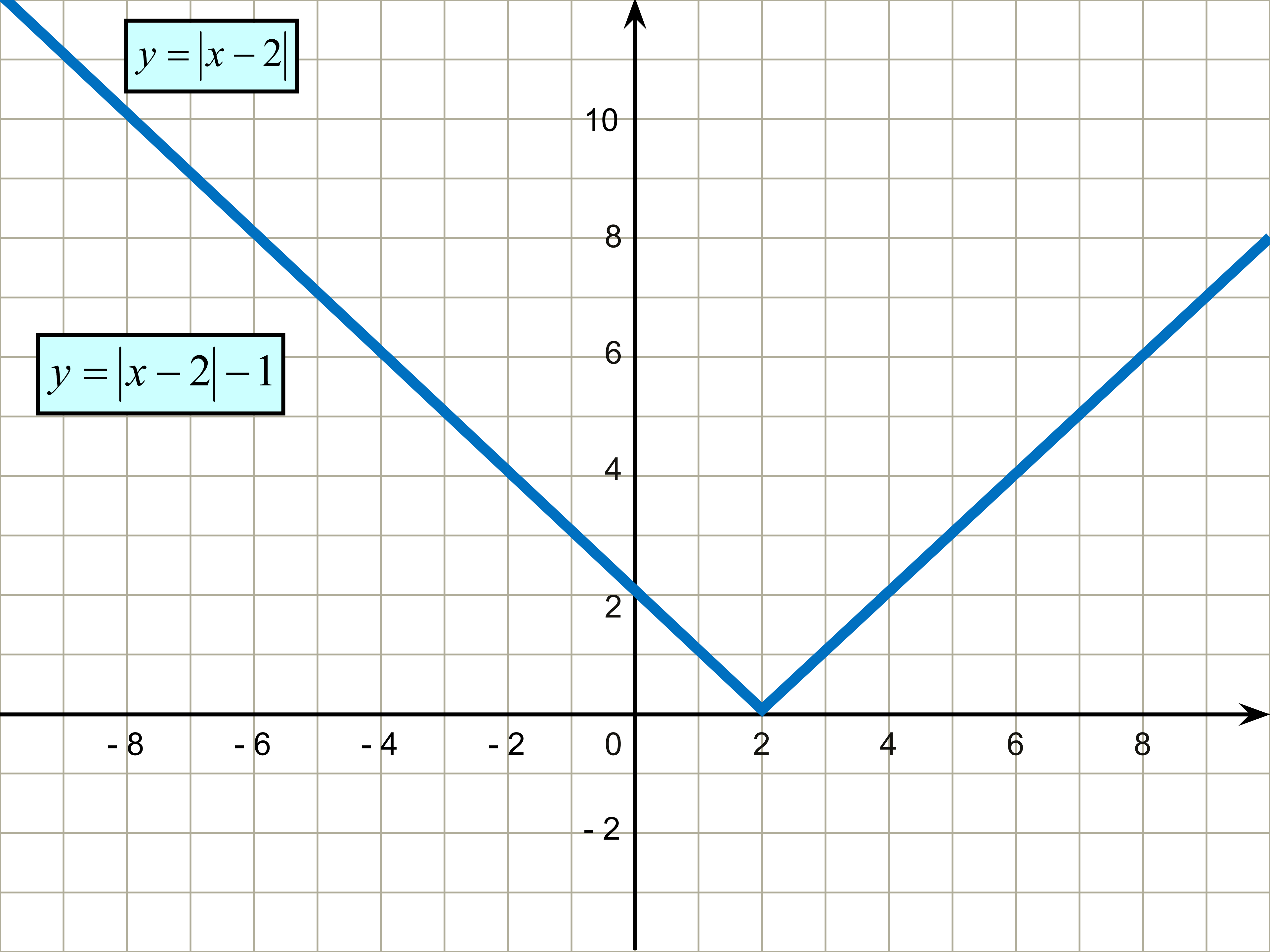
Пример 7

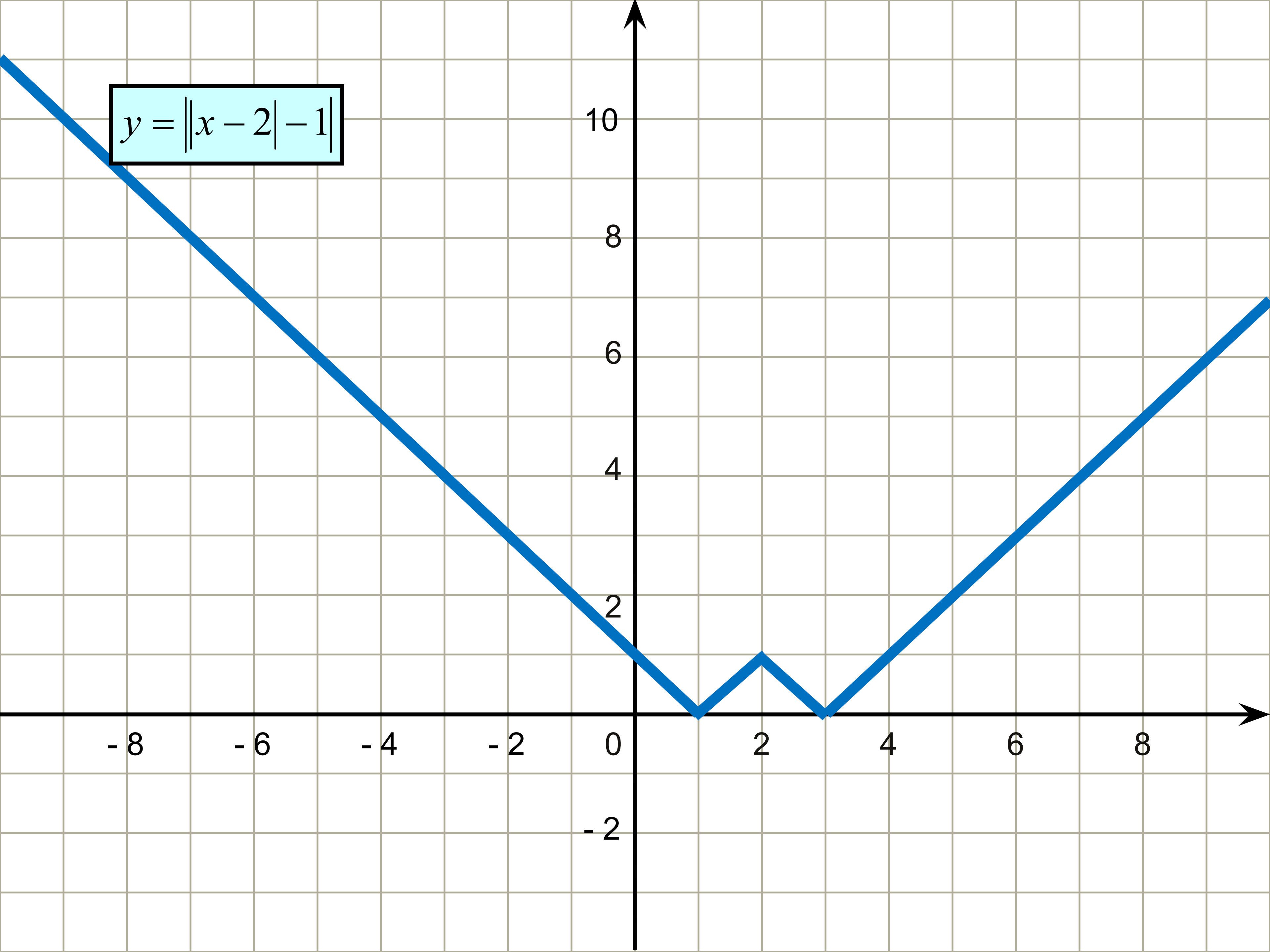
Решить уравнение $$\left|\left||x-2|-1\right|-2\right| = x+1$$

Решение:

