Лекция 2
Интегральная и дифференциальная форма законов электродинамики

Закон сохранения электрического заряда

Величина заряда любого макроскопического тела в любом объеме пространства меняется со временем только за счет того, какая величина заряда попала в объем и ушла из него:

$$\frac{d}{dt}Q = -I,$$

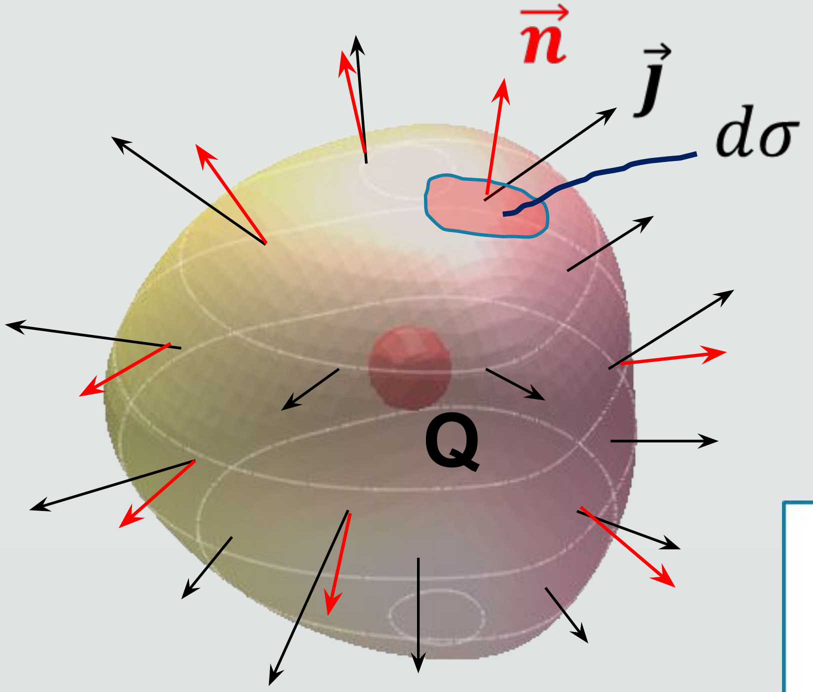
где I – сила тока - величина заряда, прошедшего через ограничивающую объем поверхность.

Закон сохранения электрического заряда

В пределе <u>непрерывной среды</u> величина заряда Q в объеме V и величина силы тока I через границу ∂V этого объема равны:

$$Q = \int_V \rho dV$$

$$I = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = \int_V div(\vec{\mathbf{j}}) dV$$



Плотность тока $\vec{j}$ в любой точке среды можно вычислить по формуле:

$$\vec{\mathbf{j}} = \sum_i q_i \vec{v}_i = e \sum_i n_i \vec{v}_i = \int_V \rho \vec{v} dV$$

Здесь $\vec{v}_i$ - скорость частицы с номером i.

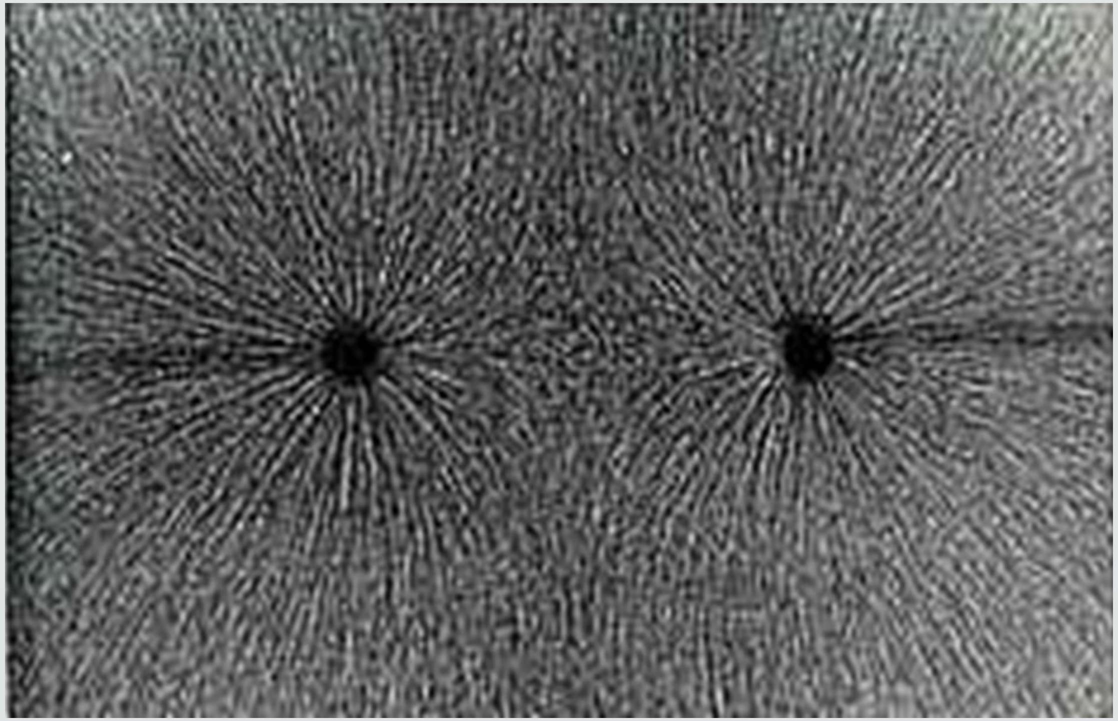
Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho dV = -I = -\int_V div(\vec{\mathbf{j}})dV$$

Поскольку этот закон должен выполняться в любой точке среды, должно выполняться дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{\mathbf{j}}) = 0$$

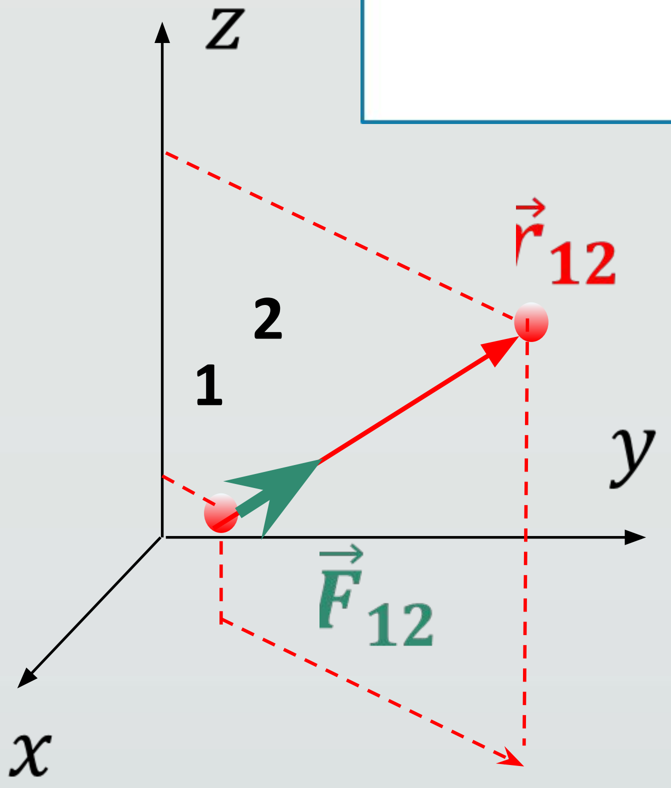
Закон Кулона и уравнение Гаусса



Закон Кулона для точечной частицы

Две точечные заряженные частицы в вакууме с зарядами $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$, расположенные на расстоянии $|\vec{\boldsymbol{r}}_{12}|$ друг от друга, взаимодействуют с силой:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_{12}|^3}\vec{\boldsymbol{r}}_{12}$$



Частицы должны быть точками!

