

# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Урок алгебры в 9 классе (занятие элективного курса) по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих модули». Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области  
Лодина Виолетта Сергеевна.

**«Модуль»** (от лат. *modulus*-мера) ввёл английский математик Р. Котес (1815-1716г.г.) Знак модуля - немецкий математик (в 1841г.) К. Вейерштрасс (1815-1897г.г.)

**Модуль числа  $a$  есть расстояние от нуля до точки  $a$ ,**  $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

**Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, соответствующим этим точкам.**

$$|x - b| = a, a \geq 0, \quad \begin{cases} x - b = a \\ x - b = -a \end{cases}$$

**Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно решить простейшие уравнения и неравенства с модулем. Простейшие уравнения и неравенства удобно решать с помощью равносильных преобразований: возведение в квадрат и т.д.**

**ВВЕДЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ.**

# КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

На занятии изучается методика решения уравнений и неравенств, содержащих модули. Даётся подробная классификация уравнений и неравенств с модулем.

## УРАВНЕНИЯ

$$\square |f(x)| = a$$
$$a \geq 0, a - \text{const}$$

$$\begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$$1) |x^2 - 5x| = 6$$

$$2) |2x - 3| = 1$$

$$3) ||x| - 2| = 4$$

## НЕРАВЕНСТВА

$$\square |f(x)| \leq a,$$
$$-a \leq f(x) \leq a, \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

$$\square |f(x)| \geq a, a \geq 0, \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$$1) |x^2 - 5x| \leq 6$$

$$2) |5x - 3| \leq 4$$

$$3) \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2$$

$$1) |x^2 - 5| \geq 4$$

$$2) |5x - 3| \geq 2$$

$$3) |2x - 6| \geq 3$$

# 1 РАЗДЕЛ

## ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

## Уравнения

$$\square |f(x)| = g(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = g \\ f = -g \\ g \geq 0 \end{array} \right.$$

$$1) |x^2 + x - 1| = 2x - 1$$

$$2) |x^2 + 3x - 10| = 3x - 1$$

$$3) x^3 - |x - 1| = 1$$

## Неравенства

$$\square |f(x)| \leq g(x)$$

$$-g \leq f \leq g \quad \left\{ \begin{array}{l} f \leq g \\ f \geq -g \end{array} \right.$$

$$\square |f(x)| \geq g(x), \quad \left\{ \begin{array}{l} f \geq g \\ f \leq -g \end{array} \right.$$

$$1) |x - 1| \leq 2x + 1$$

$$2) |x^2 - x| \leq x$$

$$3) |x^2 - x| \leq x + 2$$

$$1) \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \geq x$$

$$2) |3x + 2| + x > 1$$

$$3) \left| \frac{1}{x} - 1 \right| > x + 2$$

## 2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

## Уравнения

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[ \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \right]$$

$$1) x|x| + 7x + 12 = 0$$

$$2) x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$$

$$3) x^2 - 3x + \frac{3,5-x}{|x-3,5|} = 0$$

## Неравенства

$$1) \frac{|x-2|}{x+4} < 1$$

$$2) \frac{|x-1|+x+1}{2-x} \geq 2$$

$$3) \frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[ \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \right]$$

## 3 РАЗДЕЛ

## СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ

## Уравнения

$$\square |f(x)| = |g(x)|$$
$$\begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases}$$

- 1)  $|x - x^2 - 1| = |2x + 3 - x^2|$
- 2)  $|4 - y| = |2y + 1|$
- 3)  $|x - 2| = 3|3 - x|$

## Неравенства

$$\square |f(x)| \geq |g(x)|$$
$$(f - g)(f + g) \geq 0$$

- 1)  $|x + x^2 - 3| \leq |x - 3 + 2x^2|$
- 2)  $|3x - 1| < |2x - 5|$
- 3)  $|2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$

## 4 РАЗДЕЛ ДВА МОДУЛЯ

## Уравнения

## Неравенства

- ❑ Метод промежутков.
- ❑ Находим корни подмодульных выражений.
- ❑ Составим совокупность нескольких систем.

