ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
лекция 2

ДУ с однородной функцией нулевого порядка в правой части.

(однородные уравнения первого порядка).

- Функция $f(x;y)$ называется однородной степени n, если умножение всех её аргументов на одно и то же число t равносильно умножению функции на t^n, т.е.

$$f(tx;ty) = t^n f(x;y)$$

Пример 1.

1) $f(x;y) = x^3 + 2x^2y - 5y^3$ - однородная функция 3-ей степени

Так как $f(tx;ty) = (tx)^3 + 2(tx)^2\,ty - 5(ty)^3 =$

$$= t^3x^3 + 2t^2x^2t\,y - 5t^3y^3 = t^3\left(x^3 + 2x^2y - 5y^3\right) =$$

$$= t^3 f(x;y)$$

2) $f(x;y)=3x+2y$ - однородная функция 1-ой степени

Так как $f(tx;ty)=3tx+2ty=t\left(3x+2y\right)=t\cdot f(x;y)$

3) $f(x;y)=\dfrac{x-y}{2x+3y}$ - однородная функция 0-ой степени

Так как $f(tx;ty)=\dfrac{tx-ty}{2tx+3ty}=\dfrac{t\left(x-y\right)}{t\left(2x+3y\right)}=\dfrac{x-y}{2x+3y}=$

$$=f(x;y)=t^0 f(x;y)$$

4) $f(x;y)=x^2\sin\frac{y}{x}$ - однородная функция 2-ой степени

Так как $f(tx;ty)=(tx)^2\sin\frac{ty}{tx}=t^2x^2\sin\frac{y}{x}=t^2f(x;y)$

5) $f(x;y)=\frac{1}{x+y}$ - однородная функция (-1)-ой степени

Так как $f(tx;ty)=\frac{1}{tx+ty}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x+y}=t^{-1}\frac{1}{x+y}=$

$$=t^{-1}f(x;y)$$

- ДУ I порядка $y' = f(x;y)$ называется однородным, если $f(x;y)$- однородная функция 0-ой степени, т.е.

$$f(tx;ty) = f(x;y)$$

- Однородное ДУ I порядка $y' = f(x;y)$ можно записать в виде:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Т.к. $f(x;y) = f(tx;ty)$, то если положить $t = \dfrac{1}{x}$

Получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\right) = f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Решение однородного ДУ I порядка $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Это уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \qquad \text{или} \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = u \cdot x$$

$$(u \cdot x)' = \varphi(u)$$

$$u'x + u \cdot x' = \varphi(u)$$

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$F(u) = \ln|\,x\,| + C$$

или

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|\,x\,| + C$$ -общее решение данного ДУ

Пример 2. Найти общее решение ДУ:

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$$

$$u'x + u\,x' = u + tgu$$

$$x\frac{du}{dx} + u = u + tgu$$

$$x\frac{du}{dx} = tgu$$

$$\frac{du}{tgu} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{tgu} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + C$$

$$\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$$

$$\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|Cx\right|$$

$$\left|\sin u\right| = \left|Cx\right|$$

$$\sin u = \pm Cx$$

$$\sin u = Cx$$

$$u = \arcsin Cx$$

$$\frac{y}{x} = \arcsin Cx$$

$$y = x \cdot \arcsin Cx$$

Пример 3. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{2x+y}{2x}$$

, если $y(1)=0$

$$y' = \frac{2x+y}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{y}{2x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u\cdot x$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = 1 + \frac{1}{2} \cdot u$$

$$x\frac{du}{dx} + u = 1 + \frac{u}{2}$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 + \frac{u}{2} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 - \frac{u}{2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2-u}{2}$$

$$\frac{du}{2-u} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{du}{2-u} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$-\ln|2-u| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \qquad \Big|\cdot(-2)$$

$$2\ln|2-u| = -\ln|x| + C$$

$$\ln(2-u)^2 = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln(2-u)^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$(2-u)^2 = \frac{C}{x}$$

$$2-u = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}$$

$$2-u = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$u = 2 - \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y}{x} = 2 - \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$y = x\left(2 - \frac{C}{\sqrt{x}}\right)$$ - общее решение

Решим задачу Коши $y(1)=0$:

$$0 = 1\cdot\left(2 - \frac{C}{1}\right)$$

$$0 = 2 - C$$

$$C = 2$$

$$y = x\left(2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

или $y = 2\left(x - \sqrt{x}\right)$ - частное решение

- Уравнение вида $M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0$ называется однородным уравнением в дифференциальной форме, если $M(x;y)$ и $N(x;y)$ - однородные функции одной и той же степени.

Пример 4. Найти общее решение ДУ:

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx} \qquad \Big| \cdot dx$$

$$y^2 dx + x^2 dy = xy\, dy$$

$$\underbrace{y^2}_{M(x;y)} dx + \underbrace{\left(x^2 - xy\right)}_{N(x;y)} dy = 0$$

- однородное уравнение вида

$$M(x;y)\, dx + N(x;y)\, dy = 0$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u\,x'$$

$$\frac{dy}{dx} = u'x + u\,x'$$

$$dy = u'x\,dx + u\,x'\,dx$$

$$dy = x\,du + u\,dx$$

$$y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$$

$$u^2x^2dx+\left(x^2-x\cdot ux\right)\left(x\,du+u\,dx\right)=0$$

$$u^2x^2dx+x^3du-x^3u\,du+x^2u\,dx-x^2u^2dx=0$$

$$x^3\left(1-u\right)du+ux^2dx=0$$

$$x^3\left(1-u\right)du=-ux^2dx$$

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x}\qquad(*)$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln e^u - \ln|u| = \ln|Cx|$$

$$\ln\left|\frac{e^u}{u}\right| = \ln|Cx|$$

$$\frac{e^u}{u} = \pm Cx$$

$$\frac{e^u}{u} = Cx$$

$$e^u = uCx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} Cx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy$$ - общее решение