Напряженность электрического поля

Согласно гипотезе Фарадея в пространстве вокруг любого заряженного объекта не зависимо от пробного заряда существует электрическое поле с напряженностью $\vec{\mathbf{E}}$, величина которого для точечного заряда источника поля на расстоянии $|\vec{\mathbf{r}}|$ от него может быть рассчитана по формуле

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}}|^3}\vec{\mathbf{r}}$$

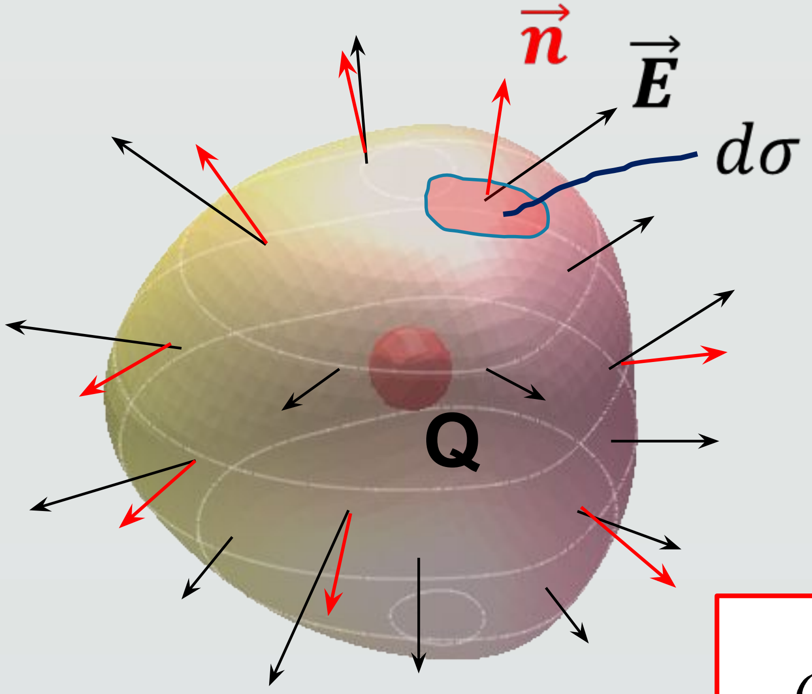
Напряженность $\vec{\mathbf{E}}$ есть сила $\boldsymbol{\delta}\vec{\mathbf{F}}$ действующая на пробный бесконечно малый заряд $\delta\boldsymbol{q}$, отнесенная к этому заряду!

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\delta}\vec{\mathbf{F}}}{\delta\boldsymbol{q}}$$

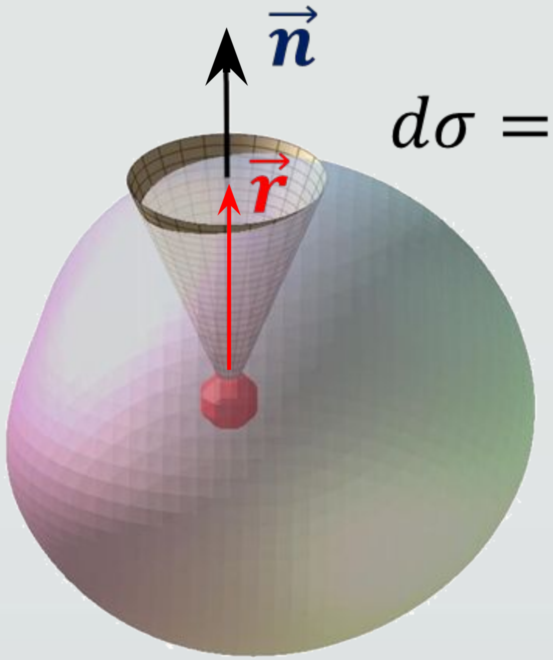
Поток электрического поля через поверхность

Поток электрического поля через поверхность

$$\Phi = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{n}})\, d\sigma = \int_V div(\vec{\mathbf{E}})\, dV$$



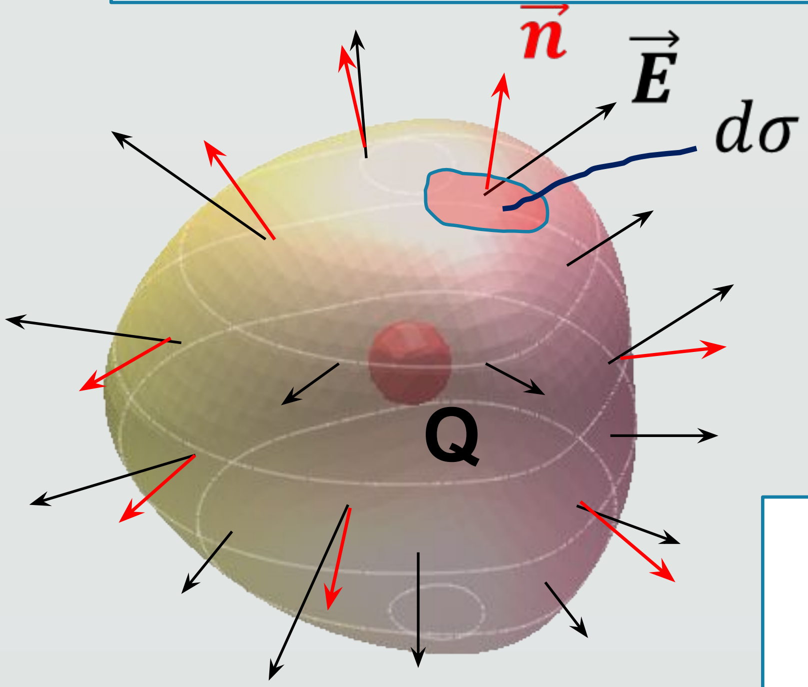
$$d\Omega = \frac{1}{r^3} (\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{n}})\, d\sigma$$



$$d\sigma = r^2 d\Omega$$

Закон Кулона в дифференциальной форме

Поток электрического поля через поверхность **по определению**



$$\Phi = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = \int_V div(\vec{\mathbf{E}}) dV$$

