

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**  
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Кафедра «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов»**

**Дисциплина «Механика композиционных материалов»**

# **Лекция 1.2. Три секрета прочности волокнистых композитов.**

**Лектор:**  
д.т.н., профессор  
Полилов А.Н.

# **ТРИ СЕКРЕТА ПРОЧНОСТИ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ**

# План лекции №1.2:

- 1.2.1. Первый секрет – масштабный эффект прочности волокон.
- 1.2.2. Второй секрет – остановка трещины поверхностью раздела.
- 1.2.3. Третий секрет – статистический характер прочности волокон.
- 1.2.4. О линейной механике разрушения.
- 1.2.5. Об асимптотическом решении задачи про остановку трещины поверхностью раздела.
- 1.3.6. О роли касательных напряжений и оптимальных (равнопрочных) свойствах волокнистых композитов.
- 1.2.7. О распределении Вейбулла.



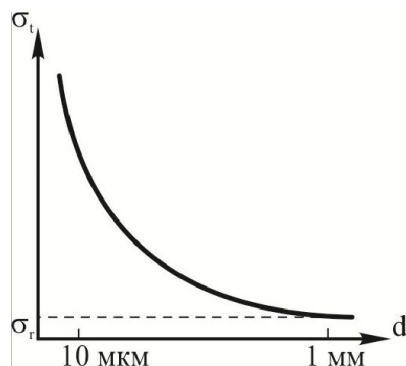
# Три секрета прочности волокнистых композитов

## Первый секрет - масштабный эффект прочности волокон

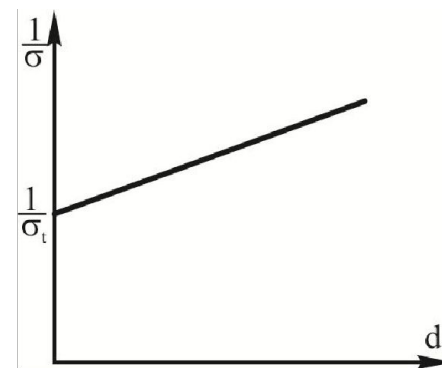
Оценка прочности, полученная Гриффитсом  $\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{l}}$

$\gamma$  - удельная работа разрушения,

$l \approx \frac{1}{2}d$  - длина дефекта



а)



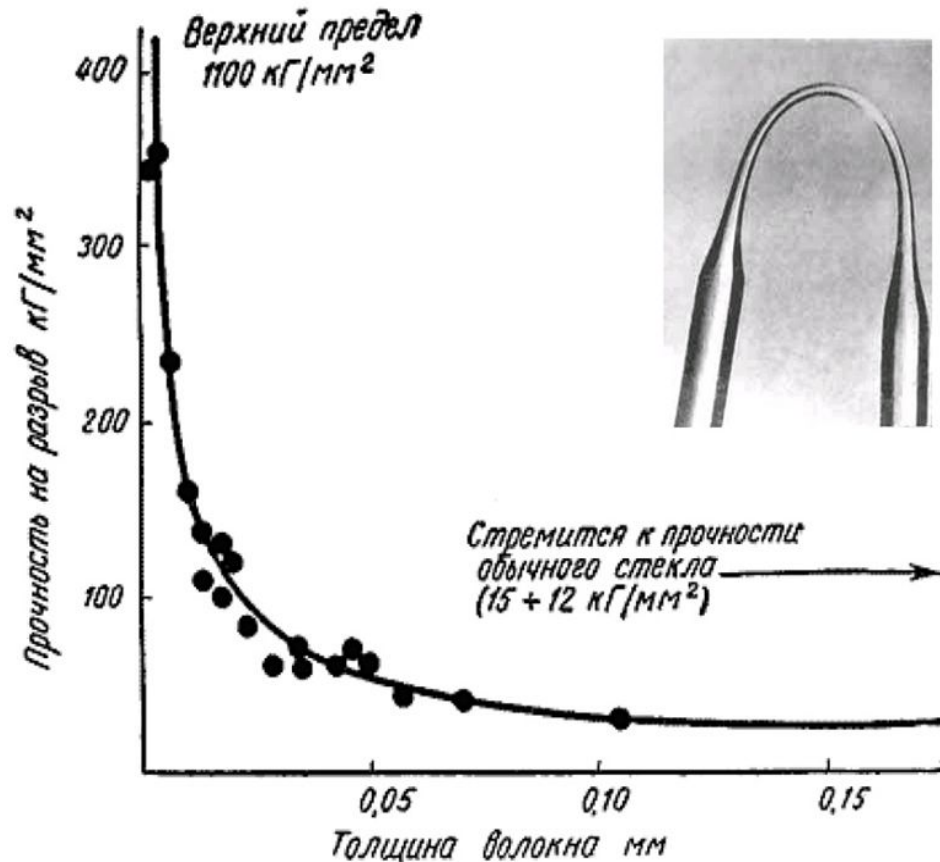
б)

Зависимости прочности – (а) и её обратной величины – (б) от диаметра волокна

# Масштабный эффект (Scale effect)

«РОЛЬ ВОЛОКОН»

Эксперимент Гриффитса со стеклянными волокнами (1911 г.)





# Теория Гриффитса-Ирвина

**Алан Арнольд Гриффитс  
(1893-1963) – A.A.Griffith**

**1. Механика разрушения**

- Теоретическая прочность, концентрация напряжений

**2. Механика композитов**

- Прочность тонких бездефектных волокон
- Стекло: пузырьки - давление, волокна – эластика Эйлера, испытания петель.

# Энергетический критерий Гриффитса

$$G = \frac{dU}{dS} = G_c$$

$$G = \left[ \frac{\text{КГ}}{\text{ММ}} \right] \leftrightarrow \left[ \frac{\text{Н}}{\text{М}} \right]$$

$G$  – удельная работа разрушения, т.е. энергия необходимая для образования единицы поверхности

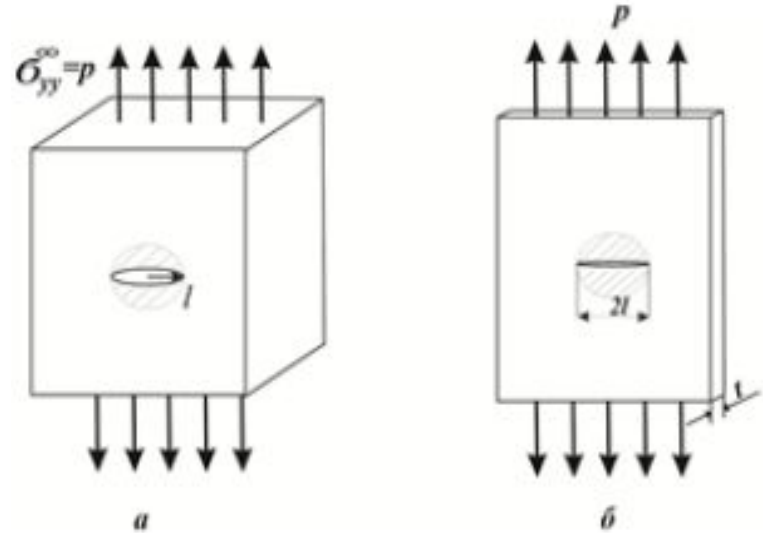
$dU$  – затраченная работа

$dS$  – площадь трещины

$G_c$  – критическая скорость высвобождения энергии

Энергетический критерий в упрощенном виде (без учета диссипации энергии и динамических эффектов):

$$-dU = 2\gamma dS.$$



Схемы трещин в растягиваемых: трехмерном теле – а и в пластине – б



Общая накопленная упругая энергия:

$$U = \sigma^2 (V - k_0 l^3) / (2E)$$

Изменение упругой энергии:

$$dS = 2\pi l dl \rightarrow$$

$$dU = -3\sigma^2 k_0 l^2 dl / (2E)$$

$$-dU = 2\gamma dS \rightarrow$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{EG_c}{k_1 l}}; \quad k_1 = \frac{3k_0}{4\pi} (1 - \nu^2)$$

Качественный результат для пластины толщиной  $t$  ( $=1$ ) со сквозной трещиной длиной  $2l$ :

$$U = \sigma^2 (V - k_2 t l^2) / (2E);$$

$$dU = -\sigma^2 t k_2 l dl / E; \quad dS = t dl;$$

$$-dU / dS = G_c \Rightarrow \sigma^* = \sqrt{EG_c / (k_2 l)}.$$

Для сквозной трещины в широкой пластинке в условиях плоского напряженного состояния:

$$\sigma^* = \sqrt{2EG_c / (\pi l)}$$

Для плоской деформации:

$$\sigma^* = \sqrt{2EG_c / [(1 - \nu^2)\pi l]}.$$

# 1.2.4. О линейной механике разрушения

Общая накопленная упругая энергия:

