

**Лекция 2**  
**Интегральная и  
дифференциальная форма  
законов электродинамики**

# Закон сохранения электрического заряда

Величина заряда любого макроскопического тела в любом объеме пространства меняется со временем только за счет того, какая величина заряда попала в объем и ушла из него:

$$\frac{d}{dt}Q = -I,$$

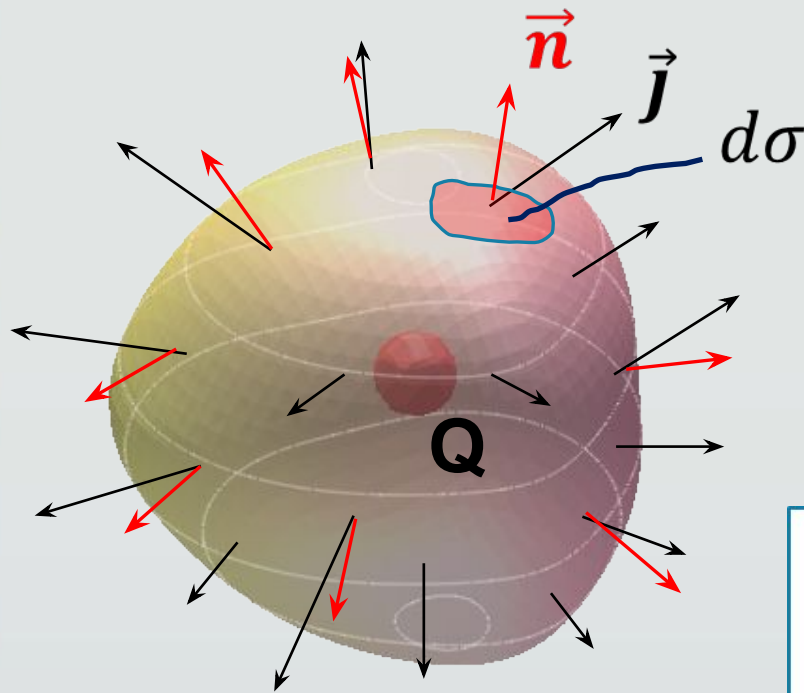
где  $I$  – сила тока - величина заряда, прошедшего через ограничивающую объем поверхность.

# Закон сохранения электрического заряда

В пределе непрерывной среды величина заряда  $Q$  в объеме  $V$  и величина силы тока  $I$  через границу  $\partial V$  этого объема равны:

$$Q = \int_V \rho dV$$

$$I = \oint_{\partial V} (\mathbf{j}, \mathbf{n}) d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{j}) dV$$



Плотность тока  $\mathbf{j}$  в любой точке среды можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i = e \sum_i n_i \mathbf{v}_i = \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

Здесь  $\mathbf{v}_i$  - скорость частицы с номером  $i$ .

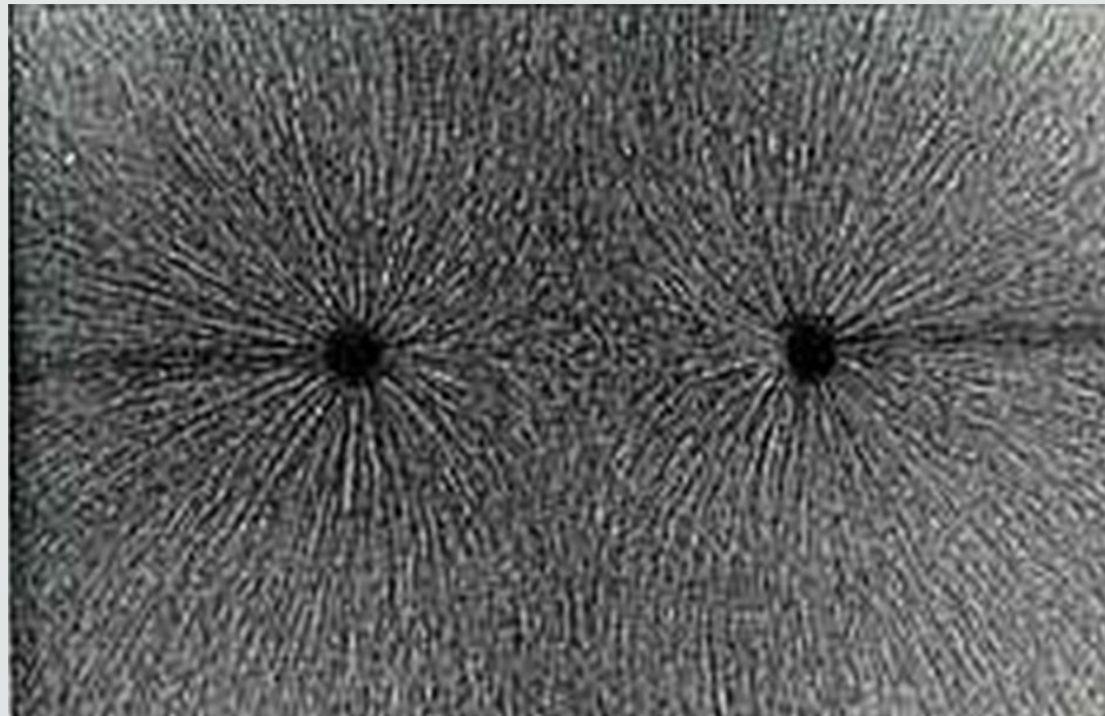
# Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = -I = -\int_V \operatorname{div}(\mathbf{j}) dV$$

Поскольку этот закон должен выполняться в любой точке среды, должно выполняться дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0$$

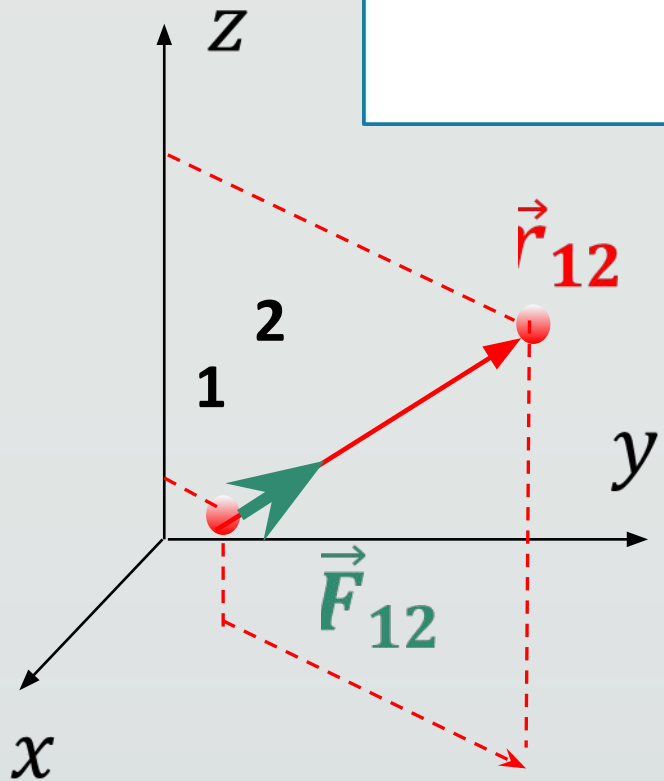
# Закон Кулона и уравнение Гаусса



# Закон Кулона для точечной частицы

Две точечные заряженные частицы в вакууме с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , расположенные на расстоянии  $|\vec{r}_{12}|$  друг от друга, взаимодействуют с силой:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$$