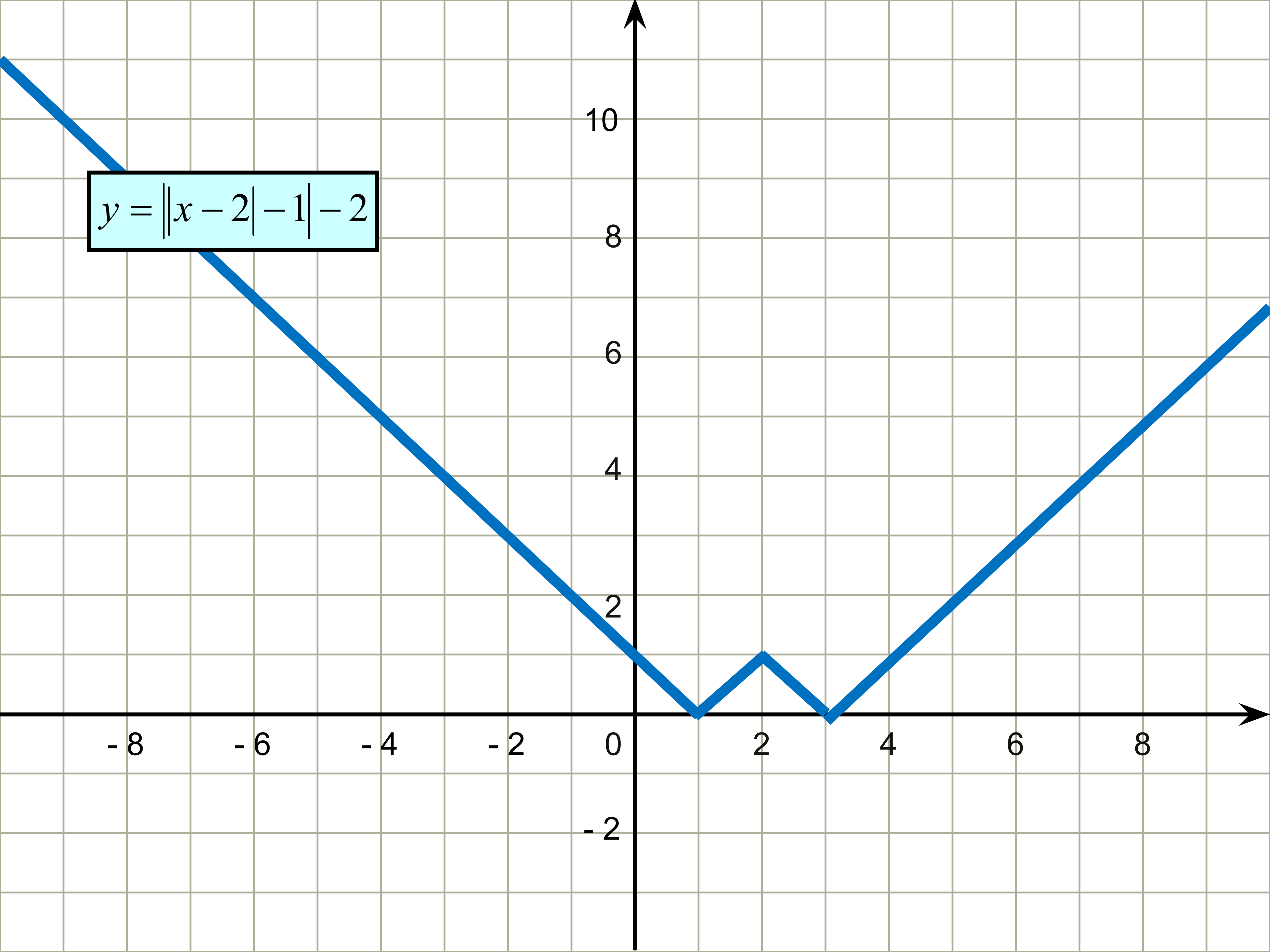
Построим в одной системе координат графики функций