Изменение упругой энергии:

$$U = \sigma^2 (V - k_0 l^3) / (2E)$$

$$dU = -3\sigma^2 k l^2 dl / (2E)$$

$$U = \sigma^2 (V - k_1 h l^2) / (2E);$$

$$dU = -2\sigma^2 h k_1 l dl / (2E); \quad dS = 2h dl;$$

$$dU / dS = \gamma \Rightarrow \sigma \propto \sqrt{k E \gamma / l}.$$

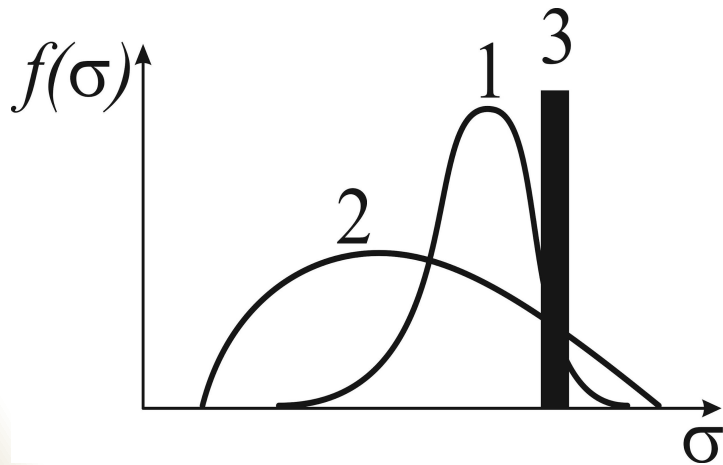
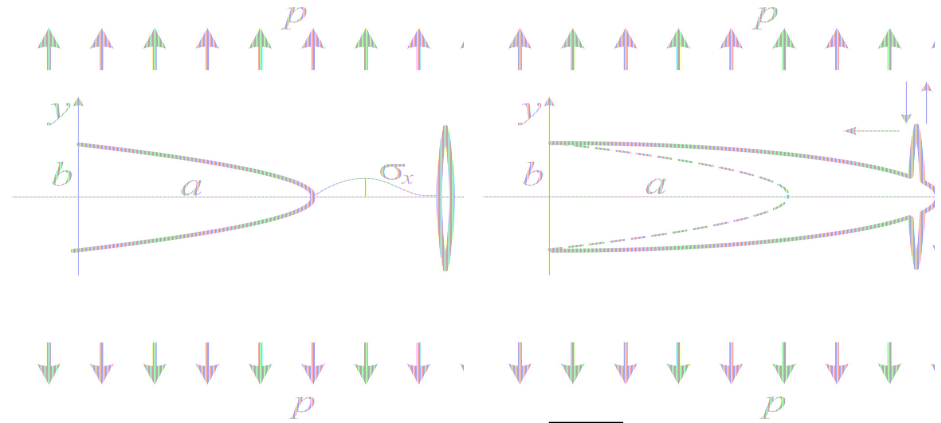
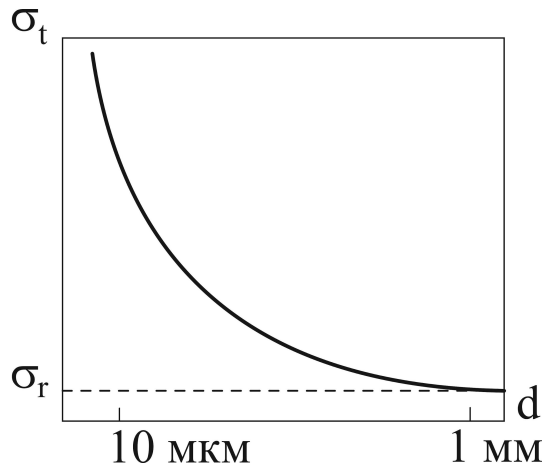
**ТРИ СЕКРЕТА ПРОЧНОСТИ  
ВОЛОКНИСТЫХ  
КОМПОЗИТОВ**

**2-й секрет**

**Торможение (остановка,  
задержание, стопорение)  
трещины поверхностью  
раздела**

**Crack arrest by weak interface**

# Три секрета прочности КОМПОЗИТОВ



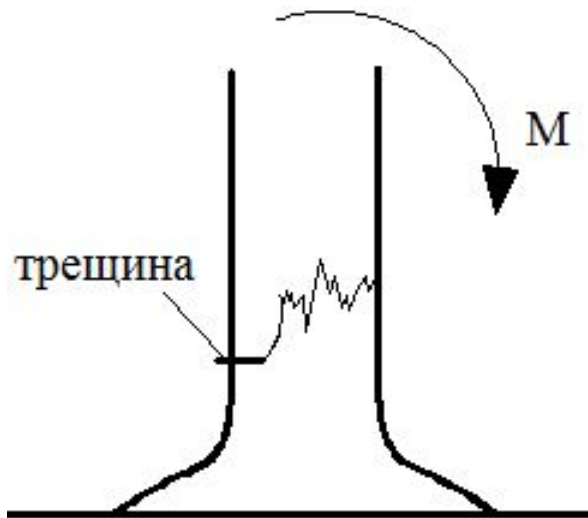
$$\lim_{b/a \rightarrow 0} K_\sigma = 1 + 2\sqrt{\frac{f}{\rho}} = 1,82$$



# Торможение трещины поверхностью раздела

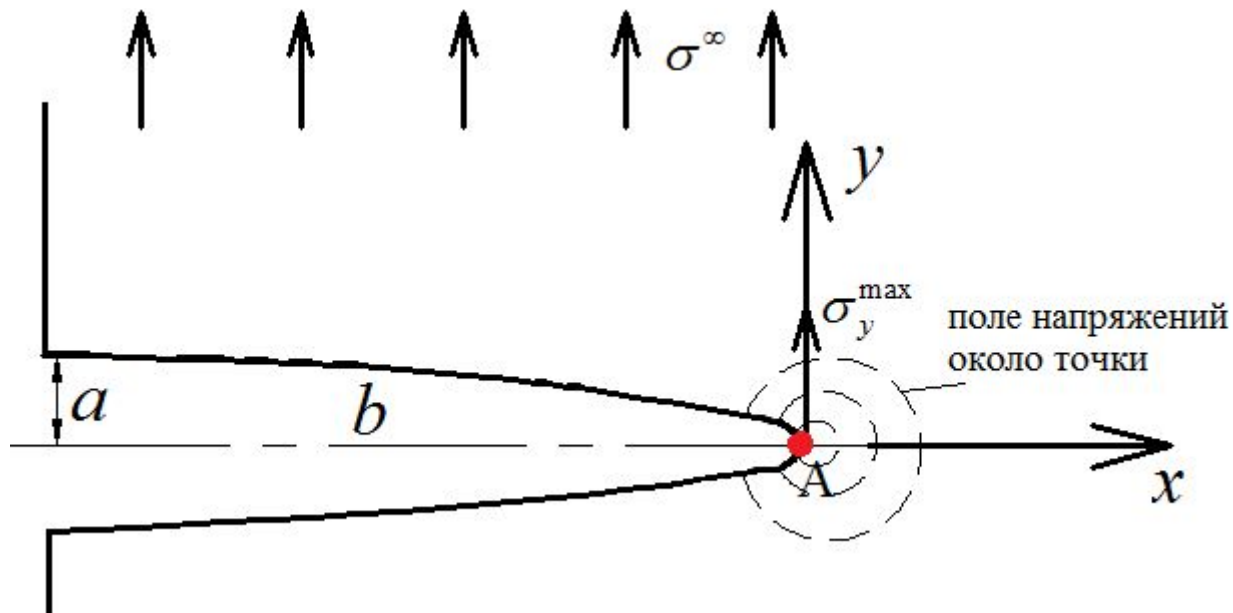
*Причина нехрупкости композитов при растяжении вдоль волокон заключается в наличии около кончика трещины сложного напряжённого состояния, которое вызывает расщепление, тормозящее развитие трещины.*

## *Торможение трещины поверхностью раздела.*



В биологических конструкциях из-за слоистости материала роста трещины не происходит.

Материал существенно неоднородный и имеет слабые направления.



# Торможение трещины поверхностью раздела

Причина нехрупкости композитов при растяжении вдоль волокон заключается в наличии около кончика трещины сложного напряженного состояния, которое вызывает расщепление, тормозящее развитие трещины.

