

Теория вероятностей в задачах ЕГЭ

*«Теория вероятностей ей есть в
сущности и не что иное,
как здравый смысл, сведенный
к исчислению»*

Лаплас



*Законь жизни очевидны,
хот я порой невероятны.
Мир т ак уст роен: время мчит ся.
Уходят годы безвозврат но..
И, кажет ся, чт о ход событ ий
никт о не в силах изменит ь.
Но между «ист иной» и «ложью»
вст упает грозно «может быт ь!»
Следя за хаосом случайност ей,
закономерност ь извлечём,
Благодаря чему в реальност и
кого-т о, может быт ь, спасём.
Предупредим от неудачи и
спрогнозируем успех.
И счаст ье сделаем возможным,
ведь шанс, он должен быт ь у всех!*

Справочный материал

Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти во время наблюдения или испытания

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов: $P(A) = m/n$

$P(A)$ равна **сумме вероятностей** элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

$A \cup B$ (объединение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих **хотя бы одному из событий A, B**

$A \cap B$ (пересечение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих **обоим событиям A и B** .

\bar{A} называется **противоположным событию A** , если состоит из тех и только тех элементарных исходов, **которые не входят в A** .

Несовместные события – это события, которые не наступают в одном опыте.

Справочный материал

Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется **достоверным**, а которое не может произойти, - **невозможным**. Событие, которое в результате испытания в данном опыте может произойти, а может не произойти называется **случайным** событием.

Элементарные события (исходы) – простейшие события, которыми может закончиться случайный опыт.

$A \cup B$ ИЛИ $A \cdot B$ Сумма (объединение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A, B

$A \cdot B$

$A \cap B$ ИЛИ $A + B$ Произведение (пересечение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B .

$A + B$

Справочный материал

Вероятности противоположных событий:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Формула сложения для несовместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Формула умножения вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

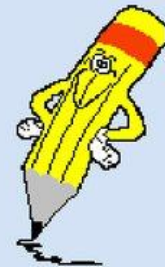
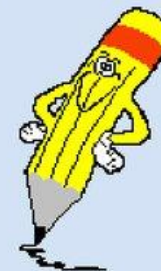


Схема решения задач:

1. Определить, в чем состоит случайный эксперимент и **какие у него элементарные события**. Убедиться, что они равновероятны.
2. Найти **общее число элементарных событий (n)**
3. Определить, какие элементарные события **благоприятствуют событию A**, и **найти их число m**
4. Найти вероятность события **A** по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



Задача 1. Вася, Петя, Коля и Леша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что игру будет начинать Петя.

Решение:

Случайный эксперимент – бросание жребия.

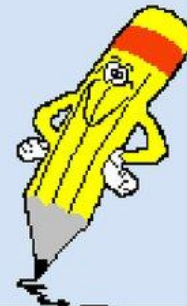
Элементарное событие – участник, который выиграл жребий.

Число элементарных событий: $n = 4$

Событие $A = \{\text{жребий выиграл Петя}\}$, $m = 1$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25



Задача 2.

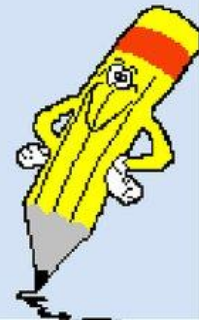
В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрные с жёлтыми надписями на бортах, остальные – жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Решение:

Машин желтого цвета с черными надписями 23, всего машин 50. Поэтому вероятность того, что на случайный вызов приедет машина желтого цвета с черными надписями, равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{23}{50} = 0,46$$

Ответ: 0,46.



Задача 5. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение:

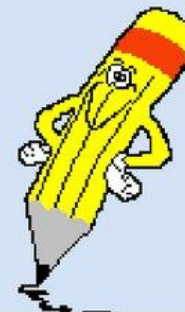
$A = \{\text{первой будет спортсменка из Китая}\}$

$$n = 20$$

$$m = 20 - 8 - 7 = 5$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = 0,25$$

Ответ: 0,25



Задача 6

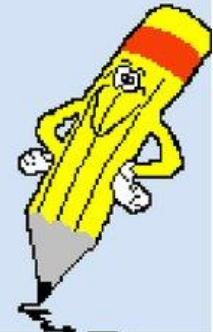
Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение:

В последний день конференции запланировано $(75 - 17 \times 3) : 2 = 12$ докладов.

Вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции, равна $12/75 = 4/25 = 0,16$.

Ответ: 0,16.



Задача 7

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

Решение:

Нужно учесть, что Руслан Орлов должен играть с каким-либо бадминтонистом из России. И сам Руслан Орлов тоже из России.

Вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна $9/25 = 36/100 = 0,36$.

Ответ: 0,36.



Задача 8

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

Решение:

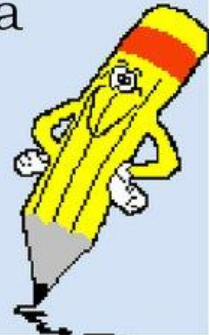
Количество четных цифр на клавиатуре равно 5:

0, 2, 4, 6, 8

всего же цифр на клавиатуре 10, тогда вероятность что случайно нажатая цифра будет чётной равна

$$5/10 = 0,5.$$

Ответ: 0,5.



Задача 9

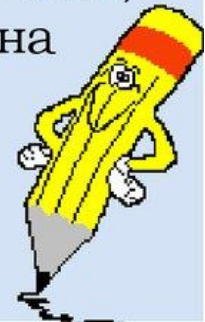
На борту самолёта 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение:

В самолете $12 + 18 = 30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна

$$P = 30 : 300 = 0,1.$$

Ответ: 0,1.



Задача 10

На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение:

Всего в запасную аудиторию направили
 $250 - 120 - 120 = 10$ человек.

Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна

$$P = 10 : 250 = 0,04.$$

Ответ: 0,04.



Задача 11 (а)

В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение:

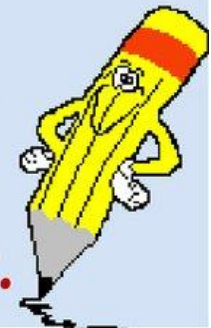
Пусть один из близнецов находится в некоторой группе.

Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников.

Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна

$$P = 12 : 25 = 0,48.$$

Ответ: 0,48.