$$1) 2|x - 1| - 3|x + 4| = 1$$

$$2) \frac{4|x-3|-x}{2-|x-2|} = 4$$

$$3) |x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$$

$$1) |x^2 - 2x| + |x - 1| \leq x^2$$

$$2) |3 - x| - |x - 2| \leq 5$$

$$3) |2x - 6| + |4 - x| \leq |x - 2|$$

## 5 РАЗДЕЛ НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ

## Уравнения

$$\square |f(x)| = t, \quad t \geq 0, \\ f^2 = t^2$$

$$1) (x - 2)^2 - 8|x - 2| + 15 = 0$$

$$2) x^2 + |x| - 6 = 0$$

$$3) x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$$

## Неравенства

$$\square a \leq |x| \leq b, \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{cases}$$

$$\square |x| \geq a, \quad \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}, \quad a \geq 0$$

$$1) x^2 - |x| - 12 \geq 0$$

$$2) 20 - 3x^2 + 11|x| > 0$$

$$3) x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$$

## 6 РАЗДЕЛ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

**Уравнения**

**Неравенства**

Совокупность систем

Замена переменной

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С  
МОДУЛЕМ**

$$|f(x)| = a, \quad a \geq 0, \\ \begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x), \quad \begin{cases} \begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases} \\ g \geq 0 \end{cases}$$

**Пример №1**  $|x^2 - 5x| = 6$

**Решение**  $\begin{cases} x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6, x_2 = -1 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{cases}$$

**Ответ**  $\{-1; 2; 3; 6\}$

**Пример №1**  $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$

**Решение**  $\begin{cases} x^2 + x - 1 = 2x - 1 \\ x^2 + x - 1 = -2x + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \quad x \geq 0,5$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

**Ответ**  $\left\{1; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ  
САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2**

$$|2x - 3| = 1$$

**ОТВЕТ**  $\{1; 2\}$

$$|f(x)| \leq a, a \geq 0, a - \text{const}$$

$$-a \leq f(x) \leq a, \quad \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \geq a, \quad \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$$a \geq 0, \quad a - \text{const}$$

**Пример №1**  $|x^2 - 5x| \leq 6$

**Решение**  $-6 \leq x^2 - 5x \leq 6$

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6 \\ x^2 - 5x \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

**Ответ**  $[-1; 2] \cup [3; 6]$

**Пример №1**  $|x^2 - 5| \geq 4$

**Решение**

$$\begin{cases} x^2 - 5 \geq 4 \\ x^2 - 5 \leq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Ответ**  $(-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА С  
МОДУЛЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2**

$|5x - 3| \leq 4$       **ОТВЕТ**  $[-0, 2; 1, 4]$

$$|f(x)| = a, \begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$a \geq 0, a - \text{const}$

$$|f(x)| \geq a, \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$a \geq 0, a - \text{const}$

$$|f(x)| = g(x), \begin{cases} f = g \\ f = -g \\ g \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq a, a \geq 0, a - \text{const}$$
$$-a \leq f(x) \leq a, \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

**Пример №2**  $|2x - 3| = 1$

**Решение**  $\begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

**Ответ** {1; 2}

**Пример №2**  $|5x - 3| \leq 4$

**Решение**

$$-4 \leq 5x - 3 \leq 4,$$

$$-1 \leq 5x \leq 4,$$

$$-0,2 \leq x \leq 1,4$$

**Ответ** [-0,2; 1,4]

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И  
НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ  
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[ \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \right]$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[ \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \right]$$

**Пример №1**  $\frac{|x-2|}{x+4} < 1$

Ответ  $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$

$$\left[ \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+4} < 1 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-2-x-4}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{-6}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x \geq 2 \\ x+4 > 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x \geq 2 \\ x > -4 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x-2 < 0 \\ \frac{-x+2}{x+4} < 1 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-x+2-x-4}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x < 2 \\ \frac{-2x-2}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x < 2 \\ \frac{2x+2}{x+4} > 0 \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} x < 2 \\ [x > -1 \\ x < -4 \end{cases} \right.$$

### 3 РАЗДЕЛ **СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ** САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$$

ОТВЕТ  $x = 6$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Пример №2**  $x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$  **Решение**

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x_1 = 6, x_2 = -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Ответ**  $x = 6$

### 3 РАЗДЕЛ **СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ** САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

$$|f(x)| = |g(x)|, \begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases}$$

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \\ (f - g)(f + g) \geq 0$$

№1  $|-x^2 + x - 1| = |-x^2 + 2x + 3|$

**Решение**

$$\begin{cases} -x^2 + x - 1 = -x^2 + 2x + 3 \\ -x^2 + x - 1 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -4 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = \frac{-1}{2}, x_3 = 2 \end{cases}$$