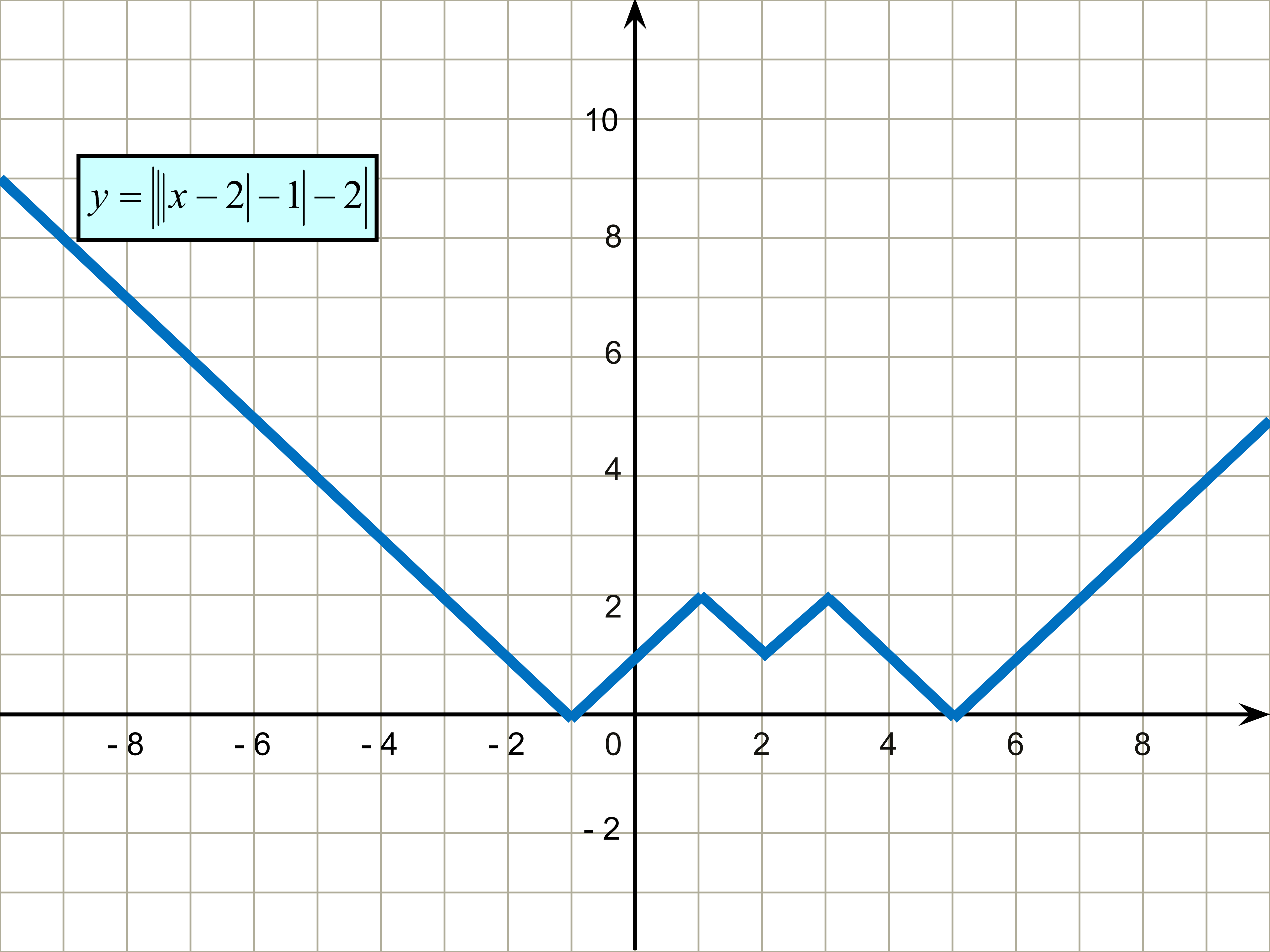
$$y = \left|\left||x-2|-1\right|-2\right|, \qquad y = x+1$$