Задача 11 (б)

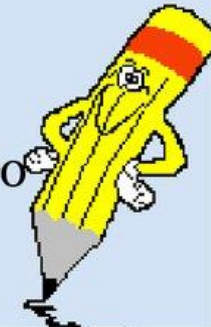
Футбольную секцию посещают 33 человека, среди них два брата – Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на три команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

Решение:

Сначала поместим Антона на случайно выбранное место из свободных 33. Теперь помещаем на свободное место Дмитрия. Всего имеется 32 свободных места (одно уже занял Антон), поэтому всего возможны 32 исхода. В одной команде с Антоном остаётся 10 свободных мест, поэтому событию «Антон и Дмитрий в одной команде» благоприятствуют 10 исходов. Вероятность этого события равна

$$P = 10 : 32 = 0,3125.$$

Ответ: 0,3125.



Задача 12

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

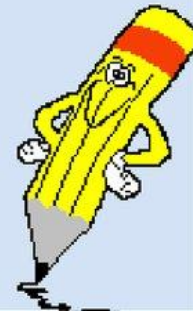
Решение:

На циферблате между десятью часами и одним часом три часовых деления. Всего на циферблате 12 часовых делений.

Поэтому искомая вероятность равна:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25.



Задача 13 На рок-фестивале выступают группы – по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение:

Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д – Дания, Ш – Швеция, Н – Норвегия):

Д – Ш – Н

Д – Н – Ш

Ш – Н – Д

Ш – Д – Н

Н – Д – Ш

Н – Ш – Д

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$P = 2/6 = 1/3 \approx 0,33$$

Ответ: 0,33.

Задача 14. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на 4 группы по 4 команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе.

Решение:

Множество элементарных событий: $n = 16$

$A = \{\text{команда России во второй группе}\}$

С номером «2» четыре карточки: $m = 4$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{16} = 0,25$$

Ответ: 0,25



Задача 15. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с чёрным и зелёным чаем, одинаковые на вид, причём пакетиков с чёрным чаем в 19 раз больше, чем пакетиков с зелёным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем.

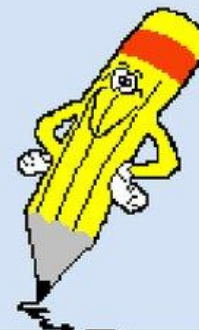
Решение:

Пусть количество пакетиков с зеленым чаем равно x , тогда пакетиков с чёрным чаем $19x$, а всего $20x$.

Значит, вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем равно

$$\frac{x}{20x} = 0,05$$

Ответ: 0,05



Задача 18

Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Ф/1	ОР	ОР	ОР	ОР	РО	РО	РО	РО
Ф/2	ОР	ОР	РО	РО	ОР	ОР	РО	РО
Ф/3	ОР	РО	ОР	РО	ОР	РО	ОР	РО

О – орел (первый)

Р – решка (второй)

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0,375$$

Ответ: 0,375



КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью P наступления случайного события A называется отношение $\frac{N(A)}{N}$, где $N(A)$ – число всех благоприятных исходов, а N – число всех возможных исходов эксперимента

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают сто раз. Найдите вероятность того, что решка выпадет при 101 бросании.



$$N(A) = 1, N = 2, P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{2} = 0,5$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды.
Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

PO

OP

PP

OO



$$N(A) = 2, N = 4, P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска оканчиваются одинаково.



OP



OO



PO



PP

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз



OOO

OOP

OPO

OPP



POO


POP

PPO

PPP

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{8} = 0,375$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу



PPPP	OOPP	OOP	PPOO
OORO	PPPO	OPPO	OPOO
PPOP	POOP	POOO	POPP
OPOP	OPPP	POPO	OPOO

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Переформулируем вопрос: 2 способ

найти вероятность того, что решка выпадет 4 раза

Вероятность выпадения решки при первом броске

$\frac{1}{2}$

Т.к. бросков 4, то вероятность выпадения решки при каждом броске

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участвуют из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Для Орлова возможны 25 партнеров, из них 9 русские

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{25} = 0,36$$

В группе иностранных туристов 51 человек, среди них 2 француза. Для посещения маленького музея группу случайным образом делят на 3 подгруппы, одинаковые по численности. Найдите вероятность того, что французы окажутся в одной подгруппе.

Будем считать, что первый француз уже занял место в какой-то подгруппе. В каждой подгруппе 17 человек. Вероятность того, что второй француз попадёт в ту же группу, что и первый, равна

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{16}{50} = 0,32$$

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите ~~вероятность того~~, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

$$\frac{1000 - 5}{1000} = 0,995$$

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите ~~вероятность того~~, что случайно выбранная в магазине сумка окажется качественной.

$$\frac{100}{100 + 3} = \frac{100}{103}$$

В первом случае 1000 - вся выборка, 5 неисправных среди всех 1000 садовых насосов; а во втором вся выборка 103, из нее 100 качественные

В чем-пи-о-на-те мира участ-ву-ют 16 ко-манд. С по-мо-щью жре-бия их нужно раз-де-лить на че-ты-ре груп-пы по че-ты-ре ко-ман-ды в каж-дой. В ящике впе-ре-меш-ку лежат кар-точ-ки с но-ме-ра-ми групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Ка-пи-та-ны ко-манд тянут по одной кар-точ-ке. Ка-ко-ва ве-ро-ят-ность того, что ко-ман-да Рос-сии ока-жет-ся во вто-рой груп-пе?

Ве-ро-ят-ность того, что ко-ман-да Рос-сии ока-жет-ся во вто-рой груп-пе, равна от-но-ше-нию ко-ли-че-ства кар-то-чек с но-ме-ром 2, к об-ще-му числу кар-то-чек.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода).

Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(\text{ХХО}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(\text{ХОО}) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(\text{ОХО}) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008;$$

$$P(\text{ООО}) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\text{ХХО}) + P(\text{ХОО}) + P(\text{ОХО}) + P(\text{ООО}) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

Двое играют в кости - они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

Первый выиграет, если у второго выпадет 1, 2 или 3.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{6} = 0,5$$



В случайном эксперименте бросают две игральные кости.

Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13

Строки – результат первого броска,
столбцы – второго

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$$

Задача 21. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.



Решение:

Множество элементарных исходов: **$n = 36$**

Числа на выпавших сторонах	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

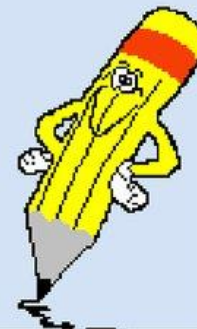
$A = \{\text{сумма равна } 8\}$

$m = 5$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Ответ: 5/36



Задача 20. Игральный кубик бросили один раз.
Какова вероятность того, что выпало число очков,
больше чем 4.