**Частицы должны быть точками!**

# Напряженность электрического поля

Согласно гипотезе Фарадея в пространстве вокруг любого заряженного объекта не зависимо от пробного заряда существует электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , величина которого для точечного заряда источника поля на расстоянии  $|\vec{r}|$  от него может быть рассчитана по формуле

$$\vec{E} = \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

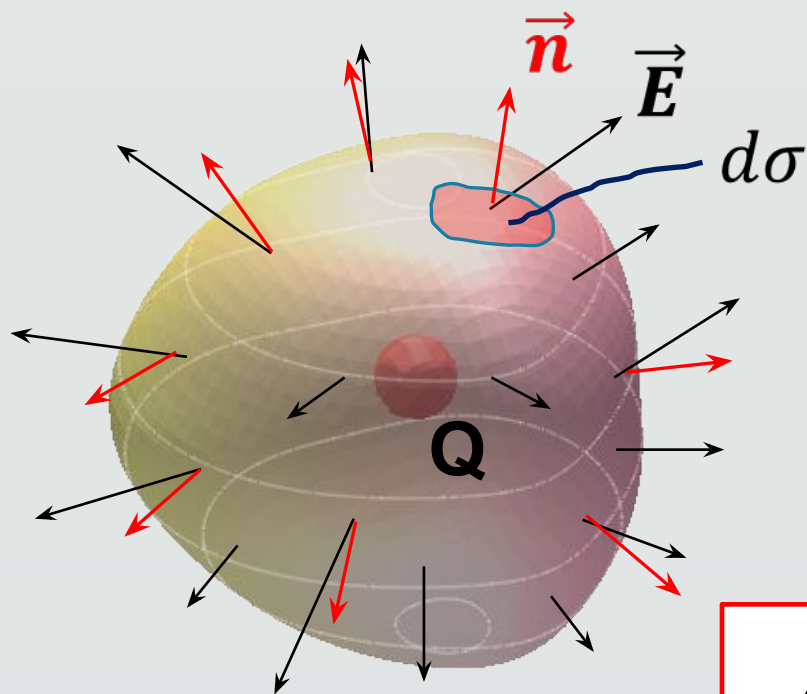
Напряженность  $\vec{E}$  есть сила  $\delta\vec{F}$  действующая на пробный бесконечно малый заряд  $\delta q$ , отнесенная к этому заряду!

$$\vec{E} = \frac{\delta\vec{F}}{\delta q}$$

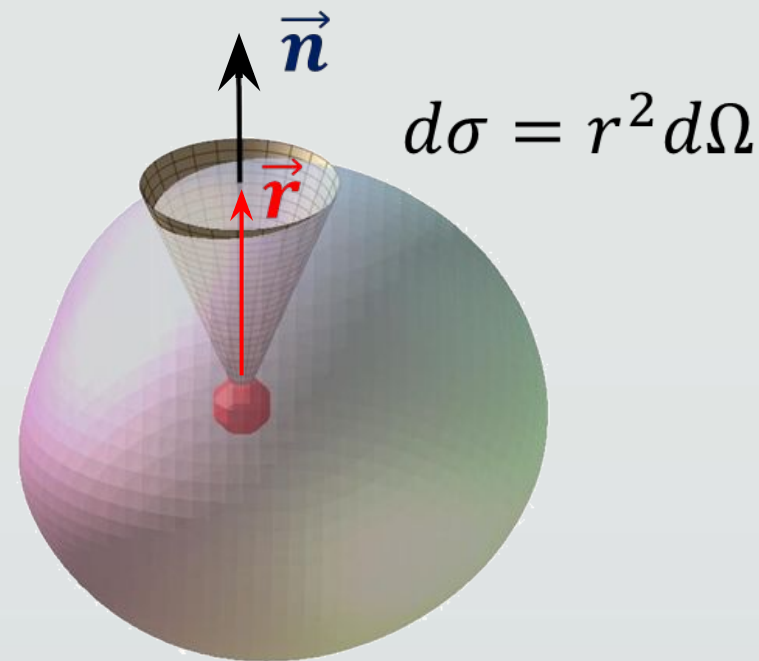
# Поток электрического поля через поверхность

Поток электрического поля через поверхность

$$\Phi = \oint_{\partial V} (\mathbf{E}, \mathbf{n}) d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}) dV$$



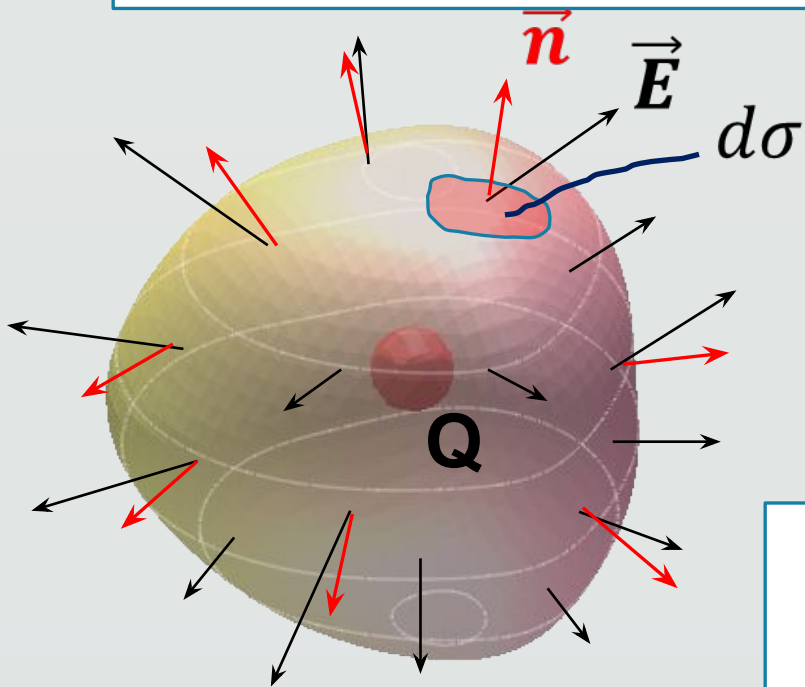
$$d\Omega = \frac{1}{r^3} (\mathbf{r}, \mathbf{n}) d\sigma$$