**Ответ**  $\{-4; 2; -0,5\}$

№1  $|x + x^2 - 3| \leq |x - 2 + 2x^2|$

**Решение**

$$\begin{aligned} (2x + 3x^2 - 5)(-x^2 - 1) &\leq 0 \\ (2x + 3x^2 - 5)(x^2 + 1) &\geq 0 \\ (2x + 3x^2 - 5) &\geq 0 \end{aligned}$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

**Ответ**  $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup [1; +\infty)$

## 4 РАЗДЕЛ ДВА МОДУЛЯ

### САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$|3x - 1| < |2x - 5|$$

**ОТВЕТ**  $(-4; 1, 2)$

## Уравнения

**Пример №2.**  $|3x - 1| < |2x - 5|$

$$(3x - 1 + 2x - 5)(3x - 1 - 2x + 5) < 0$$

$$(5x - 6)(x + 4) < 0, -4 \leq x \leq 1,2$$

**Ответ**  $(-4; 1,2)$

**Пример №1.**  $2|x - 1| - 3|x + 4| = 1$

**Решение**  $x_1 = 1, x_2 = -4$

$$\text{а)} \begin{cases} x \leq -4 \\ -2x + 2 + 3x + 12 = 1 \end{cases} \quad x = -13$$

$$\text{б)} \begin{cases} -4 \leq x \leq 1 \\ -2x + 2 - 3x - 12 = 1 \end{cases} \quad x = -2,2$$

$$\text{в)} \begin{cases} x > 1 \\ 2x - 2 - 3x - 12 = 1 \end{cases} \quad x = -15\text{-не уд.}$$

**Ответ**  $\{-13; -2,2\}$

## 5 РАЗДЕЛ

**НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ**  
МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ

**Пример №1.**  $|x^2 - 2x| + |x - 1| \leq x^2$

**Решение.**  $|(x - 2)x| + |x - 1| \leq x^2$ ,  $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$ ,

$$\text{а)} \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2x - x + 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \quad \emptyset$$

$$\text{б)} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x - x + 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 1 \\ x \leq -0,5 \end{cases}, \quad \emptyset$$

$$\text{в)} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 2x + x - 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 1 \\ x \leq 0,5 \end{cases} \quad [1; 2]$$

$$\text{г)} \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x + x - 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} (2; +\infty) \quad \text{Ответ} \quad [1; +\infty)$$

**Неравенства**

**5 РАЗДЕЛ**

**НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ**  
**МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ**

$$\square |f(x)| = t, t \geq 0$$

$$f^2 = t^2$$

$$\square a \leq |x| \leq b, \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{cases}$$

$$\square |x| \geq a, \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}, a \geq 0$$

**№1**  $(x - 2)^2 - 8|x - 2| + 15 = 0$

**Решение.**  $|x - 2| = t, t > 0$

$$t^2 - 8t + 15 = 0, t_1 = 5, t_2 = 3$$

$$\begin{cases} |x - 2| = 5 \\ |x - 2| = 3 \end{cases} \begin{cases} x - 2 = 5 \\ x - 2 = -5 \\ x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

**Ответ**  $\{-3; -1; 5; 7\}$

**Пример №1.**  $x^2 - |x| - 12 \geq 0$

**Решение.**  $|x| = t, t > 0$

$$t^2 - t - 12 = 0, \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq -3 \end{cases}$$

$$|x| \geq 4, \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

**Ответ**  $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

## 6 РАЗДЕЛ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$x^2 + |x| - 6 = 0$$

**ОТВЕТ**  $x_1 = -2, x_2 = 2$

## Замена переменной

**№2.**  $x^2 + |x| - 6 = 0$

**Решение.**  $|x| = t, t > 0$

$$t^2 + t - 6 = 0,$$

$$t_1 = -3, t_2 = 2, |x| = 2,$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2$$

**Ответ**  $x_1 = -2, x_2 = 2$

## Домашнее задание

1)  $||x| - 2| = 4$

3)  $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2$

2)  $|2x - 6| \geq 3$

4)  $x^3 - |x - 1| = 1$

5)  $|x^2 - x| \leq x + 2$

6)  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| > x + 2$

7)  $x^2 - 3x + \frac{3,5-x}{|x-3,5|} = 0$

8)  $\frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$

9)  $|x - 2| = 3|3 - x|$

10)  $|2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$

11)  $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$

12)  $|2x - 6| + |4 - x| \leq |x - 2|$

13)  $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$

14)  $x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$

**ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.**  
**ПРИМЕРЫ №3 ( 1-6 РАЗДЕЛЫ).**