Решение:

Случайный эксперимент – бросание кубика.

Элементарное событие – число на выпавшей грани.

Всего граней:

Элементарные события:



1, 2, 3, 4, 5, 6

n = 6 m = 2

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 1/3



Задача 22. Даша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 2 очка.

Решение.

В сумме на двух кубиках должно выпасть 8 очков. Это возможно, если будут следующие комбинации:

2 и 6

6 и 2

3 и 5

5 и 3

4 и 4



Всего 5 вариантов. Подсчитаем количество исходов (вариантов), в которых при первом броске выпало 2 очка. Такой вариант 1.

Найдем вероятность: $1/5 = 0,2$.

Ответ: 0,2.



Задача 23. Тоша и Гоша играют в кости. Они бросают кубик по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. Первым бросил Тоша, у него выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Гоша не выиграет.

Решение.

При условии, что у Тоши выпало 3 очка, возможны следующие варианты:

3 и 1

3 и 4

3 и 2

3 и 5

3 и 3

3 и 6

Всего 6 вариантов. Подсчитаем количество исходов, в которых Гоша не выиграет, т.е. наберет 1, 2 или 3 очка.

Таких вариантов 3.

Ответ: 0,5.

Найдем вероятность: $3/6 = 0,5$.



Задача 24. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 13 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.

Всего вариантов $n = 6^3 = 216$.

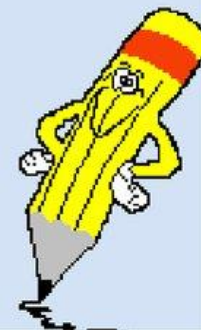
Благоприятных:

(1;6;6)
(2;5;6) (2;6;5)
(3;4;6) (3;5;5) (3;6;4)
(4;3;6) (4;4;5) (4;5;4) (4;6;3)
(5;2;6) (5;3;5) (5;4;4) (5;5;3) (5;6;2)
(6;1;6) (6;2;5) (6;3;4) (6;4;3) (6;5;2) (6;6;1)

Всего благоприятных исходов $m = 21$

$P(A) = m/n = 21/216 = 0,097222 \approx 0,10$

Ответ: 0,10



Основные теоремы

Суммой

событий **A** и **B**

называют

событие **A + B**,

состоящее

в наступлении

хотя бы одного

из этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Произведением

событий **A** и **B**

называют

событие **A · B**,

состоящее

в наступлении

обоих этих

событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Правила комбинаторики

Правила комбинаторики

суммы

$$A + B$$

*происходит
хотя бы одно из событий*

А или В

$$A \cup B$$

произведения

$$A \cdot B$$

*происходят
оба события*

А и В

$$A \cap B$$

У двух школьников по четыре шариковых ручки (красная, зелёная, синяя и чёрная). Они наугад обменялись одной ручкой. Какова вероятность того, что у одного из них окажется две ручки чёрного цвета?

$\frac{1}{4}$

-вероятность того, что первый школьник станет обменивать чёрную ручку

$\frac{3}{4}$

-вероятность того, что второй школьник станет обменивать ручку другого цвета

Вероятность того, что обе чёрные ручки окажутся у второго школьника

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

Т.к. по условию школьники не пронумерованы, то искомая вероятность

$$2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

№ 1



Фабрика выпускает сумки. В среднем на 80 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение

$$N(A) = 80$$

$$N = 80 + 8 = 88$$

$$P(A) = 80:88$$

Ответ: 0,91

№ 2



На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение

События «вопрос о вписанной окружности» и «вопрос о параллелограмме» - несовместные, поэтому вероятность выбрать один из них равна сумме вероятностей:
 $p = 0,2 + 0,15$

Ответ: 0,35

№ 3



Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые четыре раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение

Попадание в цель при каждом последующем выстреле – независимое от предыдущего исхода событие.

Вероятность $p = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4$

Ответ: 0,05

№ 4



В торговом центре два одинаковых кофейных автомата. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение

Событие А – «кофе закончится в первом автомате»

Событие В – «кофе закончится во втором автомате»

Тогда $A \cdot B$ – «кофе закончится в обоих автоматах»

$A + B$ – «кофе закончится хотя бы в одном автомате»

По условию $P(A) = P(B) = 0,3$; $P(A \cdot B) = 0,12$

События А и В совместные

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48$$

События «кофе останется в обоих автоматах» и «кофе закончится хотя бы в одном» – противоположные.

Следовательно, вероятность противоположного события равна

$$1 - 0,48$$

Ответ: 0,52

№ 5



С первого станка поступает 40%, со второго – 30% и с третьего – 30% всех деталей. Вероятность изготовления бракованной детали равны для каждого станка соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найдите вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной.

Решение



$$P = 0,4 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,05$$

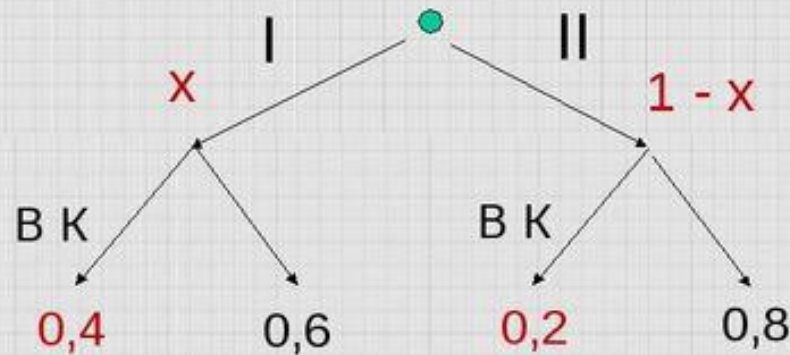
Ответ: 0,028

№ 6



Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение



$$0,4 \cdot X + 0,2 \cdot (1 - X) = 0,35$$

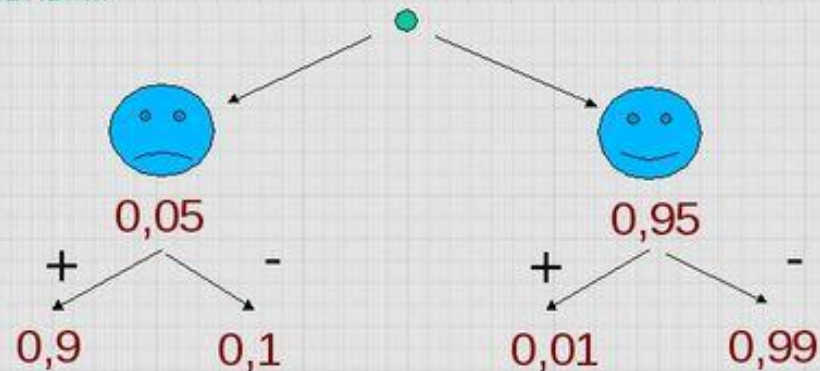
Ответ: 0,75

№ 7



Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение



$$P = 0,05 \cdot 0,9 + 0,95 \cdot 0,01$$

Ответ: 0,0545

№ 8



Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение

Со-бы-тие А - «в ав-то-бу-се мень-ше 15 пас-са-жи-ров», $P(A) = 0,56$

Со-бы-тие В - «в ав-то-бу-се от 15 до 19 пас-са-жи-ров», $P(B)$
- ?