# Закон Кулона в дифференциальной форме

Поток электрического поля через поверхность по определению



$$\Phi = \oint_{\partial V} (\vec{E}, \vec{n}) d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV$$

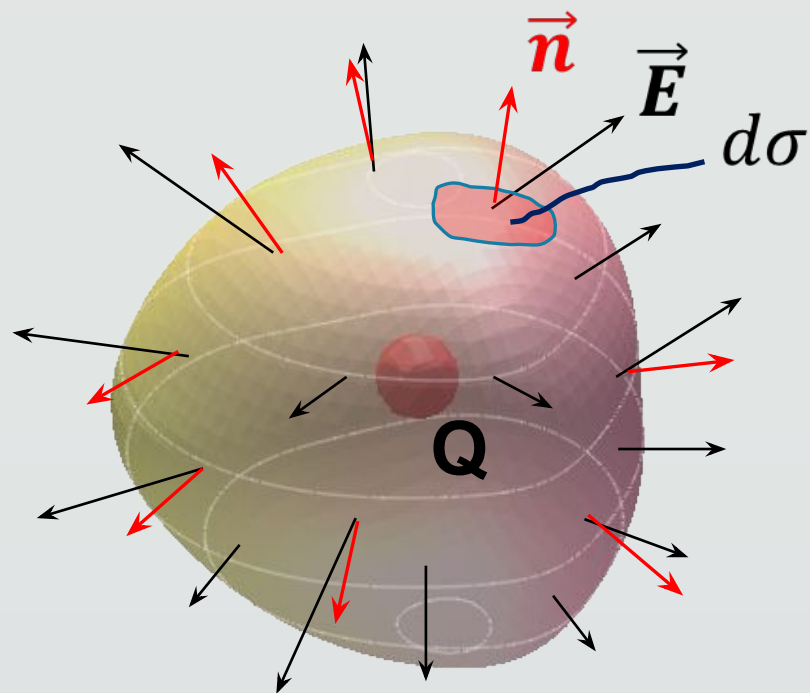
$$d\Omega = \frac{1}{r^3} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$$

Поток электрического поля через поверхность по закону Кулона

$$\Phi = \oint_{\partial V} (\vec{E}, \vec{n}) d\sigma = \oint_{\partial V} \left( \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \vec{n} \right) d\sigma = Q \int_{\partial V} d\Omega = 4\pi Q = 4\pi \int_V \rho dV$$

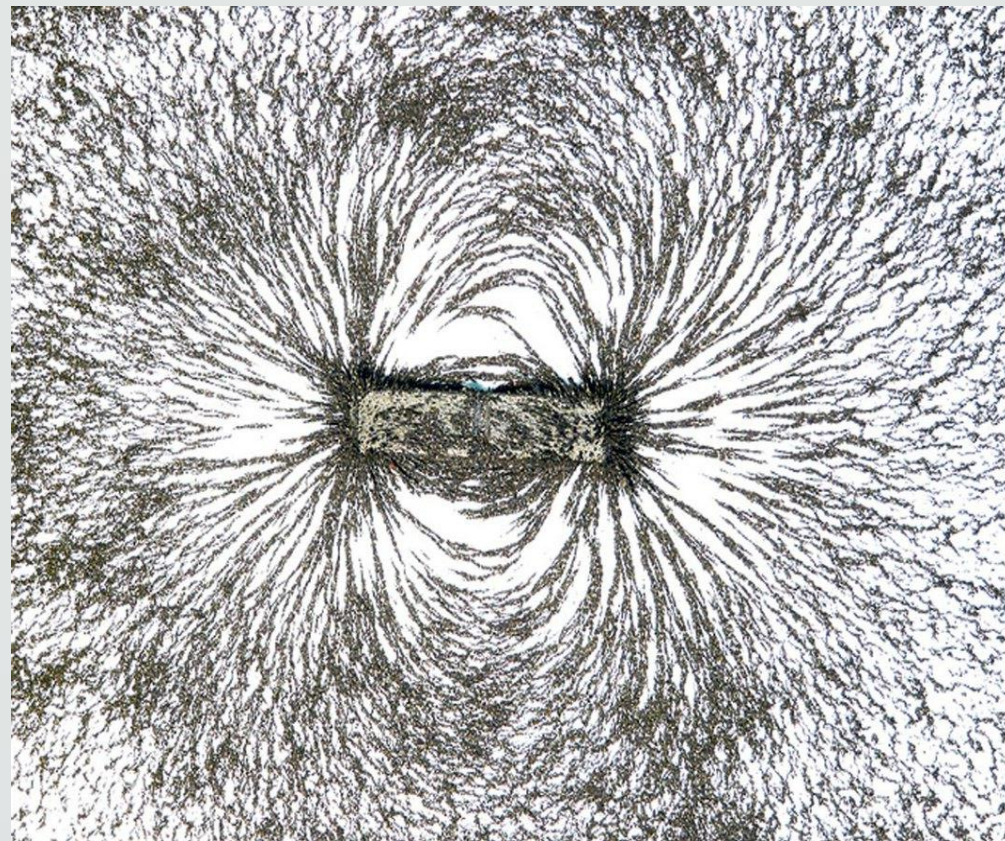
# Закон Кулона в дифференциальной форме

Поскольку формула справедлива для любого элементарного объема, то напряженность электрического поля должна удовлетворять уравнению:



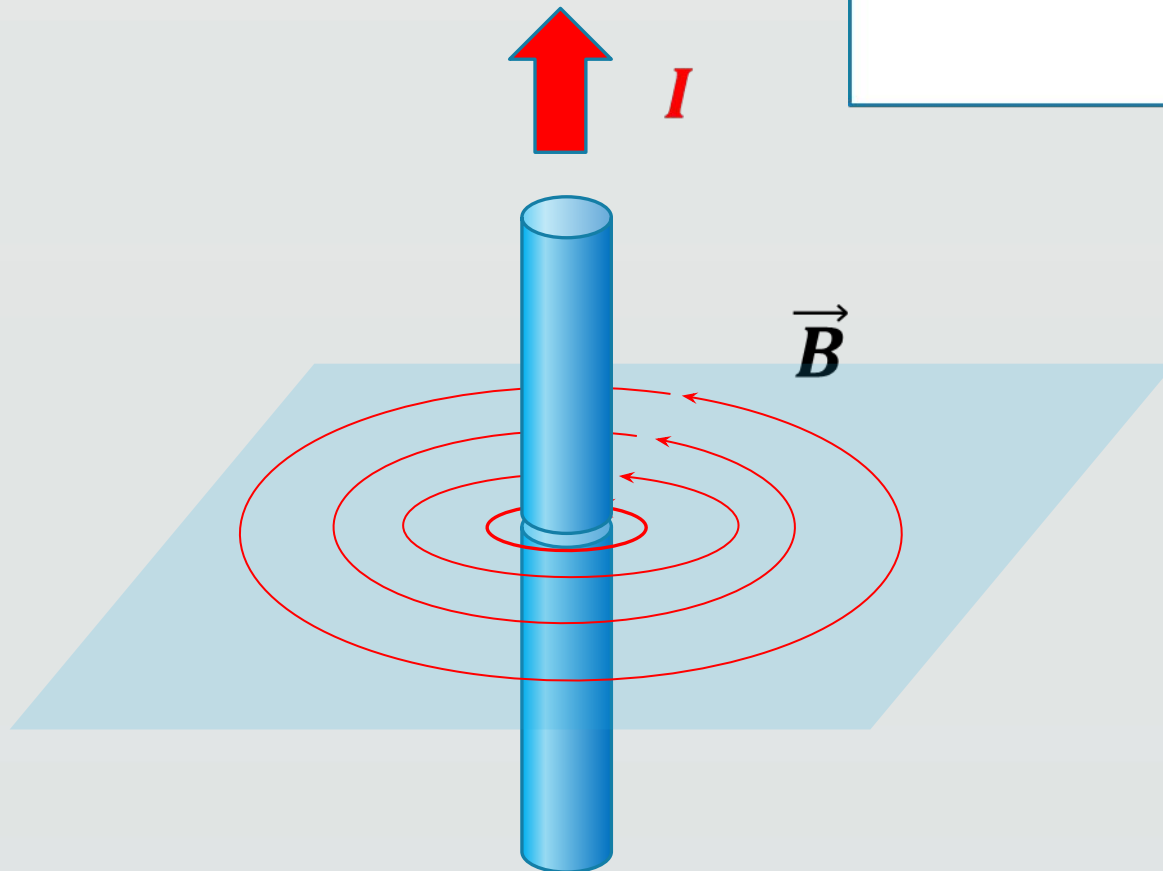
$$\text{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho$$