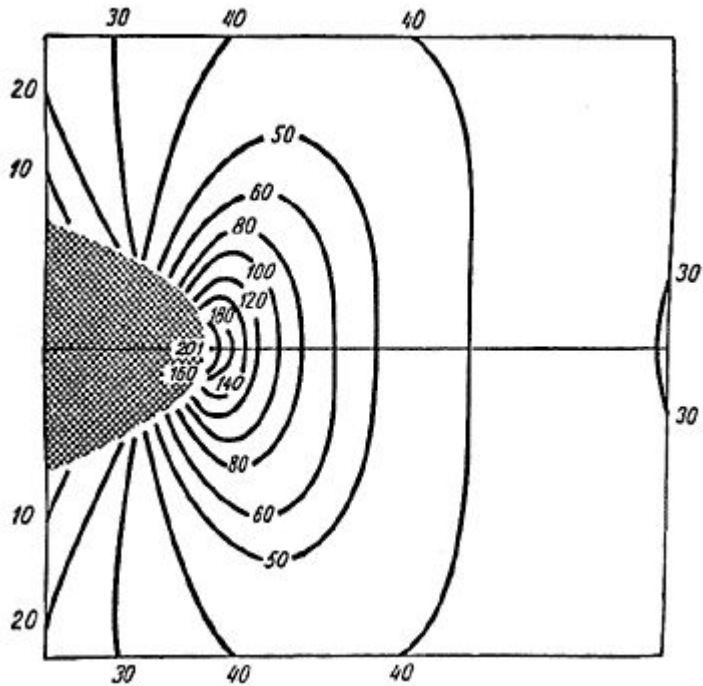


Рис.3 Распределение  $\sigma_x$

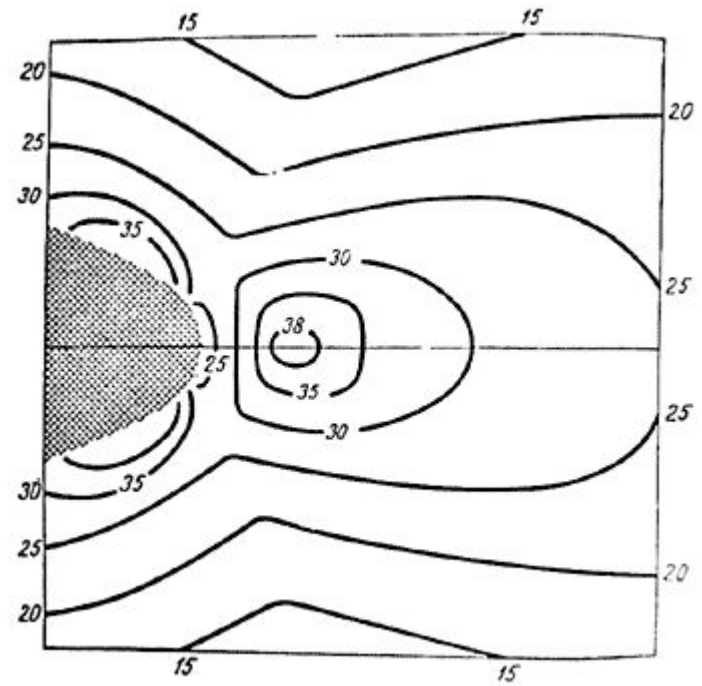
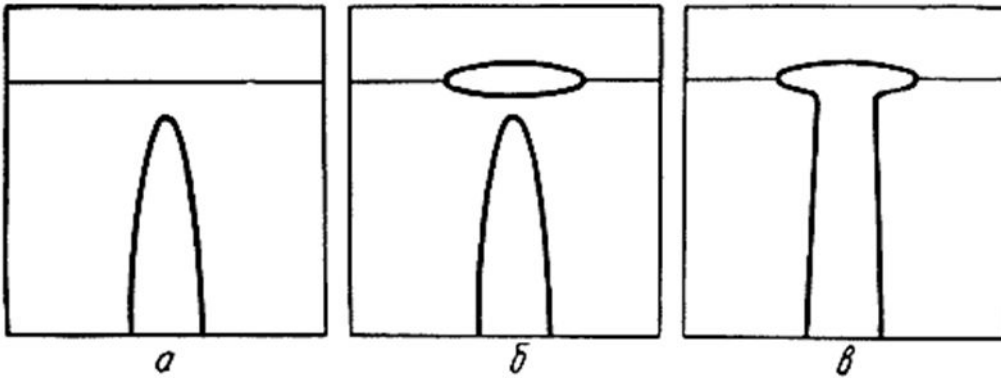


Рис.4 Распределение  $\sigma_y$



Механизм торможения (схематически)

$$\frac{\sigma_{x0}^*}{\sigma_y^*} = \frac{t\beta_1\beta_2}{(t^{4/3} + t^{2/3} + 1)}, \text{ где } t = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

В изотропном случае  $\frac{1}{3\sqrt{3}} = 0.192$

Для наибольших напряжений на контуре:

$$\frac{\sigma_{x0}^*}{\sigma_y^*} = \frac{\beta_1^2}{(t+1)^2}; \frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = 3\sqrt{\frac{3}{2}t\beta_1(A+2B)^{-1}(A-B)^{-1/2}},$$

где  $B = (t^2 + 1), A = (B^2 + 12t^2)^{1/2}$



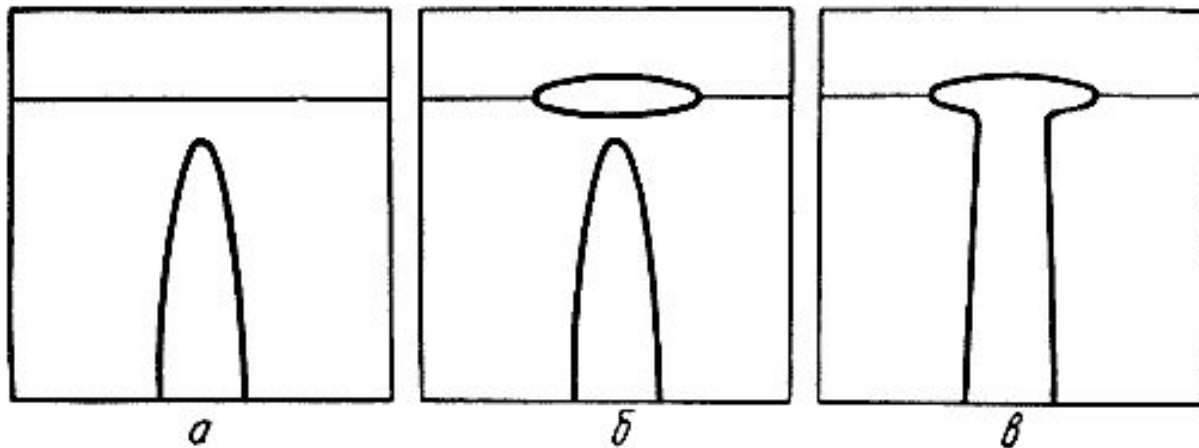
Микроснимки картин роста трещины в слюде: когда трещина упирается в границу слоев – слева, и когда трещина проходит вдоль слоев – справа.  
Прочность слева в 20 раз выше.



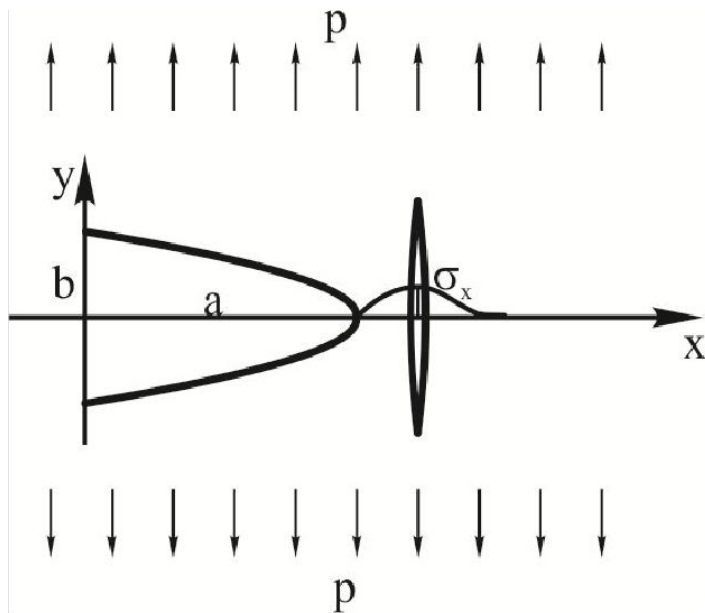
# Торможение трещины поверхностью раздела

Гордоном и Куком было сделано два допущения: считалось, что кончик трещины имеет очертания эллипса или круга; предполагалось, что материал ведет себя как сплошное упругое тело.

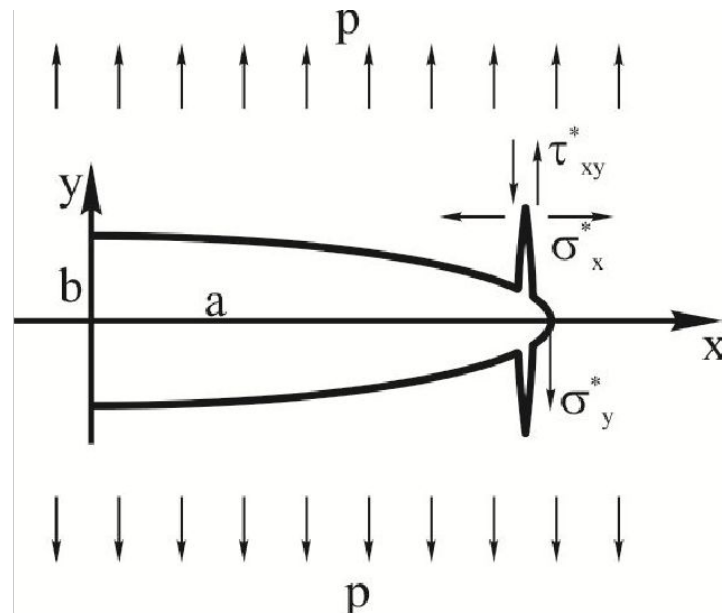
Здесь и становятся важными внутренние поверхности в биологических материалах. Важно то, что эти поверхности раздела обычно слабее окружающего их материала.