Со-бы-тие А + В - «в ав-то-бу-се мень-ше 20 пас-са-жи-ров»,
 $P(A + B) = 0,94$

Со-бы-тия А и В не-сов-мест-ные

Ответ: $P(A + B) = P(A) + P(B)$; $P(B) = 0,94 - 0,56$

№ 9



В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 16 июня, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 19 июня в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение

16	17	18	19
x	x	x	o
x	x	o	o
x	o	x	o
x	o	o	o

Для погоды на 16, 17, 18 и 19 июня есть 4 варианта (x – хорошая, o – отличная погода). Вероятность смены погоды равна $1 - 0,7 = 0,3$. Найдём вероятности наступления такой погоды:

$$p(\text{хххo}) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3$$

$$p(\text{ххоо}) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7$$

$$p(\text{хохо}) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$$

$$p(\text{хооо}) = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7$$

Указанные события несовместные

$$p = 0,147 + 0,147 + 0,027 + 0,147$$

Ответ: 0,468

Выбор формулы

Учитывается ли
порядок следования элементов?

да

нет

Все ли элементы входят в
соединение?

да

нет

перестановки

размещения

сочетания

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

У Пети в кармане есть 8 монет, из которых 6 монет по рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколькими способами Петя может это сделать, если известно, что обе монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

Из трёх монет две зафиксированы, выбираем из $8-2=6$ монет $3-2=1$ монету по рублю

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_6^1 = 6$$

В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Возможны 2 варианта: либо Петя двухрублёвые монеты вообще не перекладывал, либо переложил сразу обе.

Если двухрублевые монеты не перекладывались, то 3 монеты по рублю можно выбрать из 4 C_4^3 способами.

Если обе двухрублевые монеты переложены, то еще одну рублевую монету можно выбрать из 4 C_4^1 способами.

Всего выбираем 3 монеты из $4+2=6$ C_6^3 способами.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_4^3 + C_4^1}{C_6^3} \quad C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_4^1 = 4$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 20$$

$$P(A) = \frac{4+4}{20} = 0,4$$

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Чтобы пятирублевые монеты лежали в разных карманах, надо переложить только одну из них. Это можно сделать C_2^1 способами.

Всего Петя переложил 3 монеты, придется переложить еще 2 монеты по 10 рублей. Таких монет у Пети 4, поэтому количество способов равно C_4^2

Переложить 3 монеты из 6 имеющихся можно C_6^3 способами.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 6}{20} = 0,6$$

2 способ



1

123

234

345

456



2

124

235

346

125

236

356

126

245



3

134

246

135

256

136



4

145

146

156



5



6

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{12}{20} = 0,6$$

Задачи о пересечении независимых событий.

Задача 25. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение: Пусть событие C = «А. выиграл белыми»,
 D = «А. выиграл чёрными».

По условию, $P(C)=0,5$; $P(D)=0,34$

Необходимо найти вероятность пересечения событий C и D , т. е. $P(C \cap D)$.

События C и D независимы (результат одной партии не зависит от результата другой).

Вероятность наступления $P(C \cap D)$ равна произведению $P(C)$ и $P(D)$, т.е наступят события C и D

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0,5 \cdot 0,34 = 0,17$$

Ответ: 0,17

Задача 26. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение:

Событие А – занят с клиентом первый продавец.

Событие В – занят с клиентом второй продавец.

Событие С – занят с клиентом третий продавец.

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0,6$$

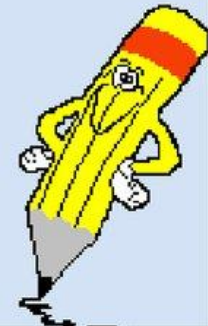
Событие $P(A \cap B \cap C)$ - все три продавца заняты одновременно.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

События А, В и С независимы.

$$P(A \cap B \cap C) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,216$$

Ответ: 0,216.



Задача 27. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение:

Здесь удобно сначала найти вероятность события «оба автомата неисправны», противоположного событию из условия задачи. Пусть

$A = \{1\text{-ый автомат неисправен}\}$

$B = \{2\text{-ой автомат неисправен}\}$

По условию $P(A) = P(B) = 0,05$.

Событие «оба автомата неисправны» – это $A \cap B$.

По формуле умножения вероятностей, его вероятность равна $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$. Значит,

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,0025 = 0,9975$$

Ответ: 0,9975

Задача 28. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

Вероятность попадания = 0,8

Вероятность промаха = $1 - 0,8 = 0,2$

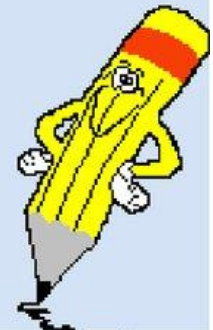
$A = \{\text{попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся}\}$

По формуле умножения вероятностей

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(A) = 0,512 \cdot 0,04 = 0,02048 \approx 0,02$$

Ответ: 0,02



Задача 29. Вероятность того, что шариковая ручка пишет плохо (или не пишет) равна 0,1. Покупатель в магазине выбирает одну такую ручку. Найдите вероятность того, что ручка пишет хорошо.

Решение:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

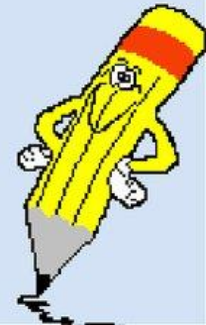
$A = \{\text{ручка пишет хорошо}\}$

Противоположное событие: $P(\bar{A}) = 0,1$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Ответ: 0,9



Задача 30. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,14. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

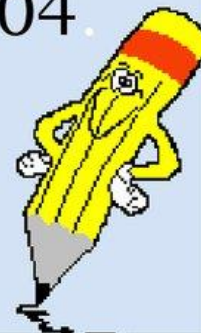
Событие A - что хотя бы одна лампа не перегорит.