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + \left(x^2 - xy\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(x^2 - xy\right)\cdot y' = -y^2$$

$$y' = -\frac{y^2}{x(x-y)} = \frac{y^2}{x(y-x)} = \frac{y^2}{x^2\left(\dfrac{y}{x} - 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad u'x + u = \frac{u^2}{u-1}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u^2 + u}{u-1}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$$

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x}$$ - получили (*)

Пример 5. Найти общее решение ДУ:

$$\left(x^2-2y^2\right)dx+2xy\,dy=0$$

$$\underbrace{\left(x^2-2y^2\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x;y)}\,dy=0$$

- однородное уравнение вида

$$M(x;y)\,dx+N(x;y)\,dy=0$$

$$\frac{y}{x}=u \quad\Rightarrow\quad y=u\cdot x$$

$$y'=u'x+u\,x'$$

$$\frac{dy}{dx}=u'x+u\,x'$$

$$dy=u'x\,dx+u\,x'\,dx$$

$$dy=x\,du+u\,dx$$

$$\left(x^2-2u^2x^2\right)dx+2x\cdot ux\left(x\,du+u\,dx\right)=0$$

$$\left(x^2-2x^2u^2\right)dx+2x^3u\,du+2x^2u^2dx=0$$

$$x^2dx+2x^3u\,du=0$$

$$2u\,du=-\frac{dx}{x}$$

$$\int 2u\,du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$u^2=-\ln\left|x\right|+C$$

$$u^2=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2=x^2\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2=-x^2\ln\left|Cx\right|$$

$$y^2+x^2\ln\left|Cx\right|=0$$

Пример 6. Найти общее решение ДУ:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \Big|: x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u\,x'$$

$$y' = x\frac{du}{dx} + u$$

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\sqrt{1+u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|\,x\,|+C$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

общий интеграл ду

$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$ - общий интеграл

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2-y \qquad \left|\left(\ \right)^2\right.$$

$$x^2+y^2=\left(Cx^2-y\right)^2$$

$$x^2+y^2=Cx^4-2yCx^2+y^2$$

$$x^2=x^2\left(Cx^2-2yC\right)$$

$$1=C(x^2-2y)$$

$\dfrac{1}{x^2-2y}=C$ - общий интеграл

Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y'.*

В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно

записать в виде $$y' + p(x) \cdot y = q(x) \,, \qquad (1)$$

где $p(x)$, $\mathrm{q}(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $\mathrm{q}(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***.
В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

$y' + p(x)\,y = 0$

Разделим переменные: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx,$ интегрируя это выражение, получаем:

$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C,$ где $C > 0 \Rightarrow$

$\ln|y| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C,$ где $C > 0 \Rightarrow$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad C \neq 0$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y=0$.

Тогда общее решение принимает вид:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \qquad \forall C. \qquad (2)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)\ . \qquad (1)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$,

соответствующее данному неоднородному уравнению.

Его общее решение имеет вид :

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}\ . \qquad (2)$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

$\Rightarrow$ Оно имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\ .$$

Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (1).

$$y = \boxed{C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x)}$$

Подставим эти выражения в уравнение $\boxed{y'} + p(x)\boxed{y} = f(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} = \quad f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} = \quad f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow dC = \quad f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx$$

Интегрируя, находим $C(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C$.

$$C(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (1) имеет вид:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

***Замечание*.**

Раскроем скобки в (3):

$$y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \,. \qquad (4)$$

Заметим, что первое слагаемое в (4) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

II) *Метод Бернулли.*

Будем искать решение (1) в следующем виде:

$y = u(x) \cdot v(x)$.

Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Подставим y и y' в уравнение (1) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x)$.

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left.\begin{array}{l} [\, v' + pv \,] = 0 \,. \\ \text{Тогда } u' \cdot v = f(x) \,. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Условия (5) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$.

Первое уравнение – это линейное однородное уравнение

$$\Rightarrow \quad v(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Учитывая свободу выбора $v(x)$, положим $C = 1$, тогда

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляем полученную функцию во второе уравнение:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\Rightarrow \; y = u(x) \cdot v(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднородное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n, \qquad (6)$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$

при $n = 0$ имеем линейное уравнение

при $n = 1$ уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1)обе части уравнения (6) разделить на y^n,

2)сделать замену $z = y^{1-n}$.

Разделим обе части уравнения на y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = f(x) \qquad \text{или} \qquad y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x)$$

Пусть $z = y^{1-n} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^n}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$

Подставляем эти выражения в уравнение

$$y'\,y^{-n} + p(x)\cdot y^{1-n} = f(x) \Rightarrow \frac{y^n}{1-n}\cdot\frac{1}{y^n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\cdot p(x)\cdot z = (1-n)\cdot f(x)$$

– линейное уравнение относительно z и z'

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение, например, методом Бернулли, получим:

$z = u(x) \cdot v(x)$,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x) \cdot \tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.