# Магнитное поле

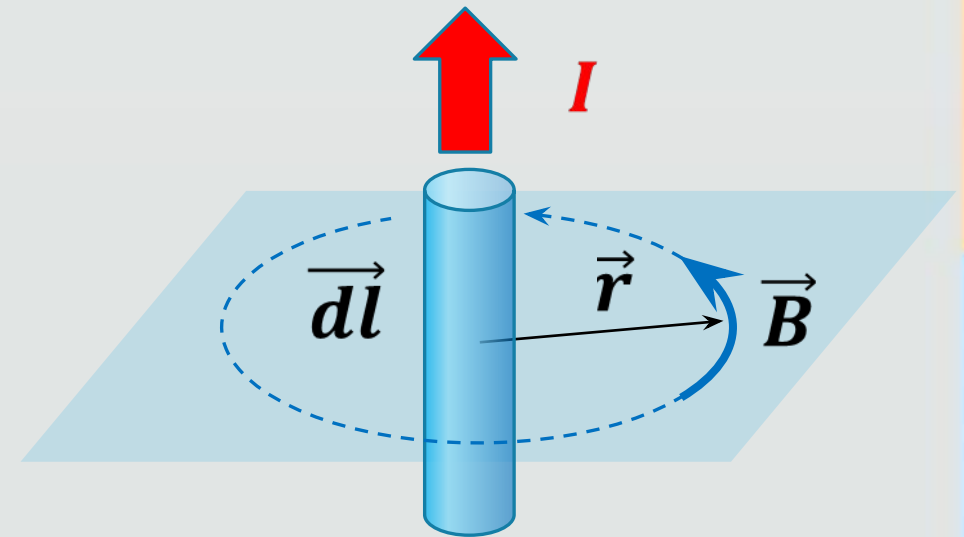


# Закон Био-Савара-Лапласа

Величина индукции  $\vec{B}$  на расстоянии  $r$  от проводника



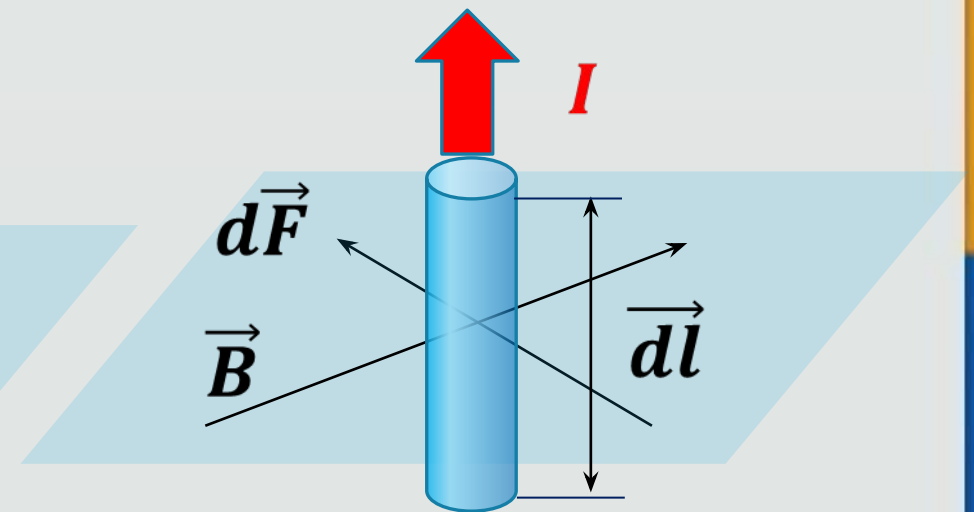
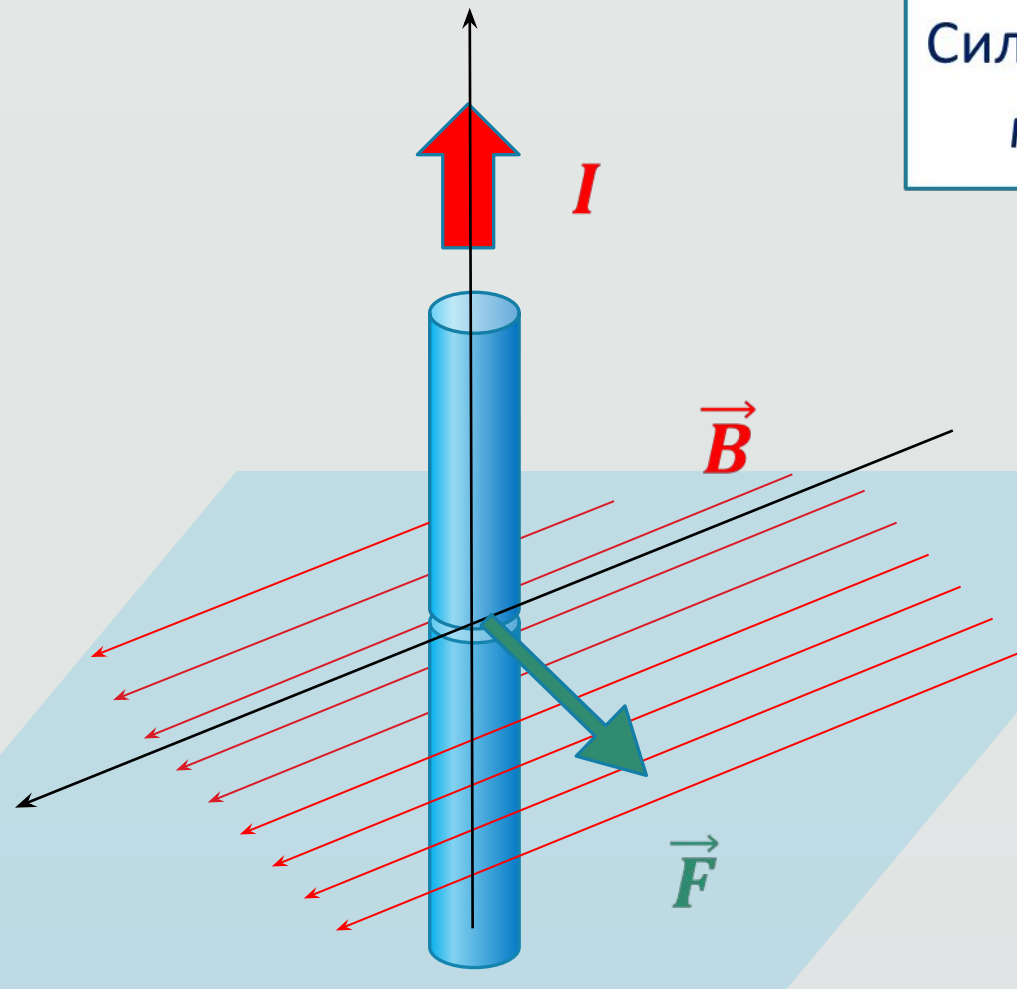
Силовые линии  
поля индукции  $\vec{B}$  вокруг проводника



$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{1}{r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}]$$

# Закон Ампера

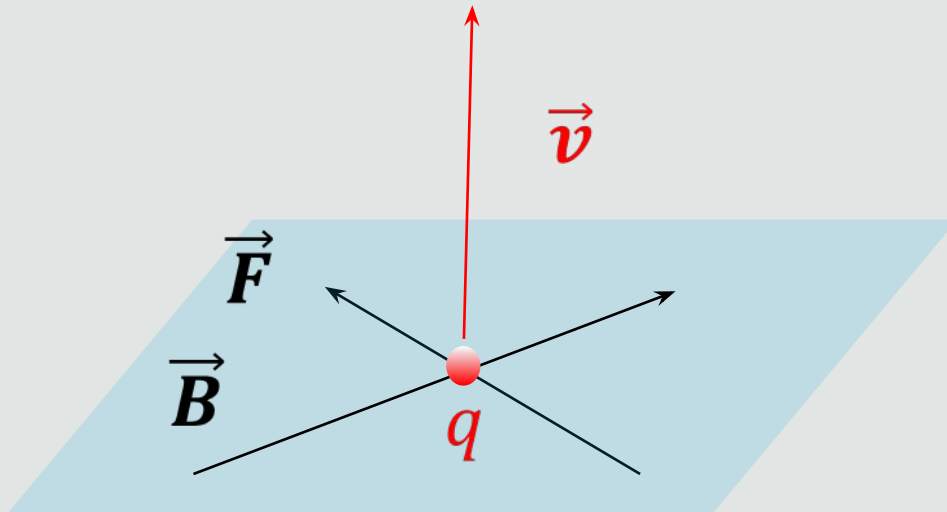
Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$



$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

# Сила Лоренца

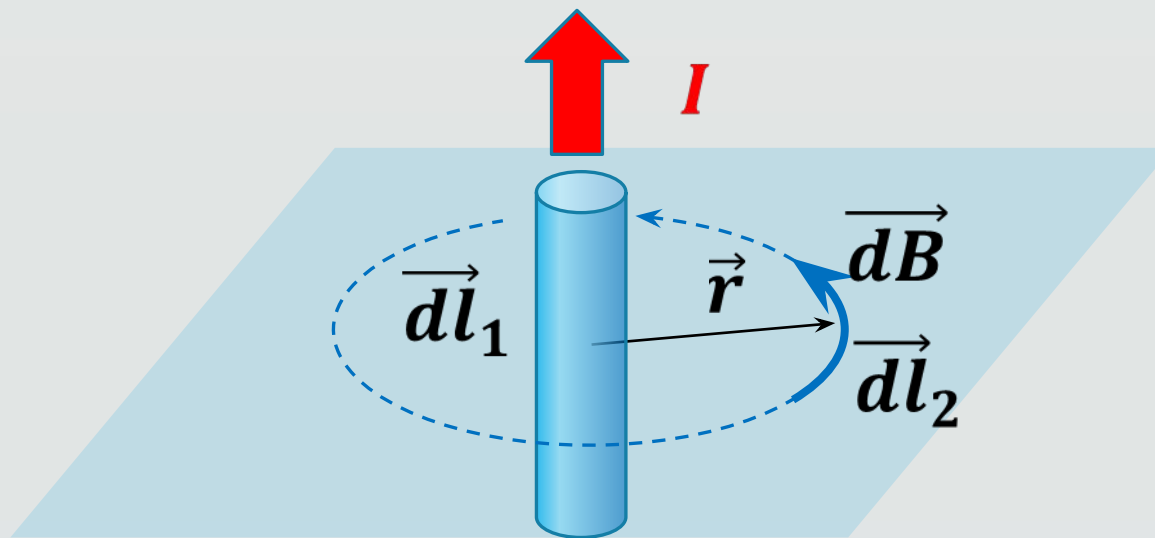
Сила, действующая на точечный заряд в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , называется **силой Лоренца**