Событие \bar{A} - обе лампы перегорят.

$$p(\bar{A}) = 0,14 \cdot 0,14 = 0,0196.$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0,0196 = 0,9804.$$

Ответ: 0,9804

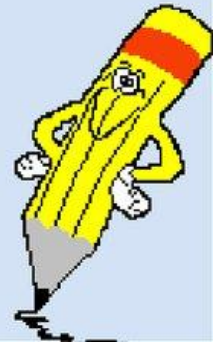


Задача 31. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение:

Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$.

Ответ: 0,8836.



Задача 32.

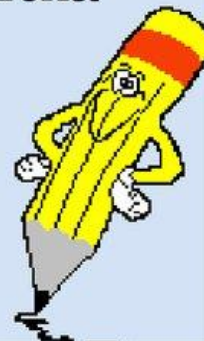
Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение:

Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число равна 0,5.

Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа равна $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

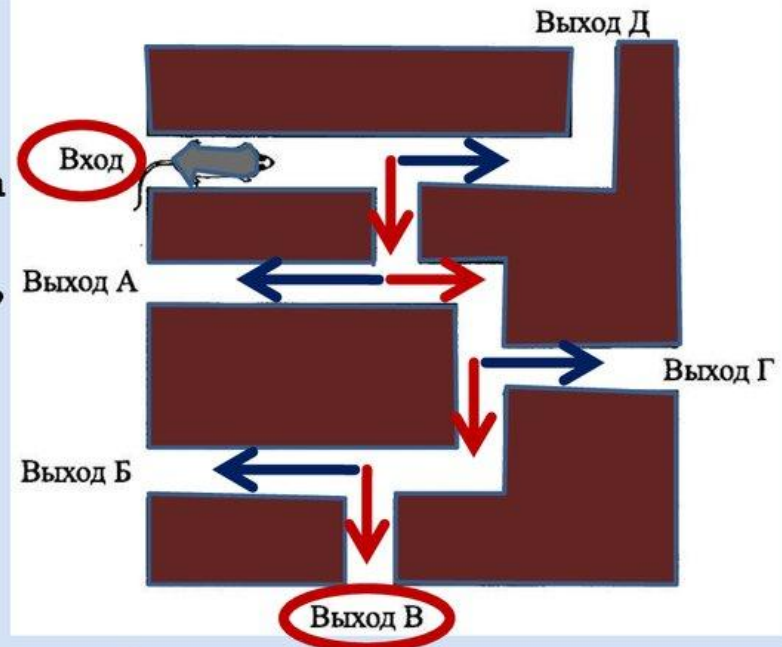
Ответ: 0,25



Задача 33. На рисунке 1 изображён лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью мышка придёт к выходу В.

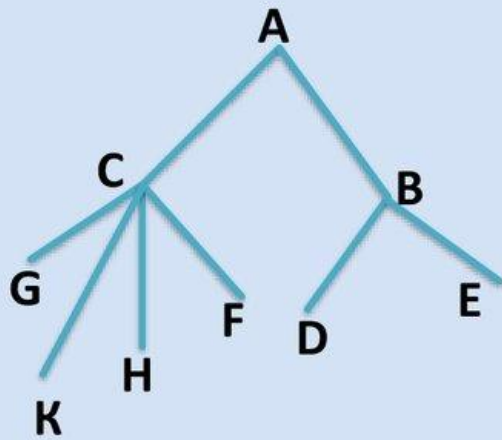
Решение:

Чтобы мышка достигла выхода **В** ей необходимо пройти четыре перекрестка и на каждом из них сделать правильный выбор, т.е двигаться по красной стрелке. Вероятность правильного выбора каждый раз равна **0,5**. Все события независимы.



$P(A) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^4 = 0,0625$ Ответ: 0,0625

Задача 34. Павел Иванович совершает прогулку из точки А по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.



Решение: Для того чтобы пенсионер пришёл в точку G, должны произойти два события: на первой развилке он должен направиться из точки А в точку С (с вероятностью $p_1 = \frac{1}{2}$), на второй развилке – из точки С в точку G (с вероятностью $p_2 = \frac{1}{4}$).

Тогда, согласно теореме умножения вероятностей, маршрут А-С-Г пенсионер выберет с вероятностью $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

Задача 35. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Хуторянка» по очереди играет с командами «Радуга», «Дружба», «Заря» и «Воля». Найдите вероятность того, что команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом только в первых двух играх.

Решение: Обозначим через A событие «команда «Хуторянка» начинает игру первой», тогда противоположное событие \bar{A} означает «команда «Хуторянка» не начинает игру первой». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0,5$. Событие C «команда «Хуторянка» будет первой владеть мячом только в первых двух играх» является произведением независимых событий $C = A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}$. По [формуле](#) умножения вероятностей независимых событий имеем: $P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$.

Ответ: 0,0625.

Задача 36. Перед началом матча по водному поло судья устанавливает мяч в центр бассейна, и от каждой команды к мячу плывёт игрок, чтобы первым завладеть мячом. Вероятность выиграть мяч у игроков равны. Команда «Русалочка» по очереди играет с командами «Наяда», «Ундина» и «Ариэль». Найдите вероятность того, что во втором матче команда «Русалочка» выигрывает мяч в начале игры, а в двух других проигрывает

Решение: Обозначим через A событие «команда «Русалочка» первой завладеет мячом», тогда противоположное событие \bar{A} означает «команда «Русалочка» не завладеет мячом». Из условия задачи следует, что вероятность $P(A) = 0,5$, тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0,5$.

Событие $C = A \cdot A \cdot \bar{A}$. По [формуле](#) умножения вероятностей независимых событий имеем:

$$P(C) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

Задачи об объединении несовместных событий.

Задача 37. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение:

$A = \{\text{вопрос на тему «Вписанная окружность»}\}$

$B = \{\text{вопрос на тему «Параллелограмм»}\}$

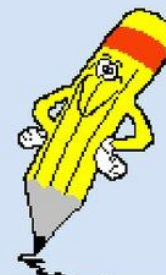
По условию $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,15$.

События A и B несовместны, т.к. нет вопросов относящихся к двум темам одновременно

Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,15 = 0,35$$

Ответ: 0,35



Задача 38. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение:

Событие A = «новый электрический чайник прослужит больше года». $P(A) = 0,98$.

Событие B = «новый электрический чайник прослужит больше двух лет». $P(B) = 0,89$.