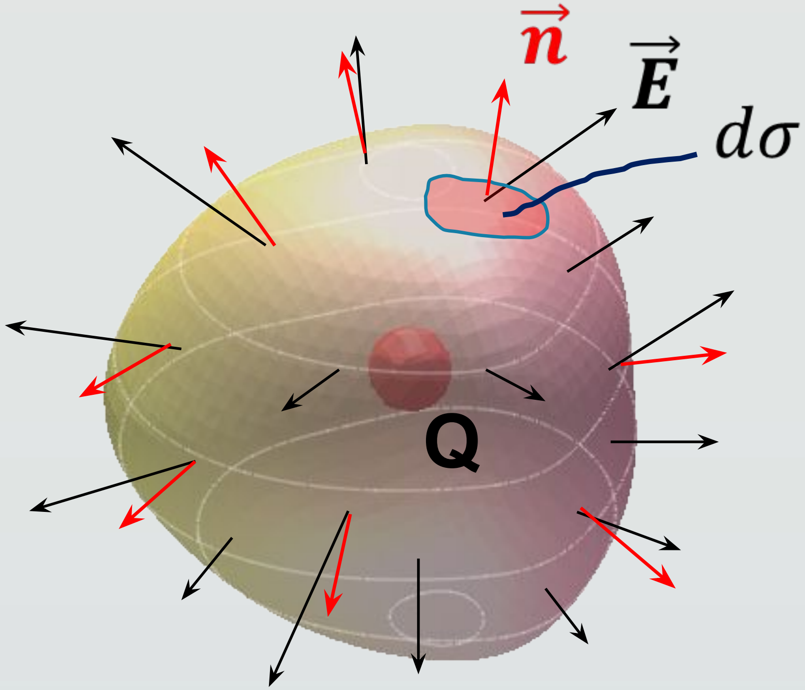
$$d\Omega = \frac{1}{r^3} (\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma$$

Поток электрического поля через поверхность **по закону Кулона**

$$\Phi = \oint_{\partial V} (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = \oint_{\partial V} \left(\frac{Q}{r^3} \vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{n}} \right) d\sigma = Q \int_{\partial V} d\Omega = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho dV$$

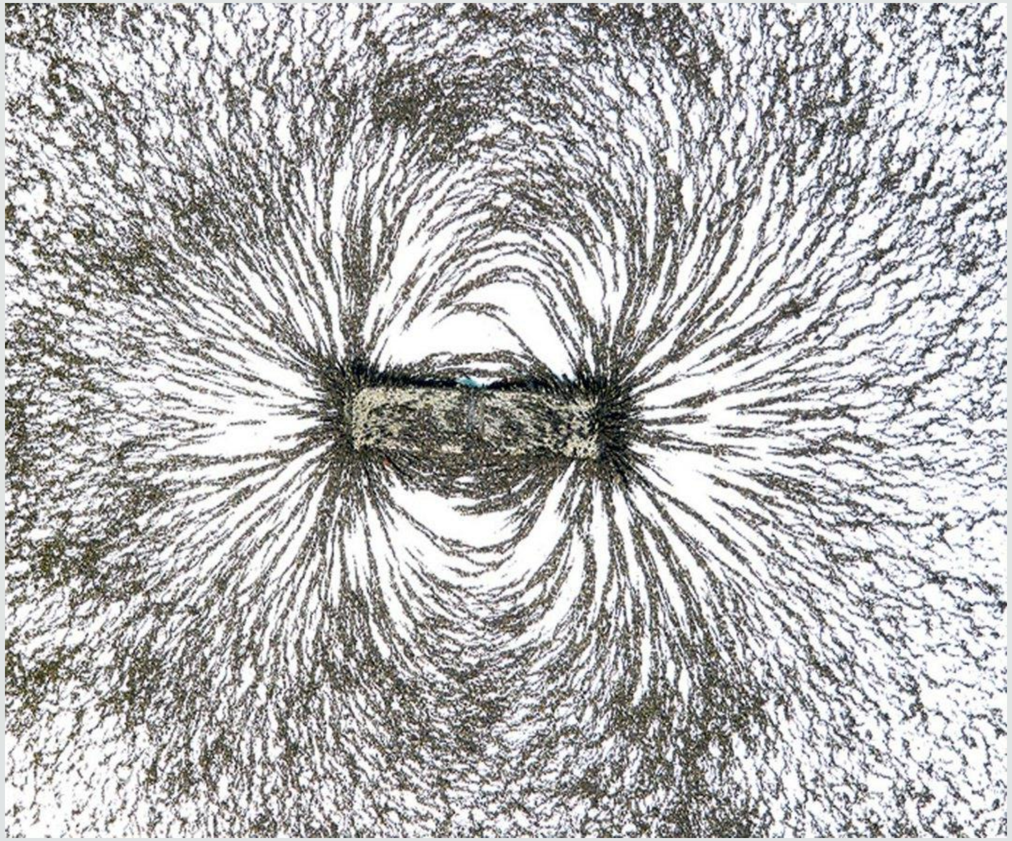
Закон Кулона в дифференциальной форме

Поскольку формула справедлива для любого элементарного объема, то напряженность электрического поля должна удовлетворять уравнению:



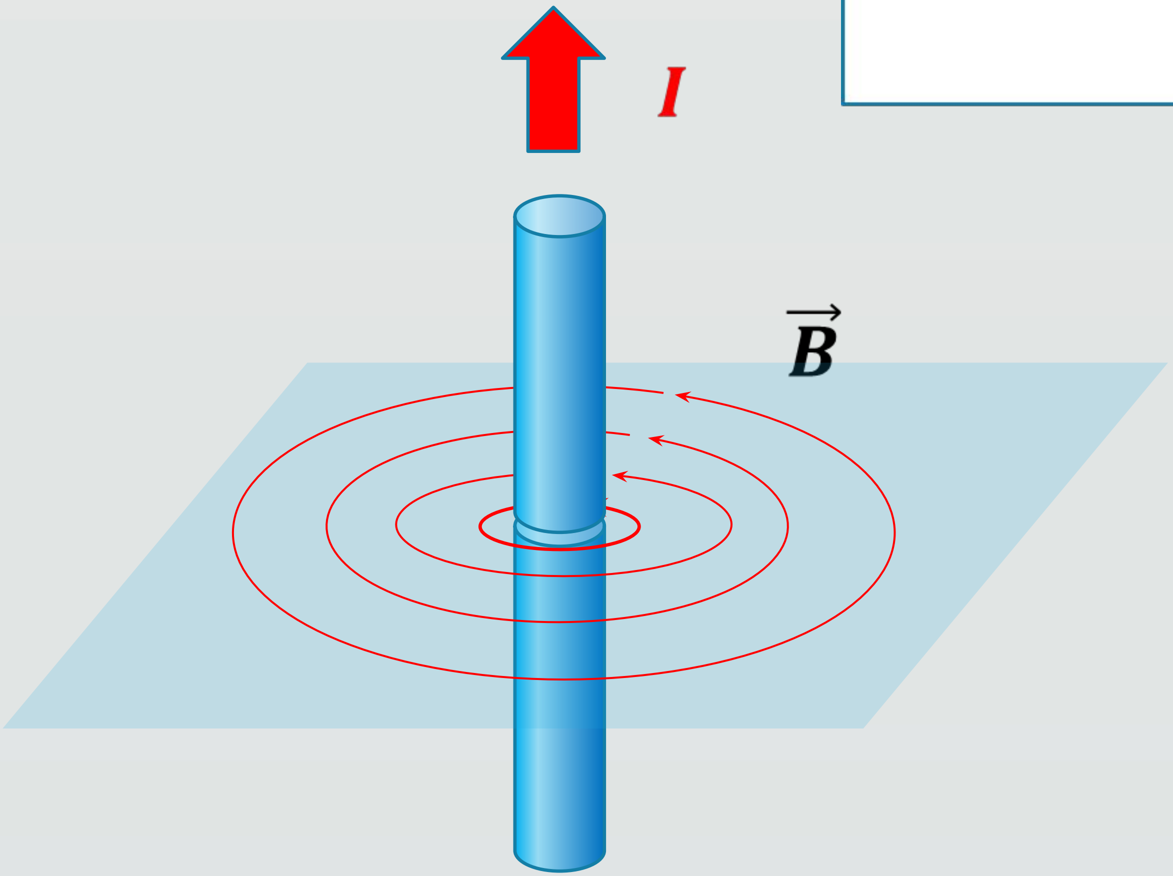
$$div(\vec{\mathbf{E}}) = 4\pi\rho$$

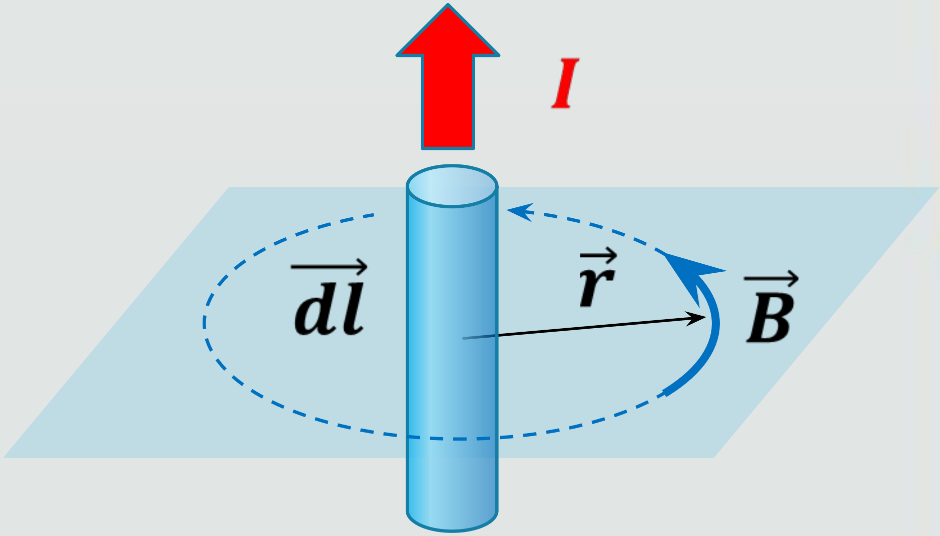
Магнитное поле



Закон Био-Савара-Лапласа

Величина индукции $\vec{B}$ на расстоянии r от проводника



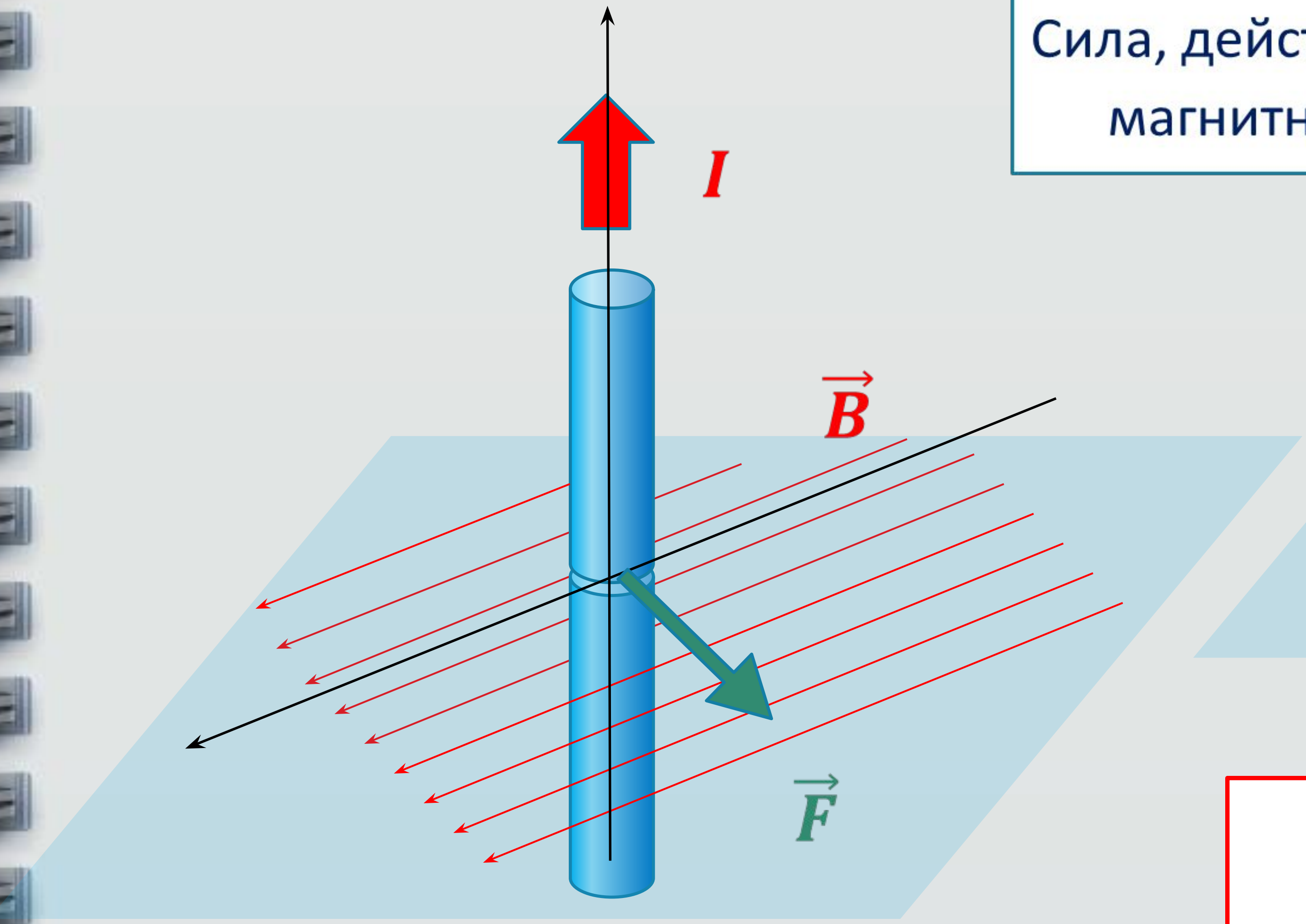


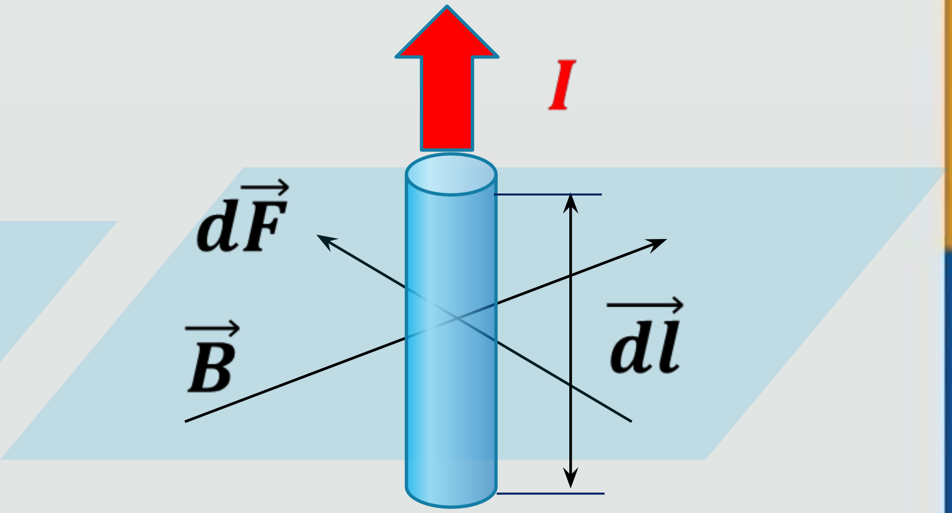
Силовые линии
поля индукции $\vec{B}$ вокруг проводника

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c}\frac{1}{r^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]$$

Закон Ампера

Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$

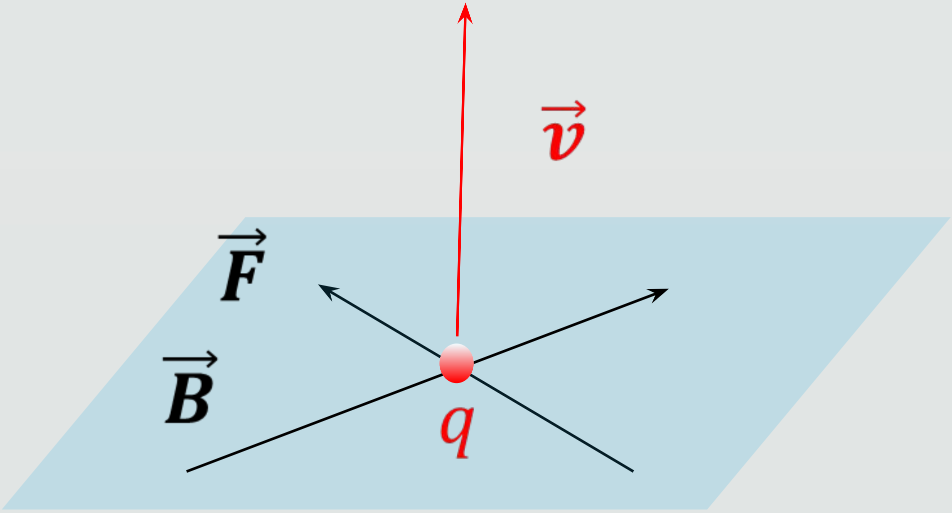