$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

# Интегральный закон Ампера

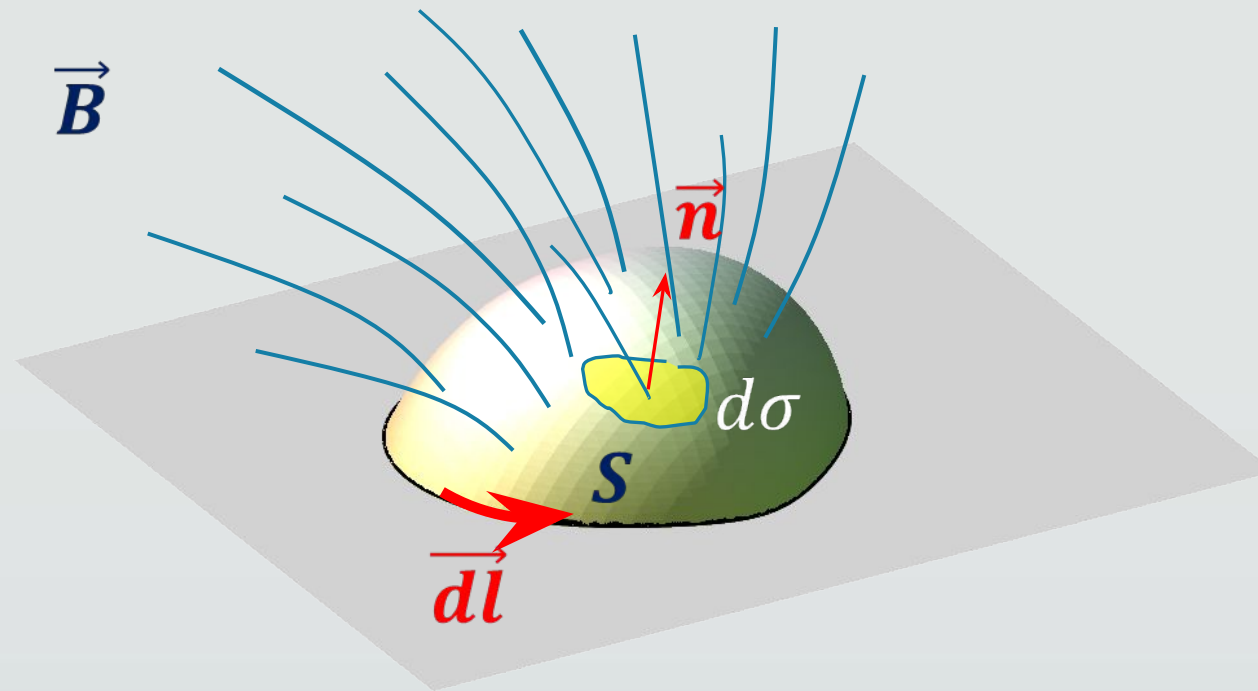
$$\oint (d\mathbf{l}_2, d\mathbf{B}) = \oint (d\mathbf{l}_2, \mathbf{B}) = \frac{I}{c} \oint \frac{1}{r^3} ([d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}], d\mathbf{l}_2) = \frac{4\pi}{c} I$$



$$\oint (d\mathbf{l}_2, \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} I$$

# Теорема Стокса

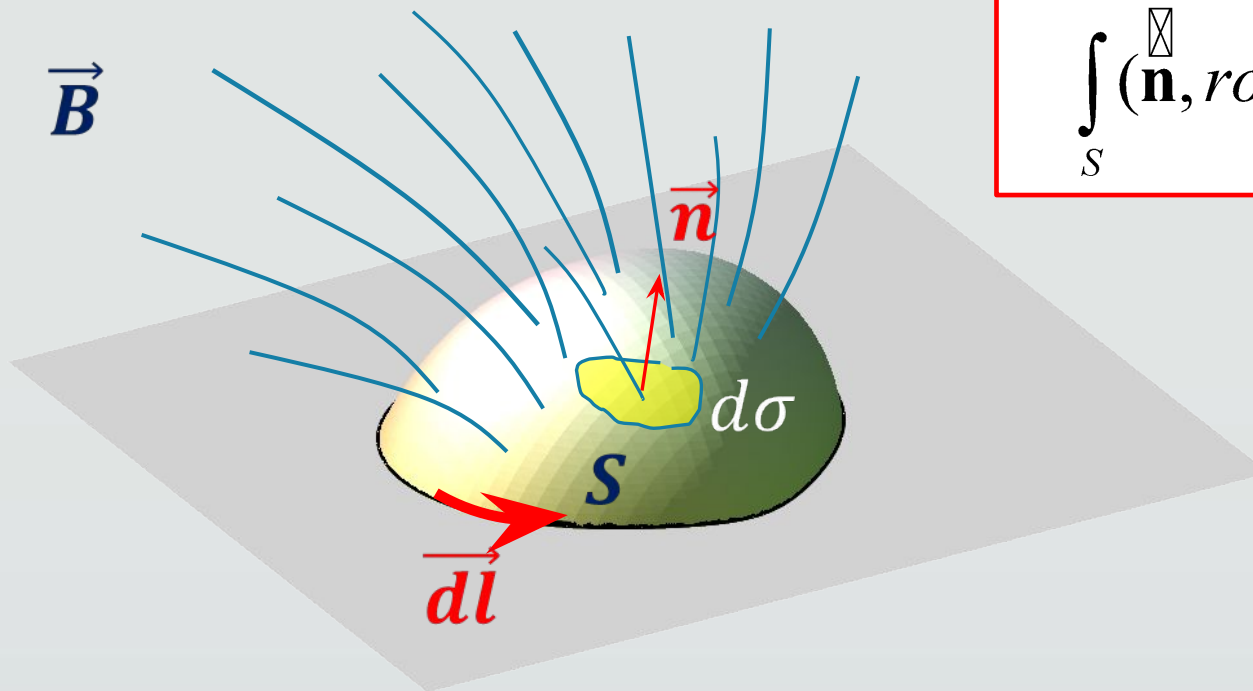
$$\oint_C (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{B}) d\sigma$$





# Законы электромагнитной индукции в дифференциальной форме

$$\oint_C (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{B}) d\sigma = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{j}) d\sigma$$