Событие C = «новый электрический чайник прослужит меньше двух лет, но больше года».

$$A = B + C.$$

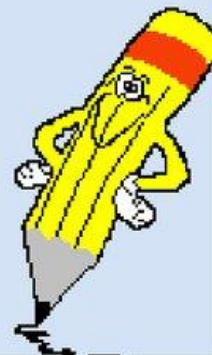
События B и C несовместны, значит,

$$P(A) = P(B) + P(C),$$

$$0,98 = 0,89 + P(C),$$

$$P(C) = 0,98 - 0,89 = 0,09$$

Ответ: 0,09.



Задача 39. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Решение:

Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 15 пассажиров»

и B = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров».

Их сумма – событие $A + B$ = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

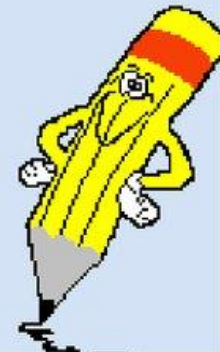
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем:

$$0,94 = 0,56 + P(B),$$

$$\text{откуда } P(B) = 0,94 - 0,56 = 0,38.$$

Ответ: 0,38.



Задача 40. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 3 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон попадёт в муху.

Задачи об объединении пересечений событий.

Решение:

Т. к. из 10 револьверов 3 пристреляны, то вероятность схватить пристрелянный револьвер равна $3/10 = 0,3$.

Вероятность схватить один из 7 непристрелянных револьверов равна

$7/10 = 0,7$. Возможны **2 случая** попадания Джоном в муху.

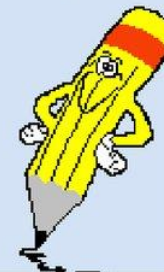
Событие $A = \text{«Джон схватит пристрелянный револьвер и попадает в муху»}$. События «Джон схватит пристрелянный револьвер» и «Джон попадёт из пристрелянного револьвера в муху» независимы, значит, $P(A) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$.

Вероятность события $B = \text{«Джон схватит непристрелянный револьвер и попадает в муху»}$ равна $P(B) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$.

События A и B несовместны (Джон не может стрелять одновременно как из пристрелянного, так и из непристрелянного револьвера). Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,24 + 0,14 = 0,38$$

Ответ 0,38.



Задача 41. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение:

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий:

A = «батарейка действительно неисправна и забракована» или

B = «батарейка исправна, но по ошибке забракована».

Решение:

Т. к. события «батарейка неисправна» и «батарейка забракована» независимы, значит, вероятность наступления события A равна:

$$P(A) = 0,02 \cdot 0,99 = 0,0198.$$

Исправную батарейку линия производит с вероятностью

$$1 - 0,02 = 0,98.$$

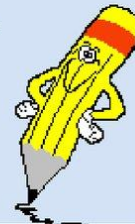
Для отбраковки исправной батарейки должны произойти два независимых события: «линия произвела исправную батарейку» и «исправная батарейка забракована». Значит, вероятность события B равна

$$P(B) = 0,98 \cdot 0,01 = 0,0098.$$

События A и B несовместны. Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,0198 + 0,0098 = 0,0296.$$

Ответ: 0,0296.



Задача 42. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение:

Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: либо после двух выигрышей (3 + 3), либо после выигрыша и ничьей (3 + 1, 1 + 3).

Так как вероятность выигрыша и проигрыша равны 0,4, то вероятность ничьей равна $1 - 0,4 - 0,4 = 0,2$.

1. Вероятность события А «команда выиграла оба матча» по формуле пересечения независимых событий равна
 $P(A) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$.

2. Вероятность события В «команда выиграла первый матч, закончила вничью второй матч» равна
 $P(B) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$.

3. Вероятность события С «команда закончила вничью первый матч, выиграла второй матч» равна
 $P(C) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

4. События А, В, С попарно несовместны, вероятность их объединения равна
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,16 + 0,08 + 0,08 = 0,32$.

Ответ: 0,32.



Задача 43. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая – 40%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая – 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

1. Вероятность купить стекло на первой фабрике равна 0,6.

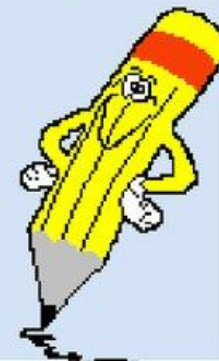
Вероятность брака в стекле первой фабрики равна 0,04. Вероятность события А «куплено бракованное стекло первой фабрики» находим по формуле для пересечения независимых событий: $P(A) = 0,6 \cdot 0,04 = 0,024$.

2. Вероятность купить стекло второй фабрики равна 0,4. Вероятность брака в стекле второй фабрики равна 0,03. Вероятность события В «куплено бракованное стекло второй фабрики» равна $P(B) = 0,4 \cdot 0,03 = 0,012$.

3. Искомая вероятность равна вероятности объединения несовместных событий А и В.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,024 + 0,012 = 0,036.$$

Ответ: 0,036.



Задачи о частоте.

Задача 44. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,05. В некотором городе из 2000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 130 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

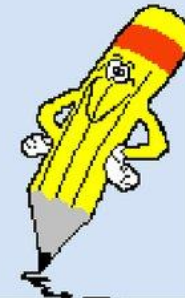
Решение:

Частота (относительная частота) события «гарантийный ремонт» равна

$$130 : 2000 = 0,065.$$

Она отличается от предсказанной вероятности на
 $0,065 - 0,05 = 0,015.$

Ответ: 0,015.



Задачи о зависимых событиях.

Задача 45. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Обозначим: $A = \{\text{кофе закончится в первом автомате}\}$
 $B = \{\text{кофе закончится во втором автомате}\}$

$A \cap B = \{\text{кофе закончится в обоих автоматах}\}$

$$P(A) = P(B) = 0,4, \quad P(A \cap B) = 0,22$$

По формуле сложения вероятностей:

$$A \cup B = \{\text{закончится хотя бы в одном}\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

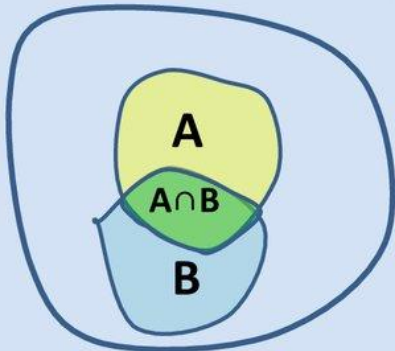
$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,4 - 0,22 = 0,58$$

Противоположным событием будет $\overline{(A \cup B)}$

«кофе останется в обоих автоматах»

Его вероятность равна $P(\overline{(A \cup B)}) = 1 - 0,58 = 0,42$

Ответ: 0,42



Задачи на проценты.