Механизм торможения трещины по Куку-Гордону. а - трещина приближается к слабой поверхности; б - поверхность перед трещиной разрушается; в - Т-образный тормоз для трещины. На практике трещина обычно отклоняется



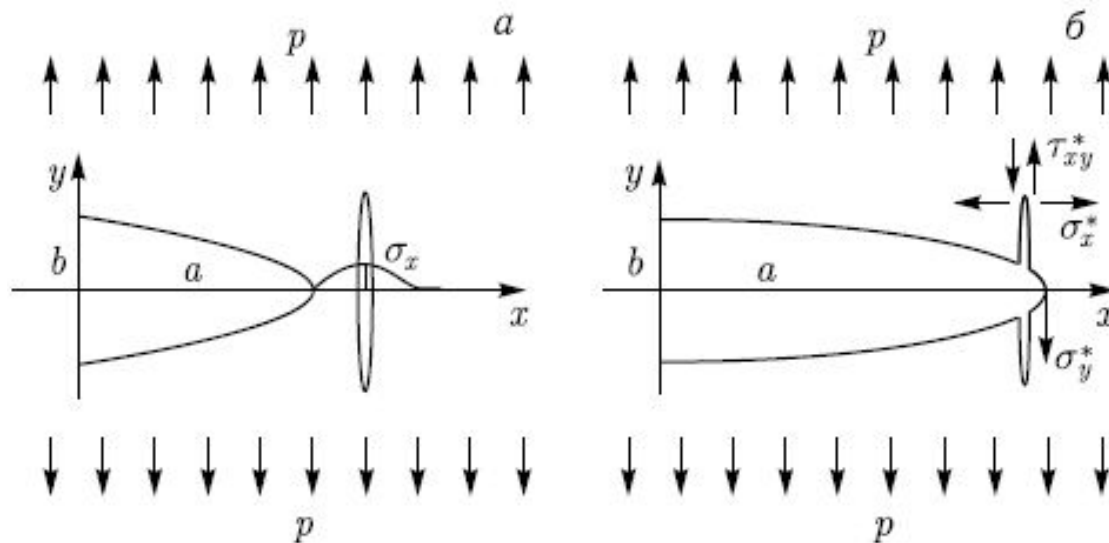
a)



б)

*Схемы остановки трещины поверхностью раздела:  
 а) по Гордону – расщепление перед трещиной;  
 б) уточненная схема – расщепление на контуре*

## Второй секрет — остановка трещины поверхностью раздела

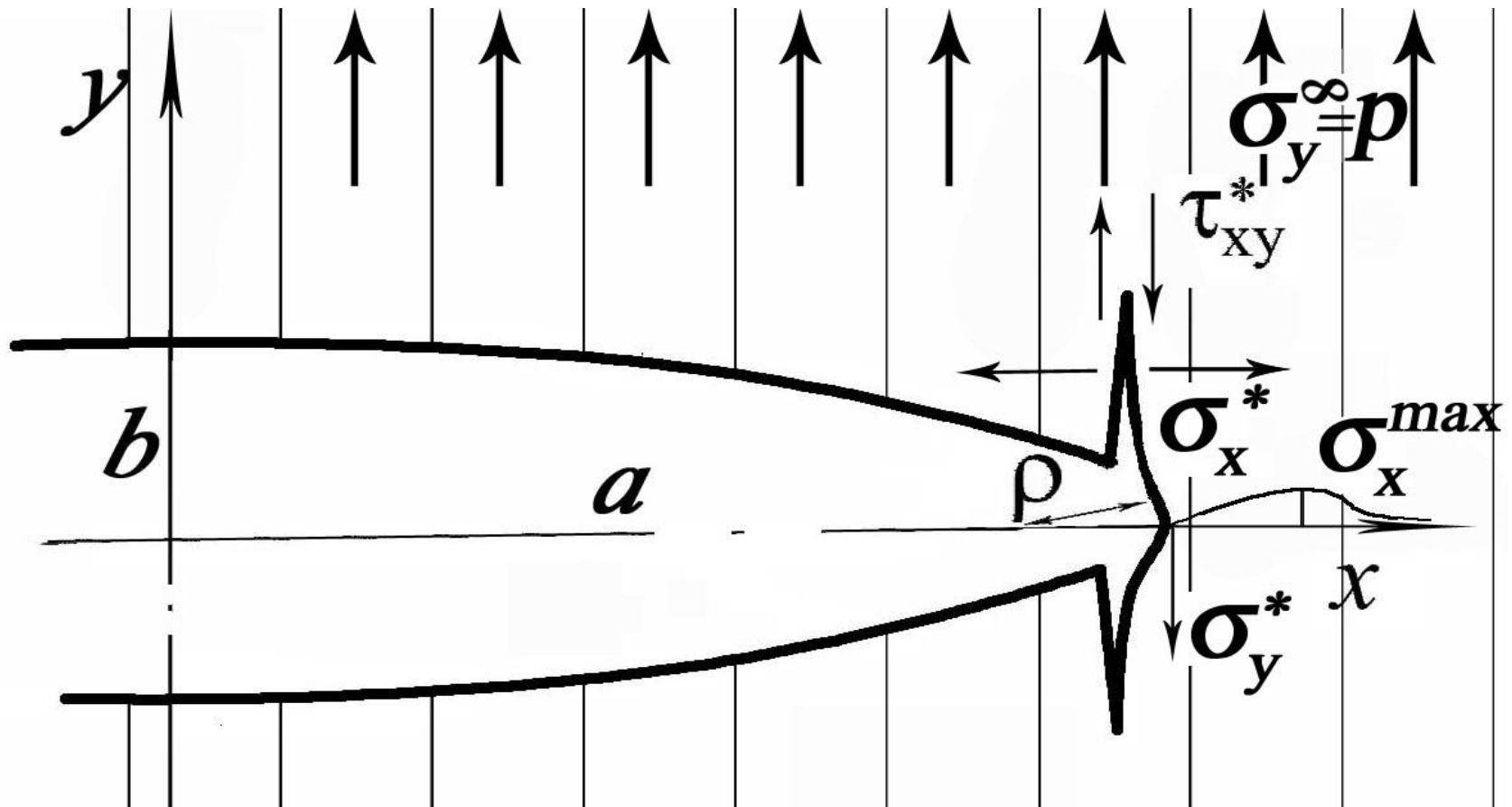


Схемы остановки трещины поверхностью раздела: а) по Гордону — расщепление перед трещиной; б) уточненная схема — расщепление на контуре

$$K_t = \frac{\sigma_y^*}{p} = 1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2) a}{\beta_1 \beta_2 b}$$

*Второй секрет – нехрупкость. Торможение трещины границей раздела.*

*Mechanism of crack arrest by weak interface*



Максимальное  
значение

напряжений перед кончиком  
трещины при  $y=0$ ,

$$\sigma_{xx}^+$$

$$x^2 = a^2 + b^2 \beta_1^{2/3} \beta_2^{2/3} (\beta_1^{2/3} + \beta_2^{2/3})$$

выражается  
формулой

$$\sigma_{xx}^{+0} = t(\beta_1 + \beta_2)(t^{4/3} + t^{2/3} + 1)^{2/3}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_{xx}^+}{\sigma_{yy}^*} = \frac{t\beta_1\beta_2}{(t^{4/3} + t^{2/3} + 1)^{3/2}}$$

$$\sigma_{xx}^* / \sigma_{yy}^* = \beta_1\beta_2 t p (1 + t^2) > \sigma_{xx}^+ / \sigma_{yy}^* (= 1/4 \quad = 1)$$

## 1.2.6. О роли касательных напряжений и оптимальных (равнопрочных) свойствах волокнистых композитов

Условие равнопрочности:

$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = \frac{\tau}{\sigma_v}$$

Для эллиптических отверстий в изотропном случае:

$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = \left\{ \begin{array}{l} \text{пр22} \\ \text{пр20} \\ \text{пр25} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} a \times b \\ a = b \\ a \times b \end{array} \right\}$$