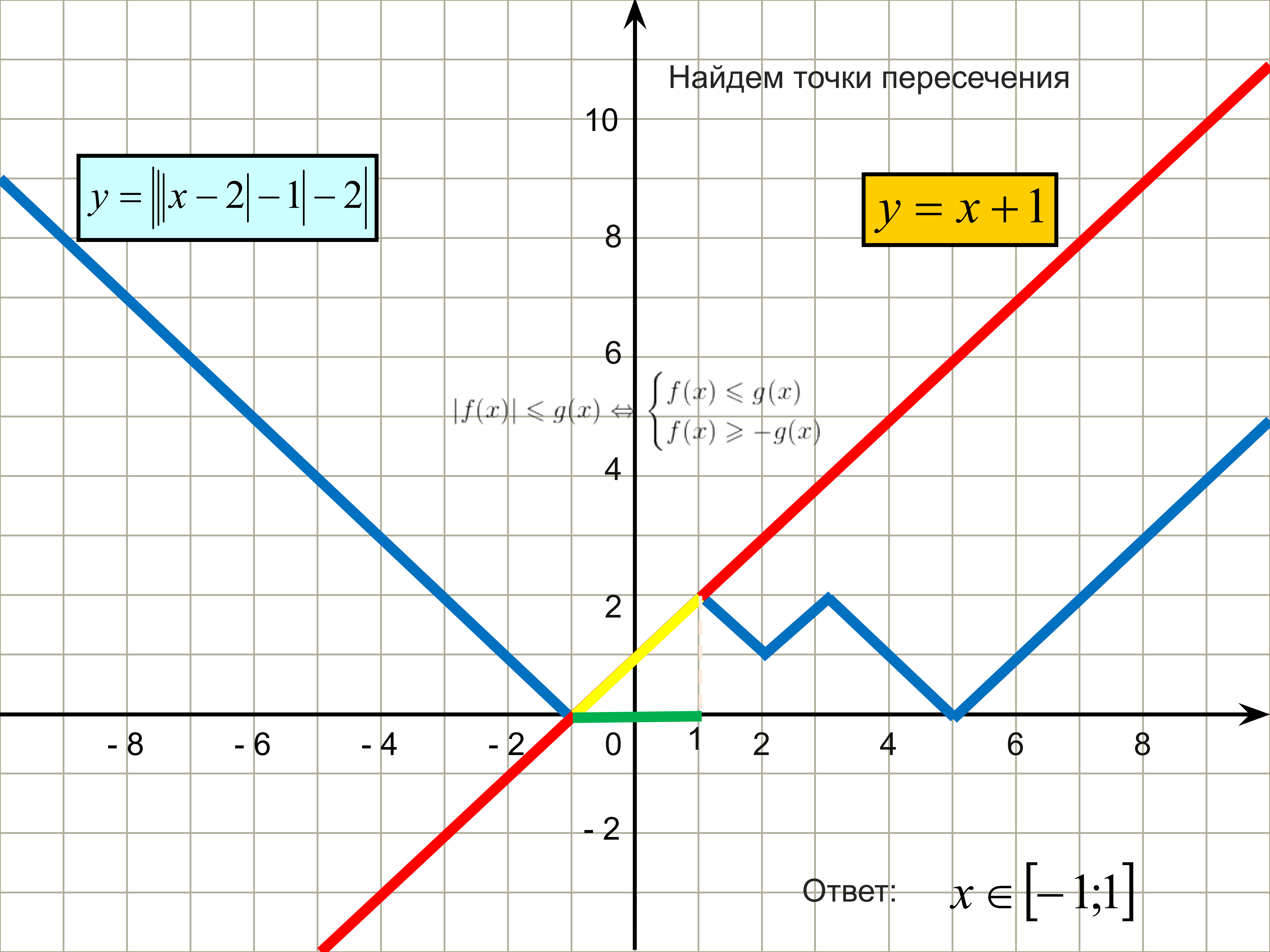

$y = |x - 2|$
$y = |x - 2| - 1$
10
8
6
4
2
- 2
- 8
- 6
- 4
- 2
0
2
4
6
8



$y = \left| |x-2| - 1 \right|$
10
8
6
4
2
-2
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


$y = ||x-2|-1|-2$
10
8
6
4
2
0
- 2
- 8
- 6
- 4
- 2
2
4
6
8


$y = \left|\left||x-2|-1\right|-2\right|$
10
8
6
4
2
0
- 2
- 8
- 6
- 4
- 2
2
4
6
8



Найдем точки пересечения
$y = \left|\left||x-2|-1\right|-2\right|$
$y = x + 1$
$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) \geqslant -g(x) \end{cases}$
10
8
6
4
2
0
- 2
- 8
- 6
- 4
- 2
1
2
4
6
8
Ответ: $x \in [-1;1]$

Задания для самостоятельного решения:

1) $\left|x^2+x-3\right|=x$

Выводы

1. Виды уравнений:

$$|f(x)| = a,\ a = \mathrm{const}$$

$$|f(x)| = g(x)$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$$

2. Методы решения уравнений

- Аналитический:

- по определению
- использование равносильности
- разбиение на промежутки
- замена переменной

- Функционально – графический или Графический

Спасибо за внимание!