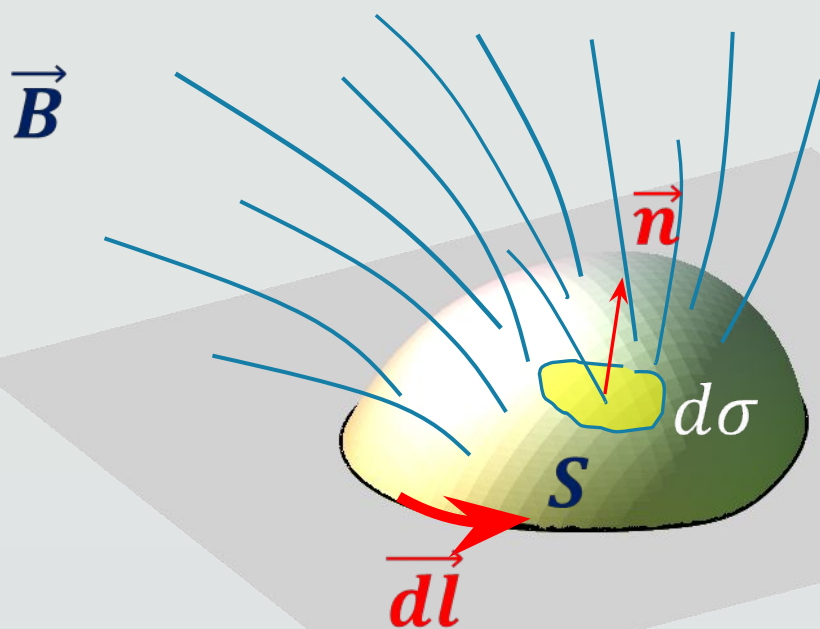
$$\int_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{B}) d\sigma = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{j}) d\sigma$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

# Закон электромагнитной индукции Фарадея

Поток индукции  $\vec{B}$  через поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S (\vec{B}, \vec{n}) d\sigma$$



Э.д.с.  $\mathcal{E}$ , наводимая в контуре при изменении потока магнитной индукции равна скорости изменения потока с обратным знаком

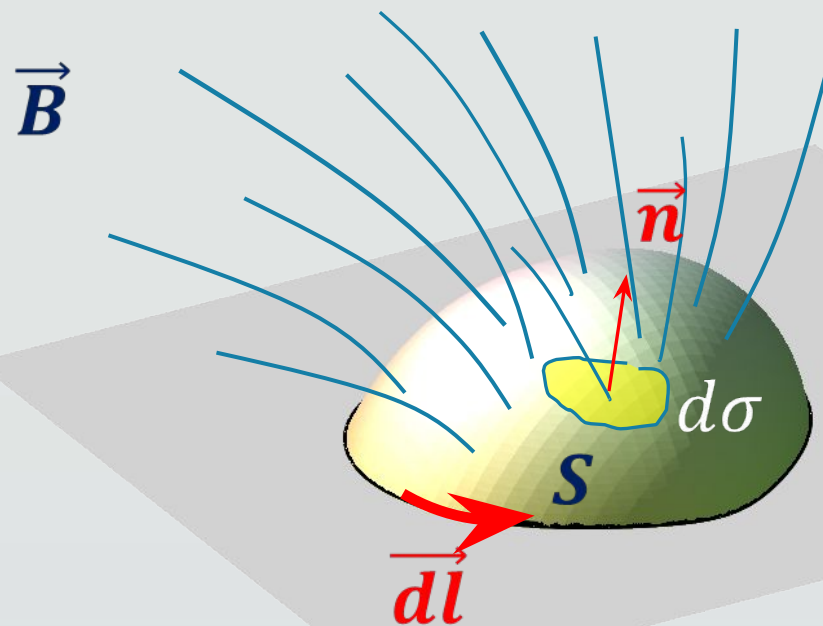
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

# Закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B}, \mathbf{n}) d\sigma = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{n} \right) d\sigma$$

$$E = \oint_C (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{E}) d\sigma$$

$$\mathbf{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

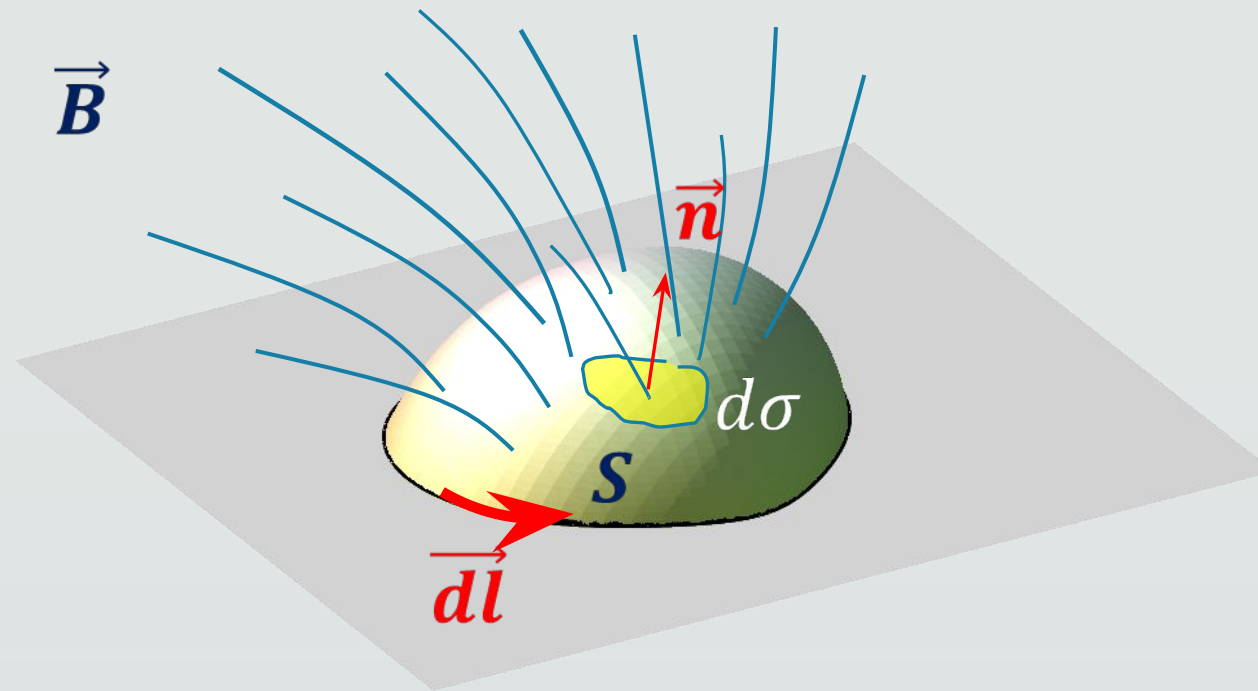


$$\int_S (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{E}) d\sigma = - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{n} \right) d\sigma$$