Задача 46. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 40% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение:

Пусть x – искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Пусть всего закуплено n яиц. Тогда в первом хозяйстве закуплено $x \cdot n$ яиц, из них $0,6 \cdot n$ высшей категории. Во втором хозяйстве закуплено $(1 - x) \cdot n$ яиц, из них $0,4 \cdot (1 - x) \cdot n$ высшей категории. Всего высшую категорию имеют $0,48 n$ яиц.

Отсюда: $0,6x \cdot n + 0,4 \cdot (1 - x) \cdot n = 0,48 n,$

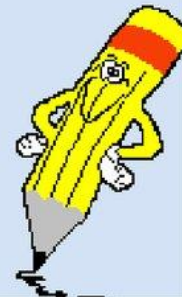
$$0,6x + 0,4 \cdot (1 - x) = 0,48 ,$$

$$0,6x + 0,4 - 0,4x = 0,48 ,$$

$$0,2x = 0,008,$$

$$x = 0,4.$$

Ответ: 0,4.



Задача 47. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение:

Пусть завод произвел x тарелок. Качественных тарелок $0,8x$ (80% от общего числа), они поступят в продажу. Дефектных тарелок $0,2x$, из них в продажу поступает 30%, то есть $0,3 \cdot 0,2x = 0,06x$.

Всего в продажу поступило $0,8x + 0,06x = 0,86x$ тарелок. Вероятность купить качественную тарелку равна:

$$\frac{0,8x}{0,86x} = \frac{40}{43} \approx 0,93$$

Ответ: 0,93.



Разные задачи.

Задача 48. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение: Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов. Вероятность промаха при первом выстреле равна $1 - 0,4 = 0,6$. Вероятность промаха при каждом последующем равна $1 - 0,6 = 0,4$. Подсчитаем число выстрелов, при котором цель остаётся непоражённой с вероятностью менее $1 - 0,98 = 0,02$. События независимы, поэтому имеем: $P(1) = 1 - 0,4 = 0,6$;

$$P(2) = P(1) \cdot 0,4 = 0,24;$$

$$P(3) = P(2) \cdot 0,4 = 0,096;$$

$$P(4) = P(3) \cdot 0,4 = 0,0384;$$

$$P(5) = P(4) \cdot 0,4 = 0,01536.$$

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Ответ: 5.



Задача 48. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98? (2 способ решения)

Решение: Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить её при первом или втором или n выстреле.

Будем вычислять вероятность уничтожения при n выстреле, задавая значения n=1,2,3, и суммируя полученные вероятности.

$$n=1 \quad P=0,4 \quad S=0,4$$

$$n=2 \quad P=0,6 \cdot 0,6=0,36 \quad \text{- при первом выстреле промах, при втором цель уничтожена} \quad S=0,4+0,36=0,76$$

$$n=3 \quad P=0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,144 \quad \text{- цель уничтожена при третьем выстреле} \\ S=0,76+0,144=0,904$$

$$n=4 \quad P=0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,0576 \quad \text{- при 4-м} \\ S=0,904+0,0576=0,9616$$

$$n=5 \quad P=0,6 \cdot 0,43 \cdot 0,6 = 0,02304$$

$$S=0,9616+0,02304=0,98464 \quad \text{- достигли нужной вероятности при } n=5.$$

Ответ: 5.

Задача 49. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение: Вероятность того, что З. не сможет набрать 70 баллов ни по иностранному языку, ни по обществознанию равна

$$(1 - 0,7) \cdot (1 - 0,5) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \text{ (события независимые).}$$

Значит, хотя бы по одному из этих предметов он получит 70 баллов с вероятностью $1 - 0,15 = 0,85$. Для поступления нужно набрать требуемый балл по математике, русскому языку и хотя бы по одному предмету из иностранного языка и обществознания.

$$\text{Вероятность поступления равна } 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,408.$$

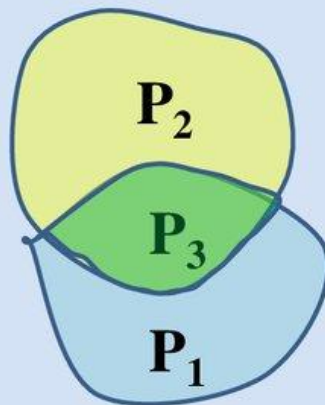
Ответ: 0,408.

Задача 50. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.



Вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику равна

$$P_1 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336.$$

Вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию равна $P_2 = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,24$.

Вероятность успешно сдать экзамены на обе специальности равна

$$P_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,168.$$

Вероятность успешной сдачи хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей равна

$$P = P_1 + P_2 - P_3 = 0,408.$$

Ответ: 0,408.

Задача 51. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение:

Вероятность наступления хорошей погоды по условию равна 0,8, тогда вероятность наступления отличной погоды равна $1 - 0,8 = 0,2$.

Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х – хорошая, О – отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(\text{ХХО}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128;$$

$$P(\text{ХОХ}) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128;$$

$$P(\text{ООО}) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008;$$

$$P(\text{ОХХ}) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\text{ХХО}) + P(\text{ХОХ}) + P(\text{ОХО}) + P(\text{ООО}) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.$$

Ответ: 0,392.

II способ решения.

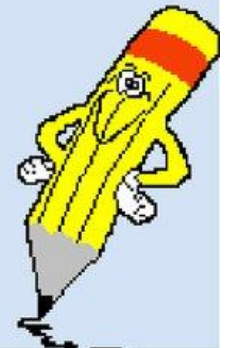
Задача 51. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение: Составим таблицу вероятностей для погоды в Волшебной стране.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Погода 12 марта с вероятностью 0,9 останется хорошей, с вероятностью 0,1 станет отличной. Заносим в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9		
отличная	0	0,1		



Хорошая погода 13 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 12 марта была хорошей и не изменилась.

Вероятность $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

2) Погода 12 марта была отличной и изменилась.

Вероятность $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

Значит, вероятность хорошей погоды 13 марта равна $0,81 + 0,01 = 0,82$.

Вероятность отличной погоды 13 марта равна $1 - 0,82 = 0,18$.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	

Отличная погода 14 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 13 марта была хорошей и изменилась.

Вероятность $0,82 \cdot 0,1 = 0,082$.

2) Погода 13 марта была отличной и не изменилась.

Вероятность $0,18 \cdot 0,9 = 0,162$.