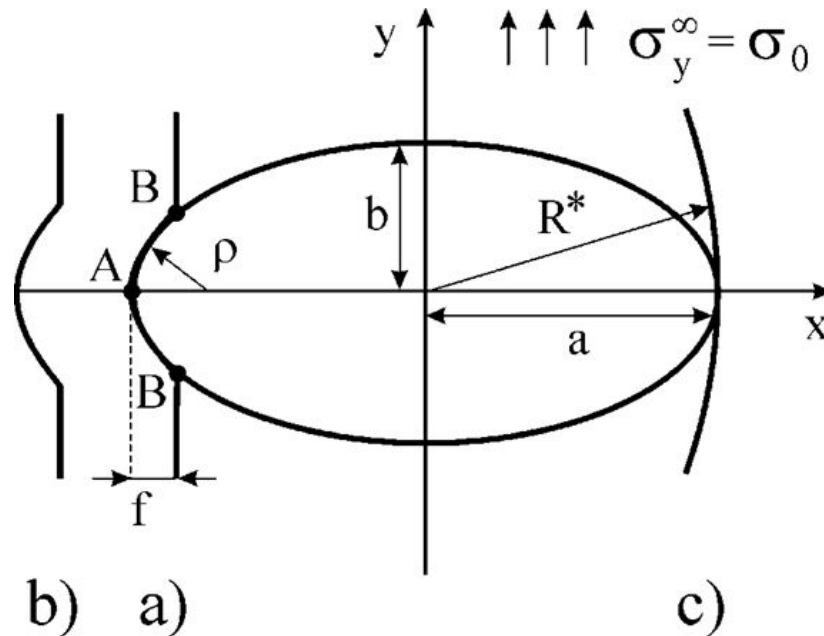
# 1.2.2. Второй секрет - остановка трещины поверхностью раздела

$K_t = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_y^\infty} = 1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \frac{a}{b}$  - теоретический коэффициент концентрации напряжений

$\beta_1 = \beta_2 = 1$  - для изотропного материала  $\varepsilon = \frac{b}{a}$

$K_\sigma = \frac{\sigma_{эл}}{\sigma_{тп}}$  - эффективный коэффициент концентрации напряжений

Но  $K_\sigma < K_t$  всегда



$$\sigma_{yy}^{\infty} = p$$

$$\sigma_{xx} = -2 \operatorname{Re} \left[ \beta_1^2 \Phi_1(z_1) + \beta_2^2 \Phi_2(z_2) \right]$$

$$\sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) \right]$$

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Im} \left[ \beta_1 \Phi_1(z_1) + \beta_2 \Phi_2(z_2) \right]$$

Где:

$$z_{1,2} = x + i\beta_{1,2}y$$

$$\Phi_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \frac{\beta_{2,1}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{1}{a - \beta_{1,2}b} \left[ \frac{z_{1,2}}{\sqrt{z_{1,2}^2 - a^2 + \beta_{1,2}^2 b^2}} - 1 \right]$$

$$\beta_{1,2} = 2^{-1/2} \left[ (E_x / G_{xy} + 2\nu_{yx} \pm \sqrt{(E_x / G_{xy} - 2\nu_{yx})^2 - 4E_x / E_y}) \right]^{1/2}$$



# Задержка трещины поверхностью раздела

$$\sigma_x = -2 \operatorname{Re}(\beta_1^2 \Phi_1(z_1) + \beta_2^2 \Phi_2(z_2))$$

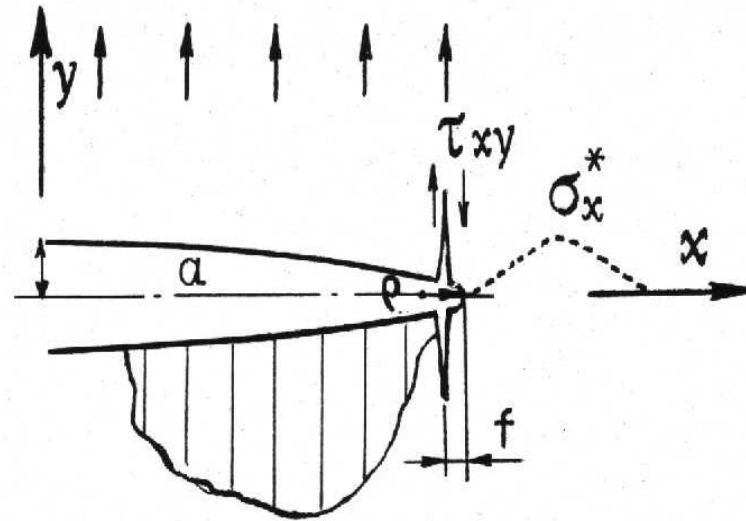
$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}(\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2))$$

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Im}(\beta_1 \Phi_1(z_1) + \beta_2 \Phi_2(z_2))$$

$$z_{1,2} = x + i\beta_{1,2}y$$

$$\Phi_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \frac{\beta_{2,1}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{1}{a - \beta_{1,2}b} \left[ \frac{z_{1,2}}{\sqrt{z_{1,2}^2 - a^2 + \beta_{1,2}^2 b^2}} - 1 \right]$$

$$\beta_{1,2} = 2^{-1/2} \left[ (E_x / G_{xy} + 2\nu_{yx} \pm \sqrt{(E_x / G_{xy} - 2\nu_{yx})^2 - 4E_x / E_y}) \right]^{1/2}$$



$$z = a \cos \alpha + i b \sin \alpha, \quad b/a = \varepsilon \ll 1, \quad \cos^2 \alpha = 1 - k\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

# 1.2.5. Об асимптотическом решении задачи про остановку трещины поверхностью раздела

$$\sigma_{xx} = (p/\varepsilon)A_{xx}k_{xx}^p + (s/\varepsilon)B_{xx}k_{xx}^s\sqrt{k_{xx}^s};$$

$$\sigma_{yy} = (p/\varepsilon)A_{yy} + (s/\varepsilon)B_{yy}\sqrt{k_{yy}^s};$$

$$\tau_{xy} = (p/\varepsilon)A_{xy}\sqrt{k_{xy}^p} + (s/\varepsilon)B_{xy}k_{xy}^s;$$

$$A_{ij} = \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{(k_{ij} + \beta_1^2)(k_{ij} + \beta_2^2)};$$

$$B_{ij} = \frac{A_{ij}}{\beta_1\beta_2}; \quad ij = xx, yy, xy.$$

Надо сравнивать наибольшие напряжения на контуре:

$$\sigma_x^* \text{ при } t = \beta_1^2 / (1 + \beta_1^2)^2 (= \frac{1}{4}) \quad (\text{при } t = \beta_1^2) \quad \sigma_x^+ \quad \sigma_y^* = \frac{1}{5} \quad t =$$

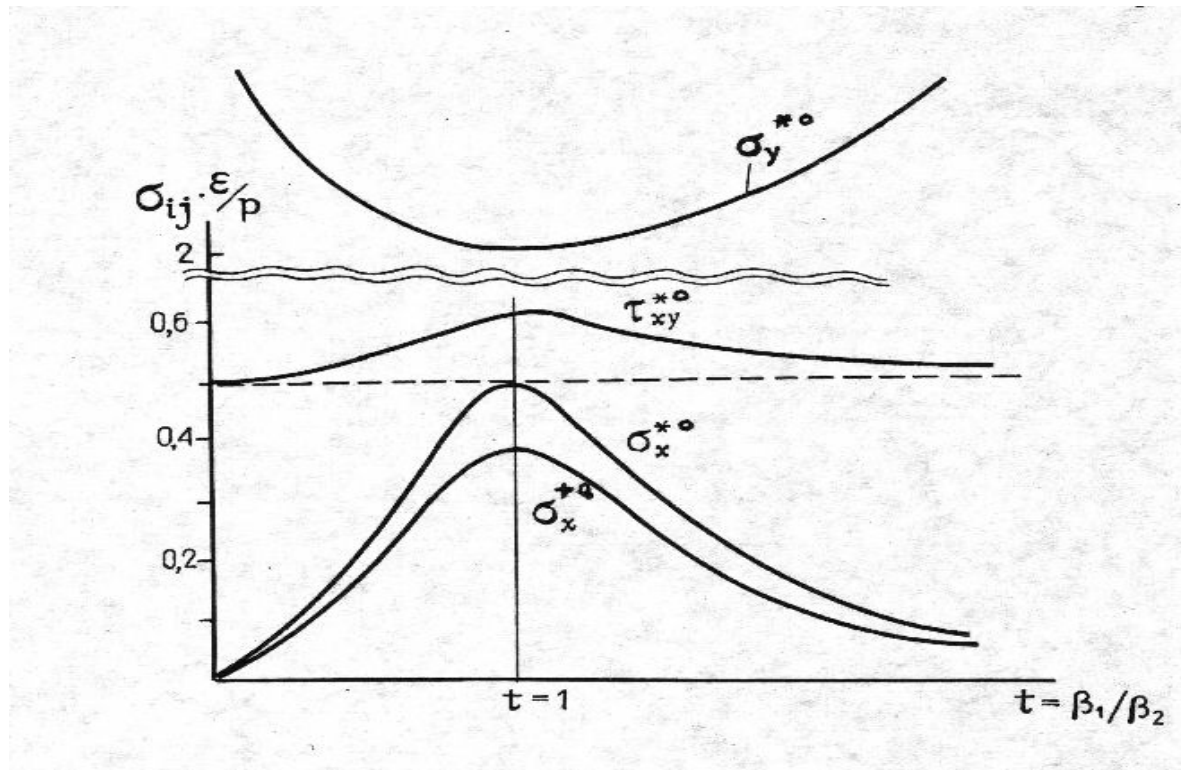


*«Оптимальные прочностные свойства  
волокон и матрицы в условиях  
концентрации напряжений.»*

*Для ортотропного материала  
зависимость от формы отверстия.*

*В пределе при*

$$\beta_2 \rightarrow 0, \tau_{xy}^* \rightarrow \frac{P a}{2 b}; \frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} \rightarrow 1/2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^{-1}$$



Зависимости наибольших напряжений около эллиптической трещины от степени анизотропии материала.