$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c}[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$$

Сила Лоренца

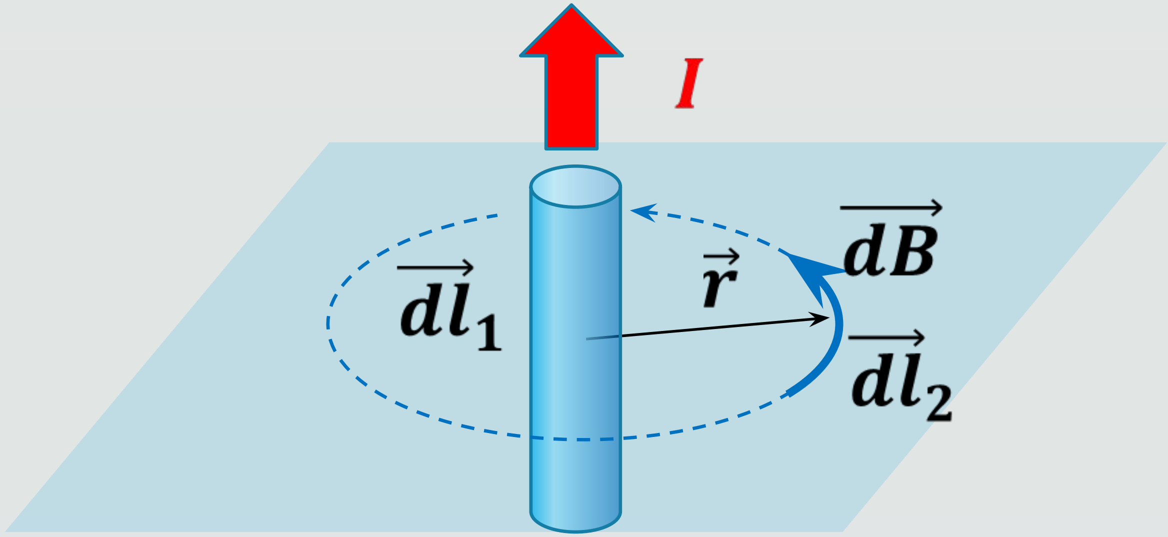
Сила, действующая на точечный заряд в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, называется **силой Лоренца**



$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \frac{q}{c}[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}]}$$

Интегральный закон Ампера

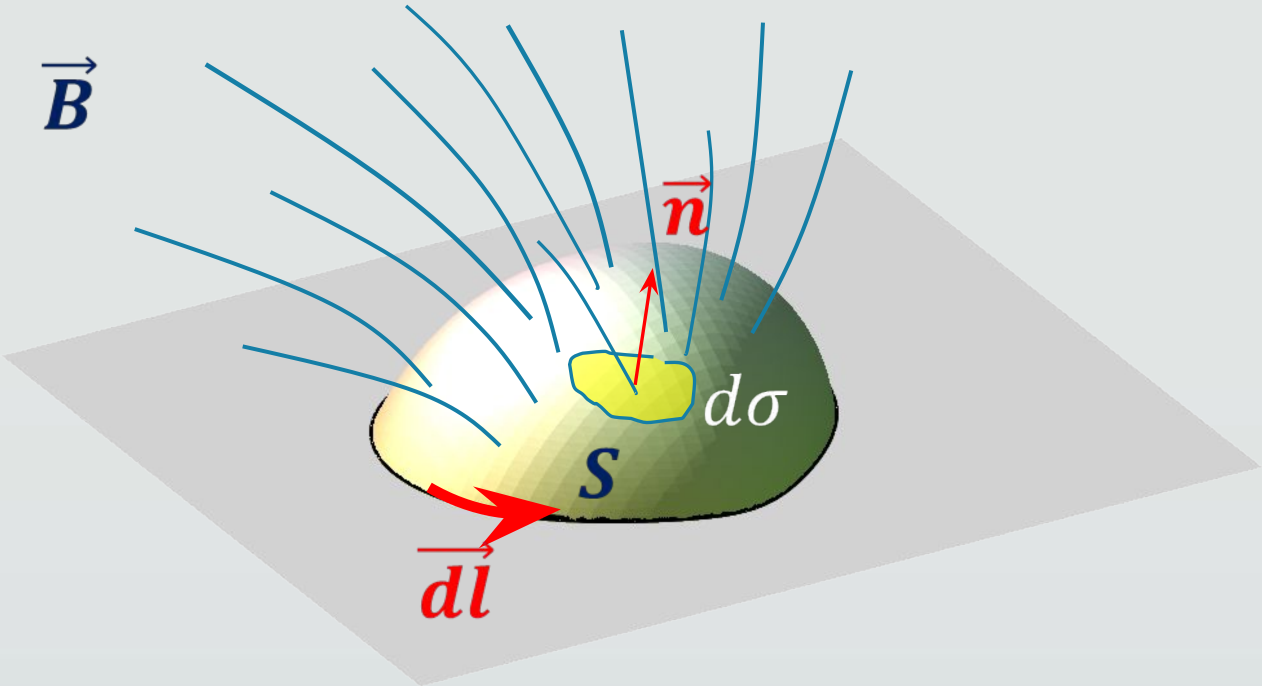
$$\oint\int(d\mathbf{l}_2, d\mathbf{B}) = \oint(d\mathbf{l}_2, \mathbf{B}) = \frac{I}{c}\oint\oint\frac{1}{r^3}([d\mathbf{l}_1\times\mathbf{r}], d\mathbf{l}_2) = \frac{4\pi}{c}I$$