Значит, вероятность отличной погоды 14 марта равна $0,082 + 0,162 = 0,244$.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Ответ: 0,244.

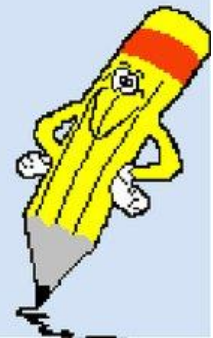


Задача 52. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 66,99 мм, или больше, чем 67,01 мм.

Решение:

По условию, диаметр подшипника будет находиться в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна
 $1 - 0,965 = 0,035$.

Ответ: 0,035.



Задача 53. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение:

Рассмотрим события $A = \text{«учащийся решит 11 задач»}$ и $B = \text{«учащийся решит больше 11 задач»}$.

Их сумма – событие $A + B = \text{«учащийся решит больше 10 задач»}$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

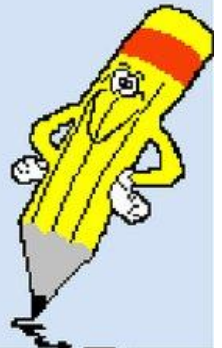
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем:

$$0,74 = P(A) + 0,67,$$

откуда $P(A) = 0,74 - 0,67 = 0,07$.

Ответ: 0,07.



Задача 54. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет - магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение:

Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна:

$$P(A) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна:

$$P(B) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Ответ: 0,02.



Задача 55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение:

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам:

- а) пациент болеет гепатитом, его анализ верен;
- б) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен.

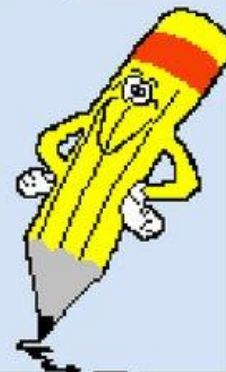
Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045,$$

$$P(B) = 0,01 \cdot 0,95 = 0,0095,$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545.$$

Ответ: 0,0545.



Задача 56. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение:

Рассмотрим все способы расположения 4 монет по рублю и 2 монеты по 2 рубля в карманах Пети:

Условию задачи удовлетворяют ситуации №1, №3, №6, №7.

Вычислим вероятность наступления каждого из этих событий.

1) Вычислим вероятность наступления 1-го события, т. е. что Петя подряд возьмёт 3 монеты по 1 рублю. Данная вероятность будет находиться как произведение вероятностей, что 1-ую монету Петя возьмёт достоинством в 1 рубль, 2-ую монету достоинством в 1 рубль и 3-ью монету достоинством в 1 рубль .

№ ситуации	1 карман	2 карман
1	111	122, 212, 221
2	112	112, 121, 211
3	122	111
4	121	211, 121, 112
5	211	121, 211, 112
6	212	111
7	221	111

Решение:

1-ая монета в 1 рубль, вероятность равна - $\frac{4}{6}$
 (4 монеты по 1 рублю из шести монет)

2-ая монета в 1 рубль, вероятность равна - $\frac{3}{5}$
 (осталось 5 монет, а по 1 рублю - 3 монеты)

3-ья монета в 1 рубль, вероятность равна - $\frac{2}{4}$
 (осталось 4 монеты, а по 1 рублю - 2 монеты)

Значит, вероятность наступления 1 - го события $p_1 = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$

2) Вычислим вероятность наступления 2-го события, когда Петя захватил сразу две монеты по 2 рубля, то есть ситуации № 3, 6, 7.

Ситуация № 3: 1 2 2.

1-ая монета в 1 рубль, вероятность равна - $\frac{4}{6}$

2-ая монета в 2 рубля, вероятность равна - $\frac{2}{5}$
 (осталось 5 монет, а по 2 рубля - 2 монеты)

3-ья монета в 2 рубля, вероятность равна - $\frac{1}{4}$
 (осталось 4 монеты, а по 2 рубля - 1 монета)

Значит, $P(\text{№}3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$



Аналогично рассуждая, находим:

Ситуация № 6: 2 1 2. $P(\text{№}6) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$

Ситуация № 7: 2 2 1. $P(\text{№}7) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$

Значит, вероятность наступления 2 - го события

$$p_2 = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = 0,2.$$

3) События 1 и 2 несовместны. Искомая вероятность равна

$$p = p_1 + p_2 = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Ответ: 0,4.



Задача 57. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты окажутся в разных карманах.

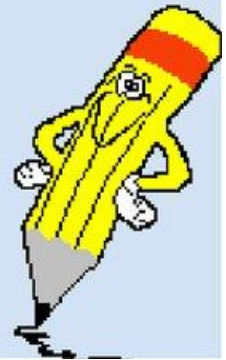
Решение:

Если монеты по 5 рублей окажутся в одном кармане, то три десятирублевые монеты должны оказаться тоже в одном кармане.

Найдем вероятность того, что десятирублевые окажутся в одном кармане:

$$\text{Карманов } 2, \text{ то } P = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 0,6.



Учебно-мет одический комплекс

1. Программа по математике для общеобразовательных учреждений, сост. Т.А. Бурмистрова, М., Просвещение, 2009
2. Учебник по алгебре 9 класс, авт.Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др., М., Просвещение, 2009
3. Элементы статистики и вероятность 7-9, авт. М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М., Просвещение, 2006
4. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей, авт. В.Н. Студенецкая
5. Сборник для подготовки к ГИА, авт. Яценко, Шестаков, М., МИОО, 2012
6. Сборник для подготовки к ГИА, авт. Лаппо, М., МИОО, 2012
7. Контрольно-измерительные материалы по алгебре 9 класс, сост. Л.Ю. Бабошкина, М., ВАКО, 2010

Используемые ресурсы:

«Математика» 1 сентября №1 2012г И.Р. Высоцкий «В10 –вероятность»

А.Л.Семенов, И.В.Яценко «ЕГЭ 2012. Типовые тестовые задания»

А.Л. Семёнов, И.В.Яценко

«ЕГЭ-2012. Математика. Типовые варианты. 30 вариантов»

И.Р. Высоцкий, Яценко

«ЕГЭ 2012. Математика. Задача В10. Рабочая тетрадь»

Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

«Математика. Элементы теории вероятностей и статистики.

Подготовка к ЕГЭ-2012»

<http://math-ege.ru/ege/Main>

<http://ege2012.mio.ru/f1112/ege111207m/index.htm>

<http://alexlarin.net/ege/2012/turnir02122011.html>

<http://www.bardov.com/>

<http://reshuege.ru/>