*Оптимальные прочностные свойства  
волокон и матрицы в условиях  
концентрации напряжений.*

*Вывод об основной роли касательных  
напряжений в возникновении  
расщепления позволяет  
сформулировать условие  
равнопрочности в виде.*

$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_{\varphi y}^*} = \frac{\tau}{\sigma}$$

# Критерий “оптимальности” (равнопрочности) в условиях концентрации напряжений

$$\frac{\sigma_{n1} + m_1 \tau_{n1}}{c_1} = \frac{\sigma_{n2} + m_2 \tau_{n2}}{c_2}$$

либо отношение max напряжений равно отношению прочностей:

$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = \frac{[\tau]}{[\sigma_\sigma]}$$
$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = \left\{ \begin{array}{l} 0.32 \text{ при } a \gg b \\ 0.29 \text{ при } a = b \\ 0.25 \text{ при } a \ll b \\ 0.29 \text{ при } a = b \quad \nu = 0.5 \\ 0.32 \text{ жёсткая шайба } \nu = 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = 0.095, \frac{\tau}{\sigma_v} = 0.091 \quad \text{для дуба,}$$

**для сосны**  
**соответствующие**  
**отношения равны 0.14**  
**и 0.093.**



# Оценим рациональную объемную долю волокон

 $\phi_p$ 

$$E_{\text{в}} = E_{\text{с}} \phi; \sigma_{\text{с}} = \phi \sigma_x^0; E_m = E,$$

$$\phi_p = \tau^2 (\sigma_m^0)^{-2} E E^{-1} A(\phi),$$

$A(\phi)$  = 2-3 – слабо зависящая от объёмной доли функция

при  $\phi < \phi_p$  разрушение начнётся с разрыва волокон,

при  $\phi > \phi_p$  – с расщепления.

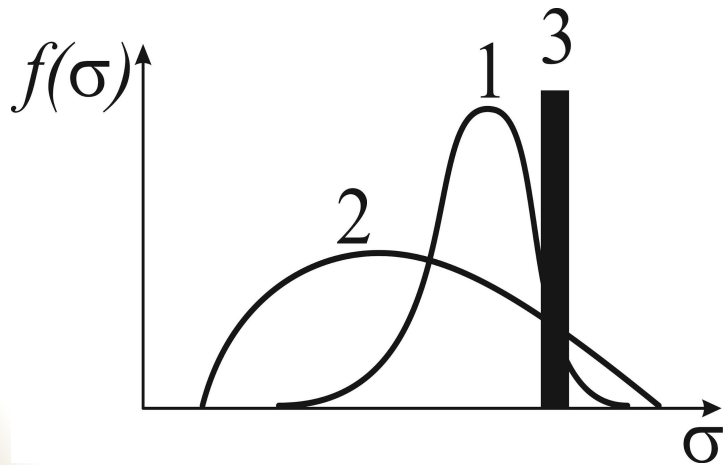
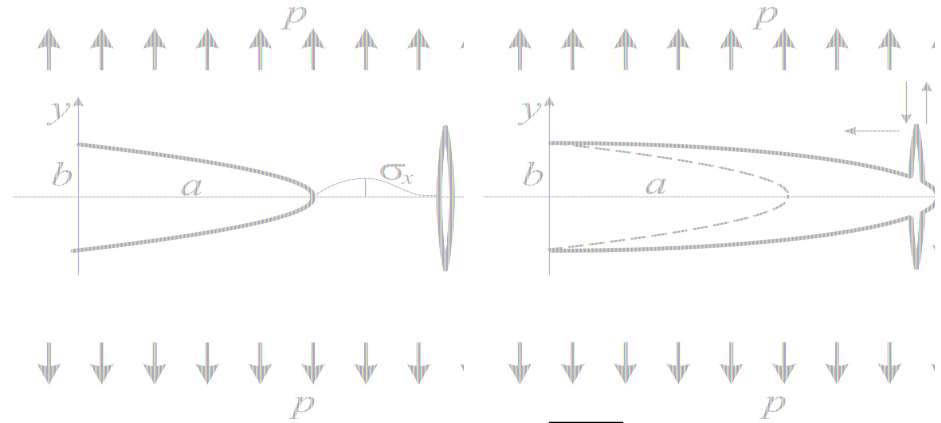
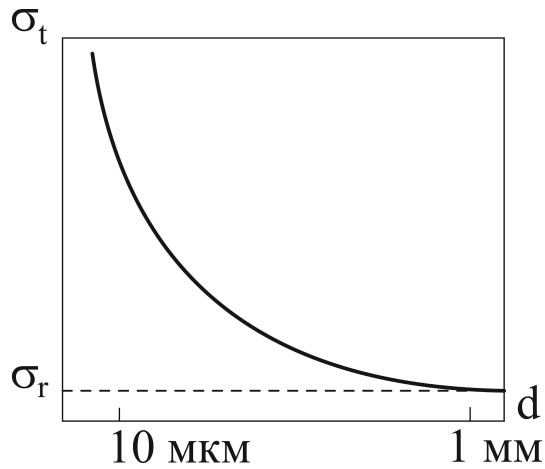
У стеклопластика  $\phi_p \approx 20 - 30\%$ .