$$\oint(d\mathbf{l}_2, \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c}I$$

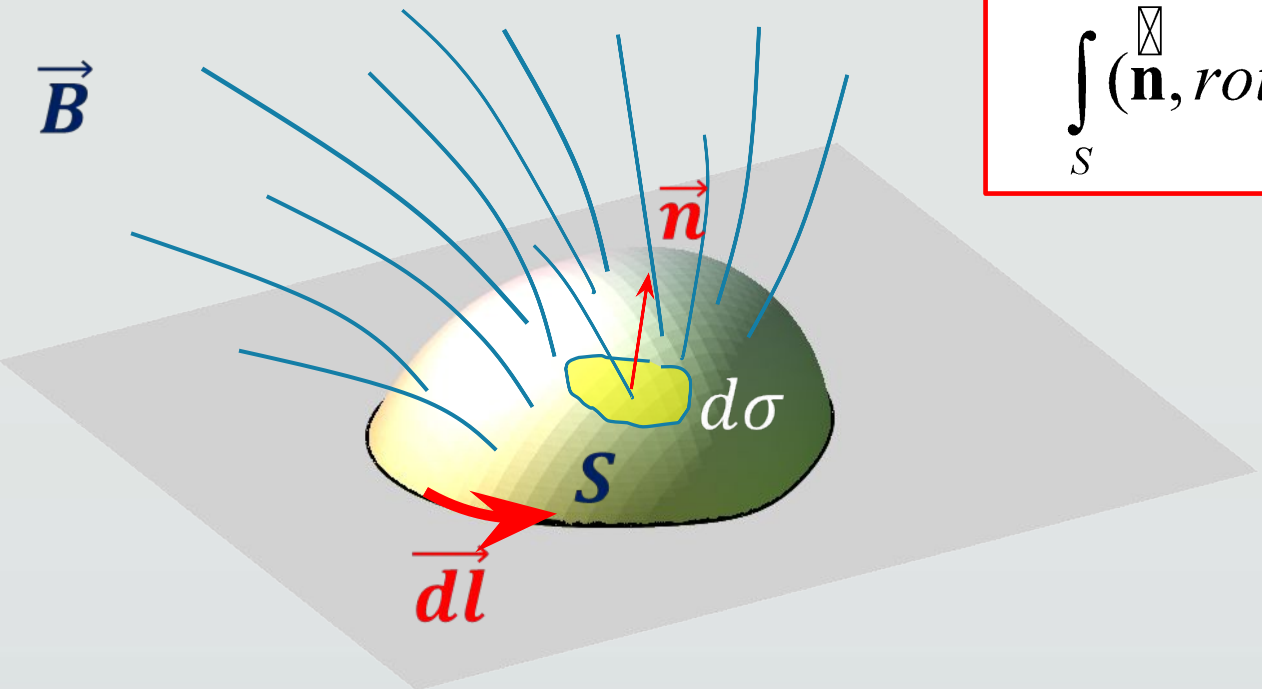
Теорема Стокса

$$\oint_C (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, rot\mathbf{B})d\sigma$$



Законы электромагнитной индукции в дифференциальной форме

$$\oint\limits_C (\vec{\mathbf{B}}, d\vec{\mathbf{l}}) = \int\limits_S (\vec{\mathbf{n}}, rot\vec{\mathbf{B}})d\sigma = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{j}})d\sigma$$



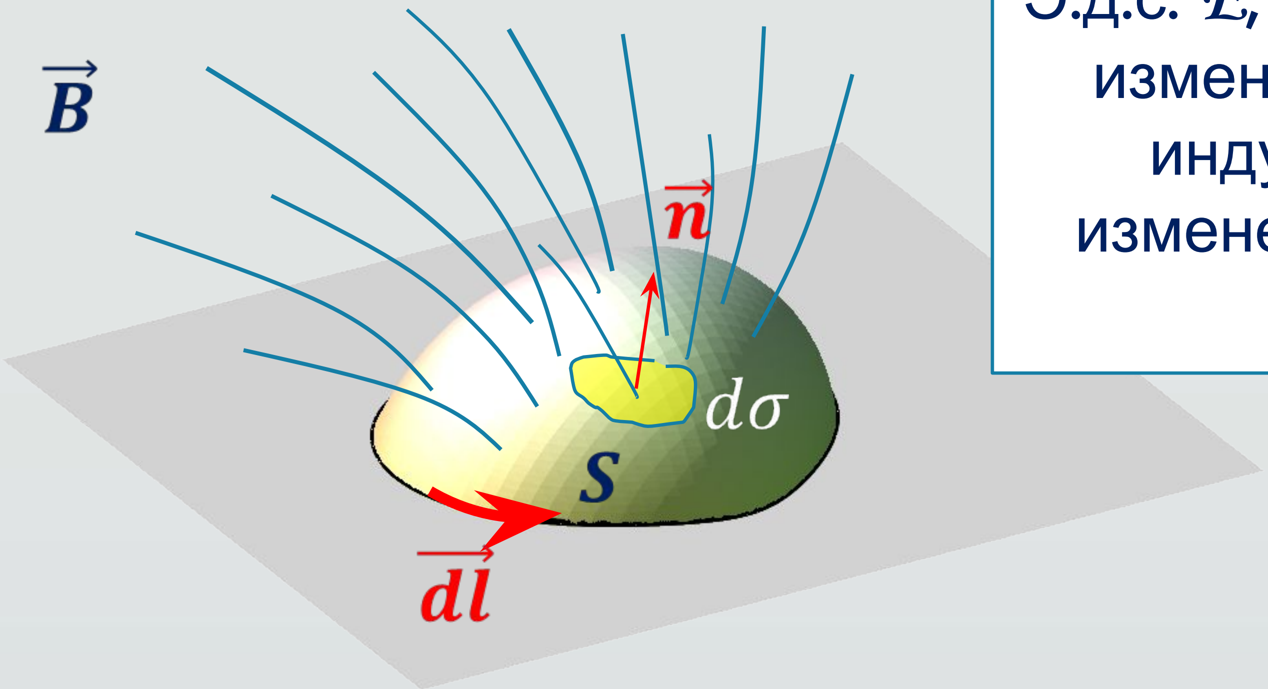
$$\int\limits_S (\vec{\mathbf{n}}, rot\vec{\mathbf{B}})d\sigma = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{j}})d\sigma$$

$$rot\vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}}$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея

Поток индукции $\vec{B}$ через поверхность S

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma$$



Э.д.с. $\mathcal{E}$, наводимая в контуре при изменении потока магнитной индукции равна скорости изменения потока с обратным знаком

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея

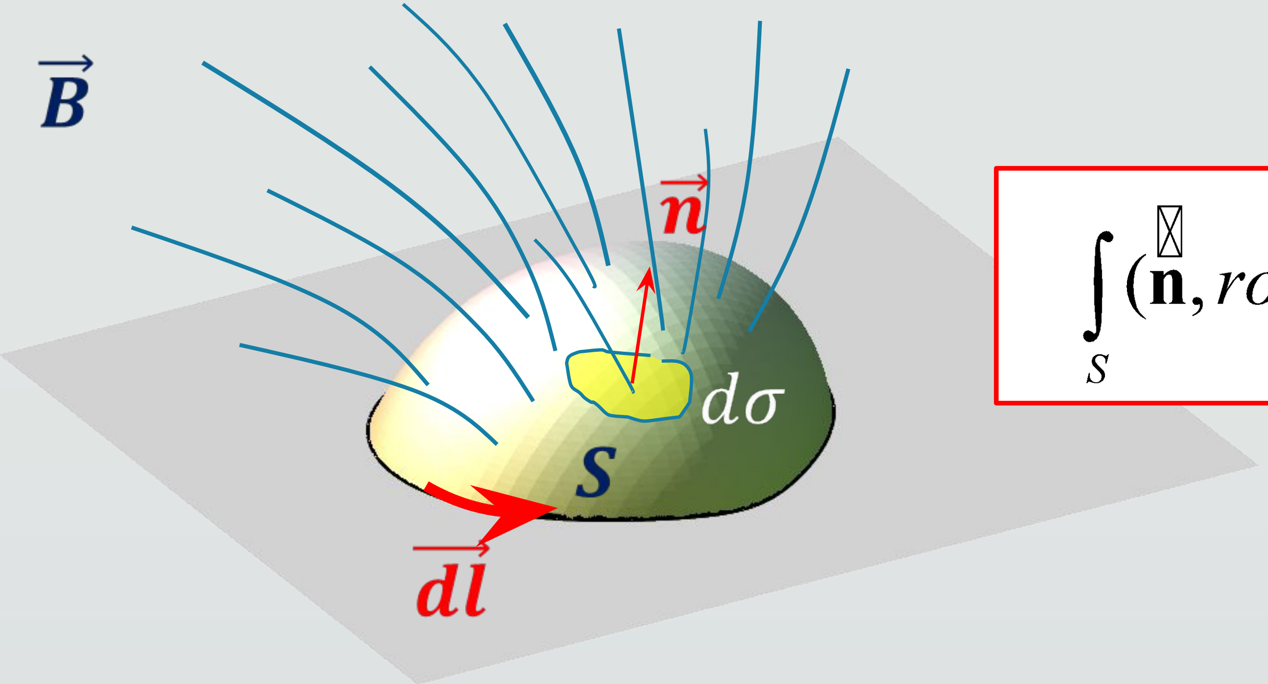
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S (\mathbf{B},\mathbf{n})d\sigma = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\mathbf{n}\right)d\sigma$$

$$E = \oint_C (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, rot\mathbf{E})d\sigma$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

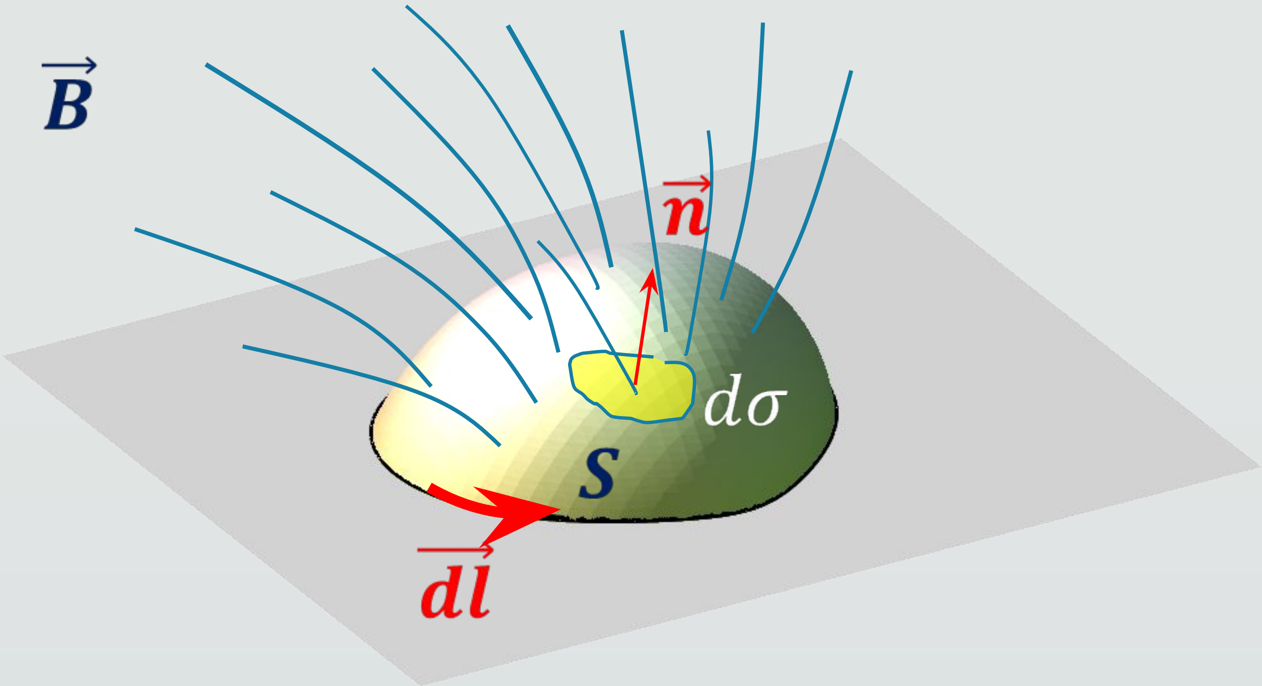
$$\int_S (\mathbf{n}, rot\mathbf{E})d\sigma = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\mathbf{n}\right)d\sigma$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