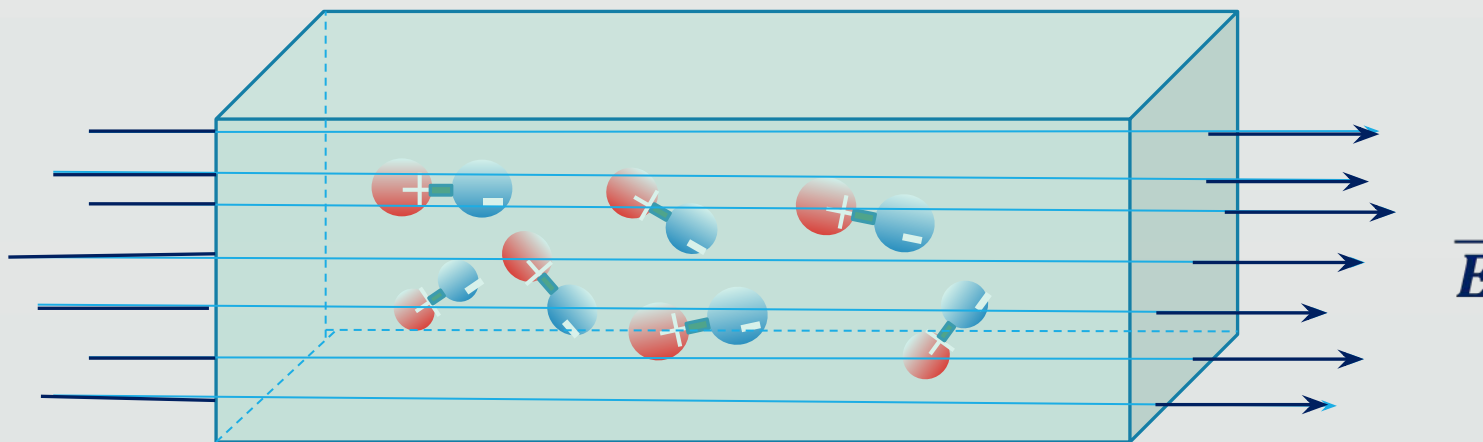
$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

# Теорема Стокса

$$\oint_C (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{B}) d\sigma$$



# Диэлектрики



$$\vec{P} = \rho_{св}^+ \vec{q}^+ + \rho_{св}^- \vec{q}^- + \rho_{св}^+ \vec{q}$$

$\vec{P}$  - векторное поле поляризации,  
 $\rho_{св}$  - плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,  
 $\vec{q}$  - усредненный дипольный момент в данной точке среды

# Первое уравнение Максвелла

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}} = (1 + 4\pi\chi) \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$\vec{\mathbf{D}}$  - индукция электрического поля,  
 $\rho$  - плотность электрического заряда,  
 $\chi$  - диэлектрическая восприимчивость (поляризация),  
 $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды.

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

# Магнитное поле в магнетике

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}}) = 4\pi(\rho + \rho_{\text{св}})$$

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{P}}) = -\rho_{\text{св}}$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \rho_{\text{св}}^+ \vec{\mathbf{q}}^+ + \rho_{\text{св}}^- \vec{\mathbf{q}}^- + \rho_{\text{св}}^+ \vec{\mathbf{q}}$$

$\vec{\mathbf{P}}$  - векторное поле поляризации,  
 $\rho_{\text{св}}$  - плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,  
 $\vec{\mathbf{q}}$  - усредненный дипольный момент в данной точке среды

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}}) = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$

# Первое уравнение Максвелла

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi \vec{\mathbf{E}}$$

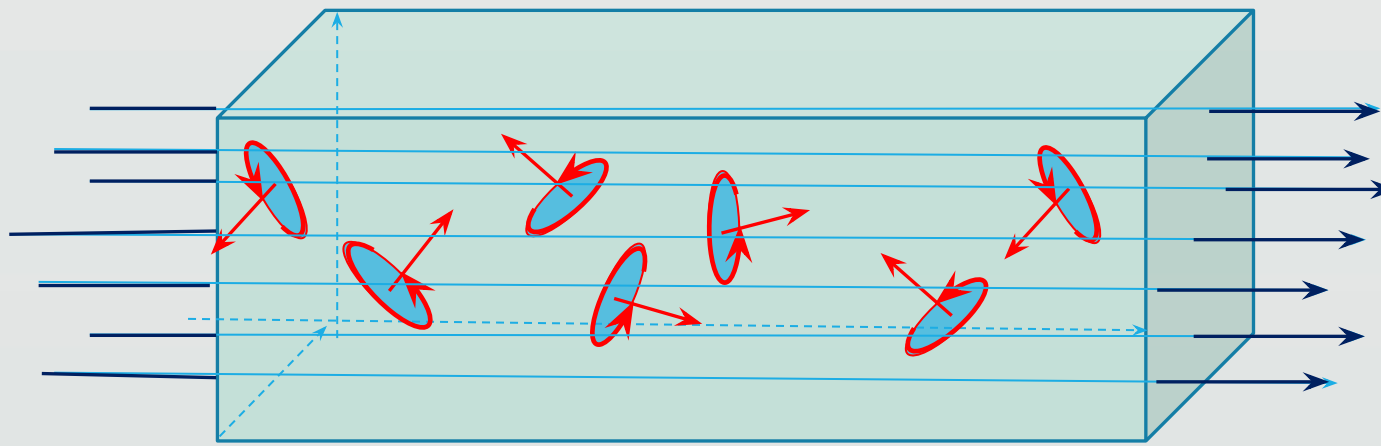
$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}} = (1 + 4\pi\chi) \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$\vec{\mathbf{D}}$  - индукция электрического поля,  
 $\rho$  - плотность электрического заряда,  
 $\chi$  - диэлектрическая восприимчивость (поляризация),  
 $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды.

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{D}}) = 4\pi\rho$$



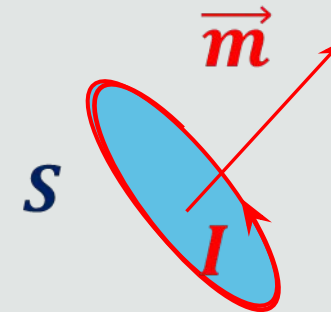
# Магнетики



Магнитный момент

$\vec{B}$

$$\vec{m} = \frac{IS}{c} \vec{n}$$



$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i$$

$\vec{M}$  - векторное поле намагниченности,  
 $\rho_{св}$  - плотность связанных электрических зарядов в диэлектрике,  
 $\vec{m}_i$  - магнитный момент в данной точке среды

# Магнетики

$$\vec{j}_M = 4\pi \cdot \text{rot}(\vec{M})$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\alpha)\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$$

$\vec{H}$  - напряженность магнитного поля,  
 $\vec{j}_M$  - ток намагничивания,  
 $\alpha$  - магнитная восприимчивость,  
 $\mu$  - магнитная проницаемость среды.

# Магнетики

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$\vec{P}$  - поляризация,  $\vec{j}_P$  - ток поляризации,

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_M + \vec{j}_P)$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \text{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$