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**



**МОСКОВСКИЙ  
ПОЛИТЕХ**

# Часть 1. Три секрета прочности КОМПОЗИТОВ

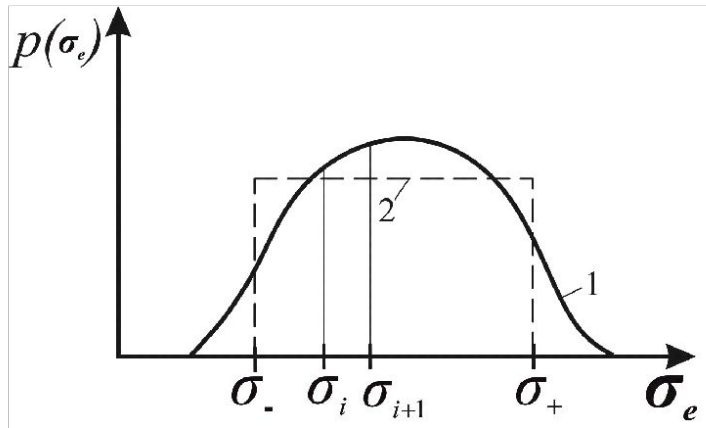


$$\lim_{b/a \rightarrow 0} K_{\sigma} = 1 + 2\sqrt{\frac{f}{\rho}} = 1,82$$

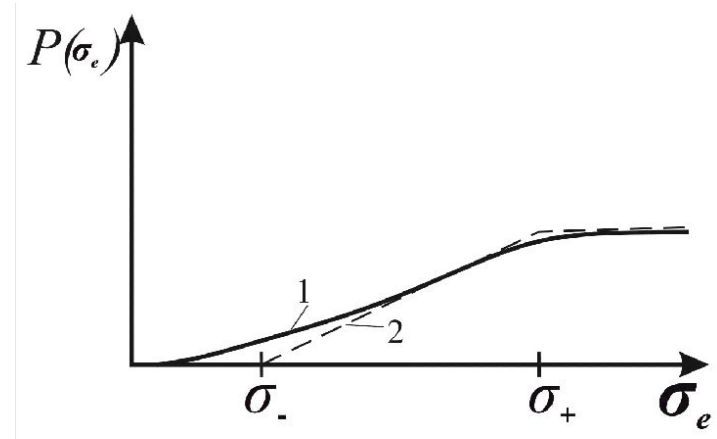


# Третий секрет – статистический характер прочности волокон

## Прочность пучка эффективной длины



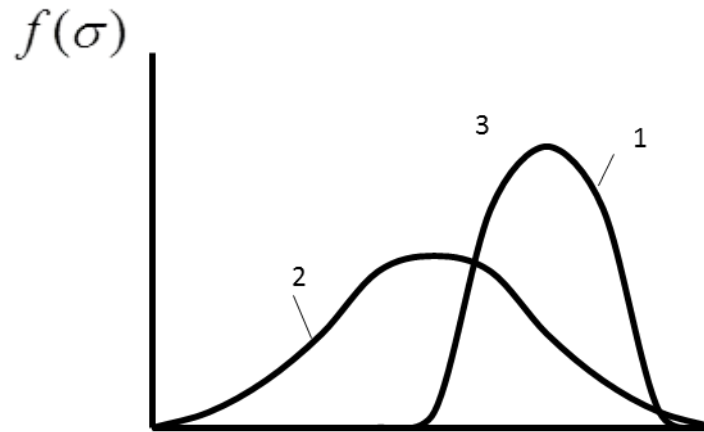
а



б

*Функции распределения – б и плотности распределения – а прочности волокон*

# 1.2.3. Третий секрет - статистический характер прочности волокон



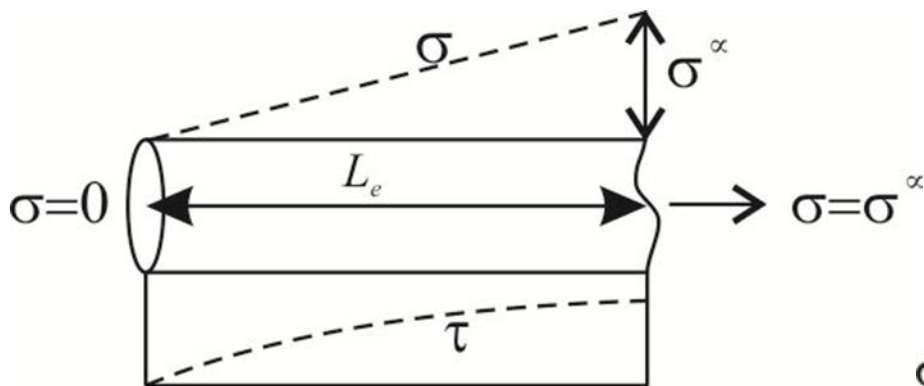
$$L_3 = \frac{1}{4} \frac{d\sigma_f}{[\tau_M]}, \text{ где}$$

$d$  - диаметр волокна,  $\sigma_f, \tau_M$  - прочности волокна на разрыв и матрицы на сдвиг

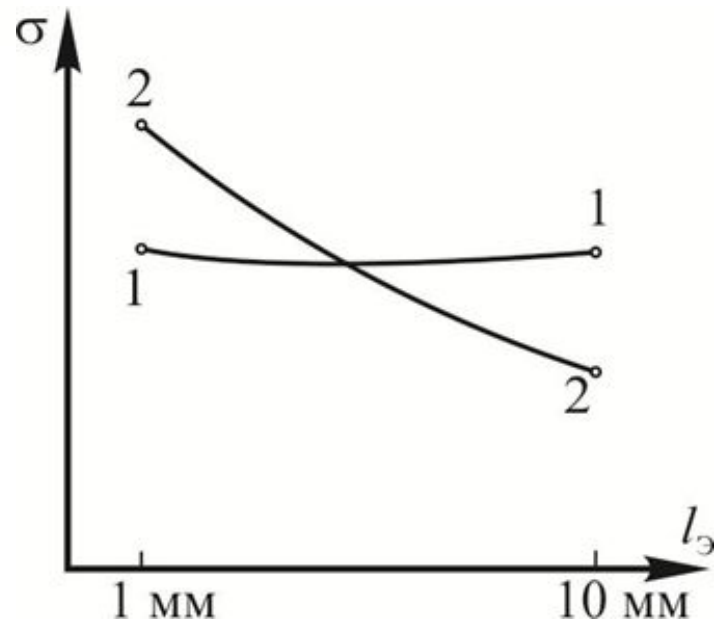
$$\sigma_c = z\sigma_f\psi_f + (1 - \psi_f)\sigma_M, \text{ где}$$

$\sigma_f, \sigma_M$  - прочности волокон и матрицы, определенные в экспериментах на достаточно длинных образцах

$\psi_f$  - объемная доля волокон

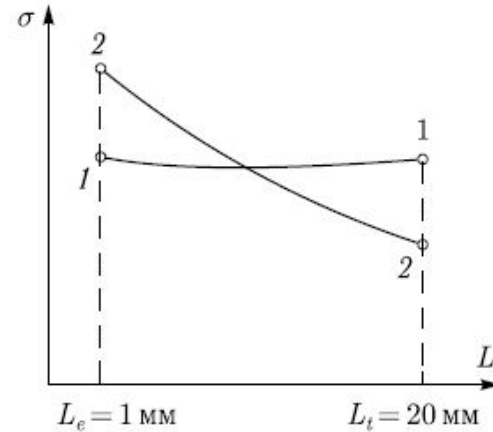
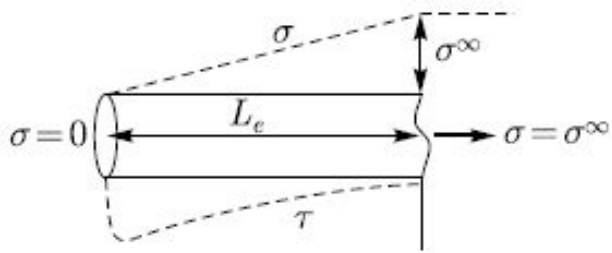


*Иллюстрация понятия эффективной длины  $L_e$*



*Сравнение прочности волокон с разными типами дефектов на базе испытаний и на эффективной длине*

## Третий секрет — статистический характер прочности волокон

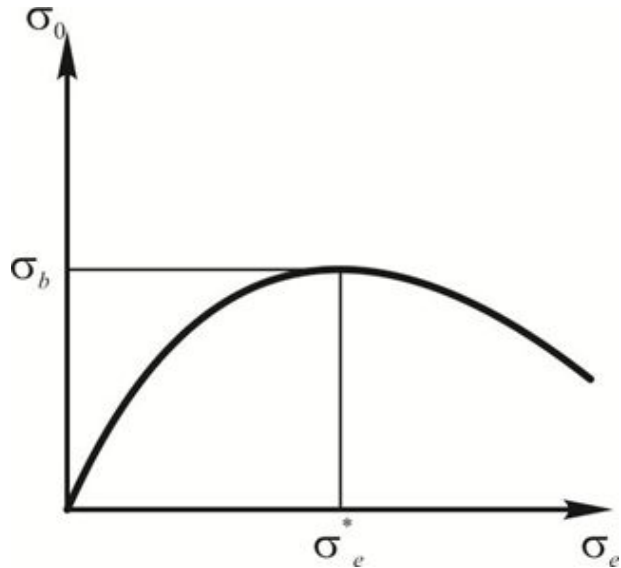


Эффективная длина  $L_e$

Сравнение прочности волокон с разными типами дефектов на базе испытаний и на эффективной длине

$$\sigma_c = z\sigma_f\psi_f + \sigma_m(1 - \psi_f)$$

# Модель разрушения пучка



*Иллюстрация понятия прочности пучка волокон*

*Прочность пучка:*

$$\sigma_b = \sigma_e^* \left( 1 - P(\sigma_e^*) \right).$$



# Равномерное распределение прочности

Функция плотности  
равномерного распределения

$$p(\sigma) = \begin{cases} (\sigma_+ - \sigma_-)^{-1}; & \sigma_- < \sigma < \sigma_+; \\ 0; & \sigma \leq \sigma_-; \sigma \geq \sigma_+, \end{cases}$$

Функция распределения:

$$P(\sigma) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_-) / (\sigma_+ - \sigma_-); & \sigma_- < \sigma < \sigma_+; \\ 0; & \sigma \leq \sigma_-; \\ 1; & \sigma \geq \sigma_+. \end{cases}$$

Средняя прочность волокон:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \equiv \frac{\sigma_+^2 - \sigma_-^2}{2(\sigma_+ - \sigma_-)}.$$

Критическое эффективное  
напряжение и прочность пучка

$$\sigma_e^* = \frac{\sigma_+}{2} \Rightarrow \sigma_b = \frac{1}{4} \frac{\sigma_+^2}{\sigma_+ - \sigma_-} < \bar{\sigma}_f.$$

При нулевой минимальной  
прочности:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{2}\sigma_+; \quad \sigma_b = \frac{1}{4}\sigma_+ = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_f.$$

# 1.2.7. О распределении Вейбулла

Функция плотности распределения прочности

$$p(\sigma) = \frac{dP(\sigma, L)}{d\sigma} = \frac{L\alpha}{L_0\sigma^*} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^\alpha\right].$$

Распределение Вейбулла более обосновано применительно к прочности волокон, чем традиционное нормальное распределение Гаусса, которое, во-первых, симметрично, во-вторых, допускает бесконечные и отрицательные значения прочности.



# Распределение Вейбулла

Гипотеза Вейбулла состоит в том, что прочность материала можно рассматривать, как прочность цепи, и разрушение соответствует разрыву слабейшего звена этой цепи. Теория «слабого звена» применительно к волокнам выглядит более логичной, чем для обычных квазиоднородных сплавов, где разрушение, возникшее в одной точке (в одном элементе характерного размера), может ещё не означать разрушение всей конструкции.