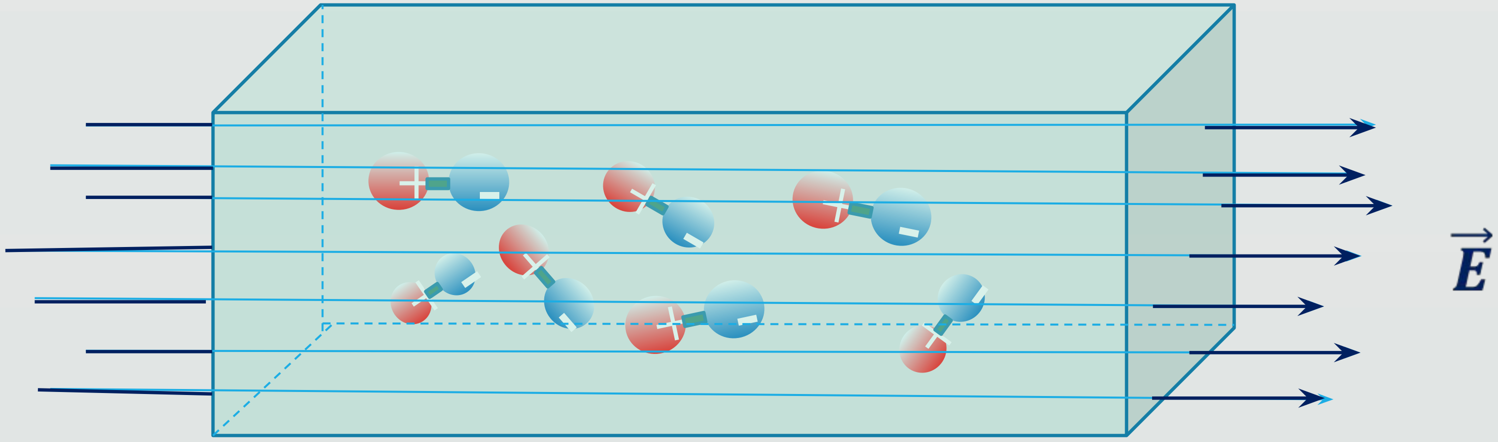


Теорема Стокса

$$\oint_C (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, rot\mathbf{B})d\sigma$$



Диэлектрики



$$\vec{\mathbf{P}} = \rho_{св}^{+}\vec{\mathbf{q}}^{+} + \rho_{св}^{-}\vec{\mathbf{q}}^{-} \approx \rho_{св}^{+}\vec{\mathbf{q}}$$

$\vec{P}$ - векторное поле поляризации,

$\rho_{св}$ – плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,

$\vec{q}$ - усредненный дипольный момент в данной точке среды

Первое уравнение Максвелла

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}} = (1 + 4\pi\chi)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$\vec{D}$ - индукция электрического поля,
ρ – плотность электрического заряда,
χ – диэлектрическая восприимчивость (поляризация),
ε – диэлектрическая проницаемость среды.

$$div(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

Магнитное поле в магнетике

$$div(\vec{\mathbf{E}}) = 4\pi(\rho + \rho_{св})$$

$$div(\vec{\mathbf{P}}) = -\rho_{св}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \rho^{+}_{св}\vec{\mathbf{q}}^{+} + \rho^{-}_{св}\vec{\mathbf{q}}^{-} \approx \rho^{+}_{св}\vec{\mathbf{q}}$$

$\vec{P}$ - векторное поле поляризации,

$\rho_{св}$ – плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,

$\vec{q}$ - усредненный дипольный момент в данной точке среды

$$div(\vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}) = div(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

Первое уравнение Максвелла

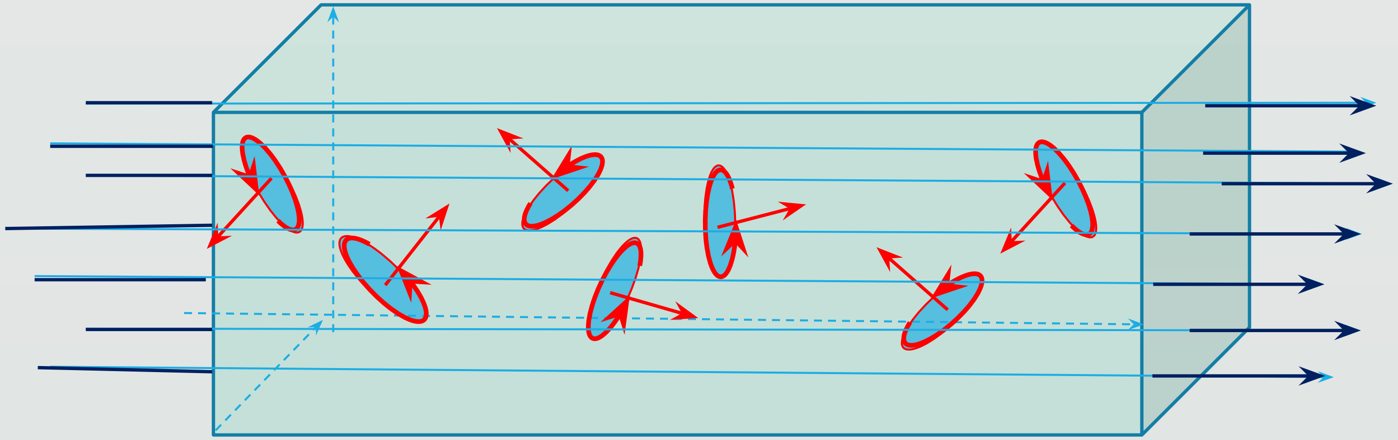
$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}} = (1 + 4\pi\chi)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$\vec{D}$ - индукция электрического поля,
ρ – плотность электрического заряда,
χ – диэлектрическая восприимчивость (поляризация),
ε – диэлектрическая проницаемость среды.

$$div(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

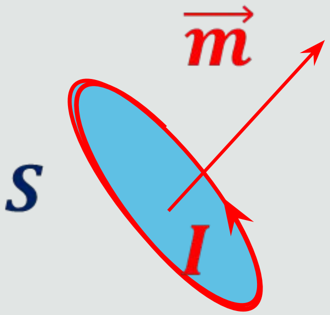
Магнетики



$\vec{B}$

Магнитный момент

$$\vec{m} = \frac{IS}{c}\vec{n}$$



$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{\mathbf{m}}_i$$

$\vec{M}$ - векторное поле намагниченности,

$\rho_{св}$ – плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,

$\vec{m}_i$- магнитный момент в данной точке среды

Магнетики

$$\vec{\mathbf{j}}_M = 4\pi \cdot rot(\vec{\mathbf{M}})$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}} - 4\pi\vec{\mathbf{M}} = (1+4\pi\alpha)\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{B}}$$

$\vec{H}$ - напряженность магнитного поля,

$\vec{J}_M$ – ток намагничивания,

α –магнитная восприимчивость,

μ – магнитная проницаемость среды.

Магнетики

$$\vec{\mathbf{j}}_P = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$$

$\vec{P}$ - поляризация, $\vec{j}_B$– ток поляризации,

$$rot\vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c}(\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{j}}_M + \vec{\mathbf{j}}_P)$$

$$rot(\vec{\mathbf{H}}) = rot(\vec{\mathbf{B}} - 4\pi\vec{\mathbf{M}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{D}}$$

$$rot(\vec{\mathbf{H}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{D}}$$