Применительно к прочности волокон функцию распределения Вейбулла выбирают в следующем виде

$$P(\sigma, L) = \frac{n}{N} = 1 - \exp\left[-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_-}{\sigma'}\right)^\alpha\right].$$

Функция плотности  
распределения прочности:

$$p(\sigma) = \frac{dP(\sigma, L)}{d\sigma} = \frac{L\alpha}{L_0\sigma'} \left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^\alpha\right].$$

Коэффициент реализации  $z$   
прочности

Табулированная гамма-функция:

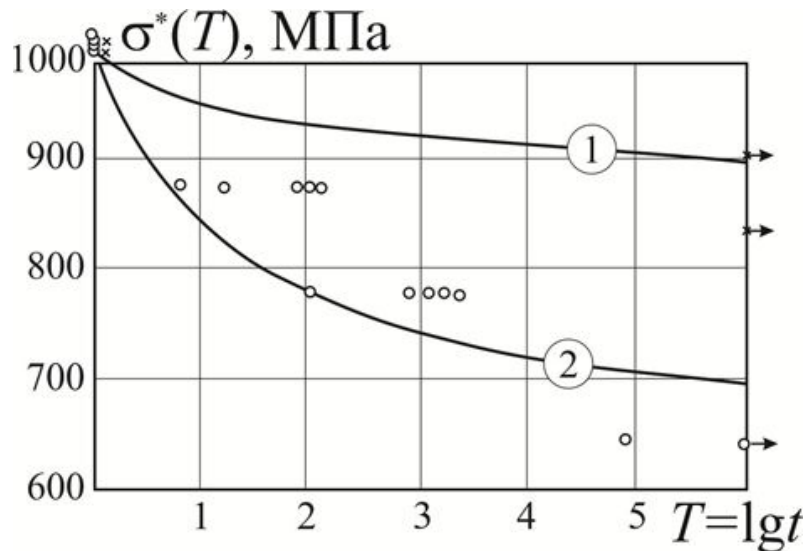
$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{\infty} x^{1/\alpha} \exp(-x) dx.$$

$$z = \frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}_f} = \left(\frac{L_t}{L_e \alpha e}\right)^{1/\alpha} \frac{1}{\Gamma(1 + 1/\alpha)}.$$

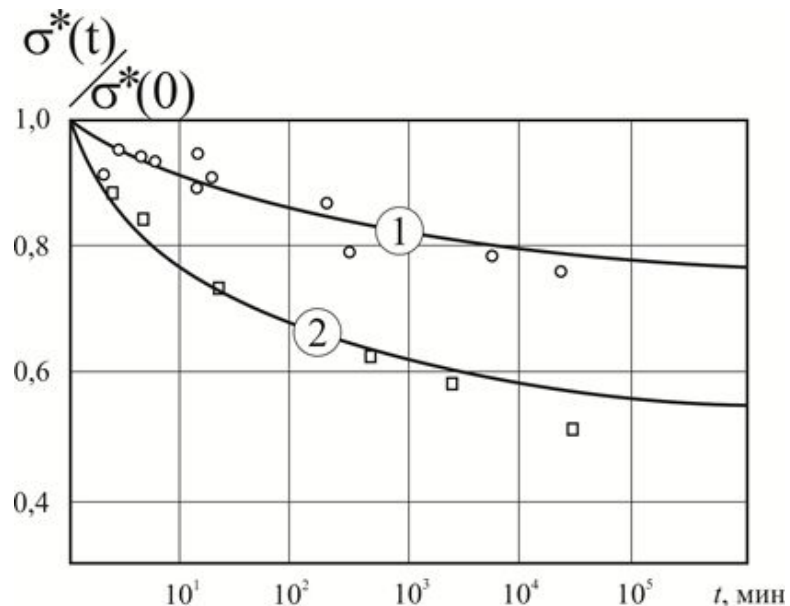
*Коэффициент реализации прочности волокон в  
однонаправленном композите в зависимости от  
эффективной длины и параметра  $\alpha$  ширины  
гистограммы*

$\alpha$	5	10	20
$z(10)$	1,04	0,95	0,94
$z(20)$	1,19	1,01	0,98

# Влияние поврежденности матрицы на запаздывающее разрушение волокнистых композитов на рост эффективной длины

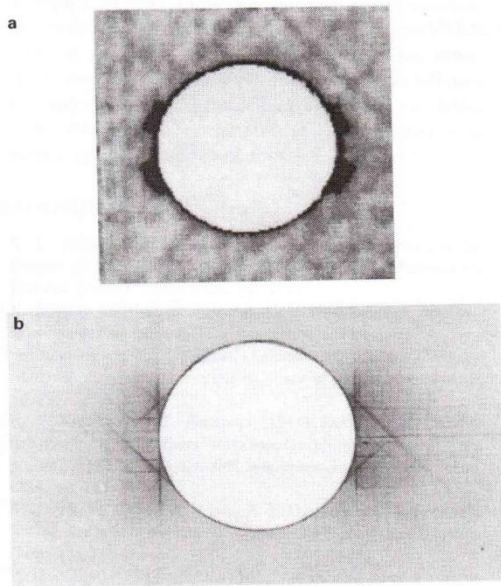


Кривые «длительной прочности» однонаправленных углепластиков (зависимости времени замедленного разрушения от уровня приложенных напряжений):  $\times$  — 1 — тип 1,  $\circ$  — 2 — тип 2

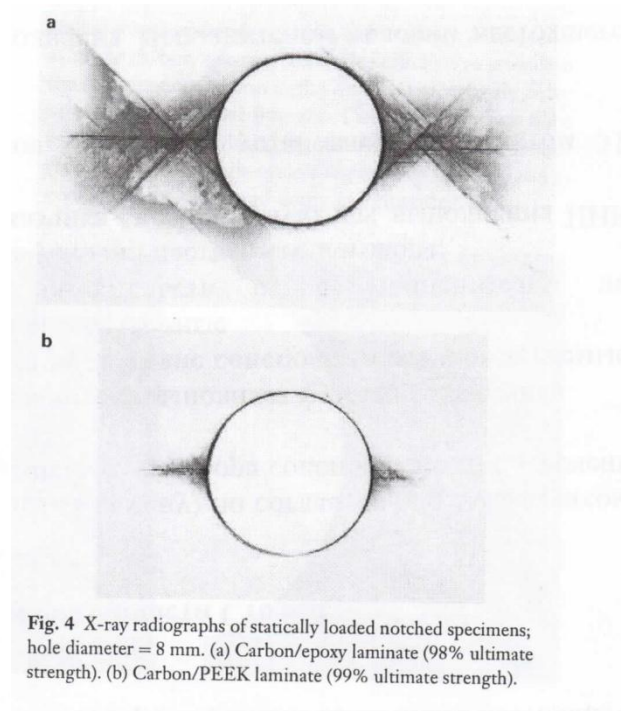


«Длительная прочность» однонаправленных стеклопластиков:  
 $\circ$  — 1 — эпоксидная,  $\square$  — 2 — полиэфирная матрица

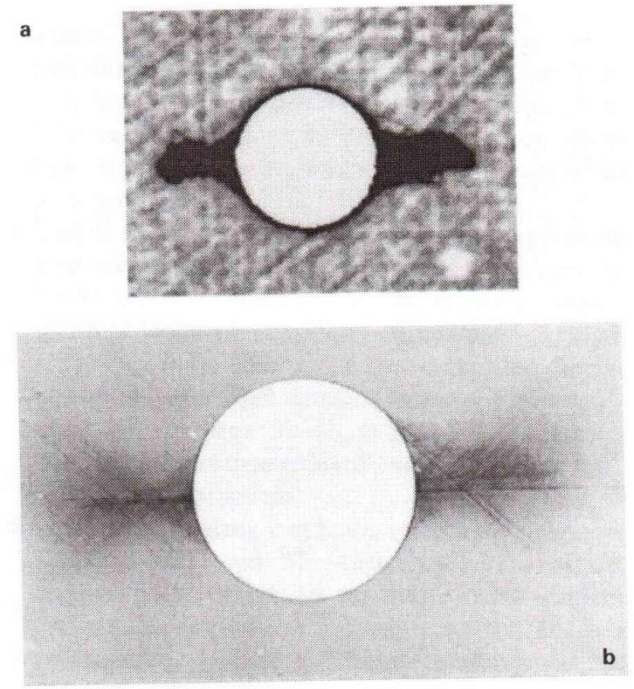
# Влияние матрицы на поврежденность около отверстия...



**Fig. 11** Ultrasonic c-scan (a) and x-radiograph (b) of a carbon/PEEK specimen loaded at a maximum stress of 80% of static strength,  $R = 0.1$  for  $N = 30\,000$  cycles; hole diameter = 8 mm.



**Fig. 4** X-ray radiographs of statically loaded notched specimens; hole diameter = 8 mm. (a) Carbon/epoxy laminate (98% ultimate strength). (b) Carbon/PEEK laminate (99% ultimate strength).



**Fig. 10** Ultrasonic c-scan (a) and x-radiograph (b) of a carbon/PEEK specimen loaded at a maximum stress of 80% of static strength,  $R = 0.1$  for  $N = 1000$  cycles; hole diameter = 8 mm.