

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Урок алгебры в 9 классе (занятие элективного курса) по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих модули». Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области
Лодина Виолетта Сергеевна.

«Модуль» (от лат. *modulus*-мера) ввёл английский математик Р. Котес (1815-1716г.г.) Знак модуля - немецкий математик (в 1841г.) К. Вейерштрасс (1815-1897г.г.)

Модуль числа a есть расстояние от нуля до точки a , $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, соответствующим этим точкам.

$$|x - b| = a, a \geq 0, \quad \begin{cases} x - b = a \\ x - b = -a \end{cases}$$

Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно решить простейшие уравнения и неравенства с модулем. Простейшие уравнения и неравенства удобно решать с помощью равносильных преобразований: возведение в квадрат и т.д.

ВВЕДЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ.

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

**На занятии изучается методика
решения уравнений и
неравенств, содержащих модули.
Даётся подробная
классификация уравнений и
неравенств с модулем.**

УРАВНЕНИЯ

$$\square |f(x)| = a$$
$$a \geq 0, a - \text{const}$$

$$\begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$$1) |x^2 - 5x| = 6$$

$$2) |2x - 3| = 1$$

$$3) ||x| - 2| = 4$$

НЕРАВЕНСТВА

$$\square |f(x)| \leq a,$$
$$-a \leq f(x) \leq a, \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

$$\square |f(x)| \geq a, a \geq 0, \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$$1) |x^2 - 5x| \leq 6$$

$$2) |5x - 3| \leq 4$$

$$3) \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2$$

$$1) |x^2 - 5| \geq 4$$

$$2) |5x - 3| \geq 2$$

$$3) |2x - 6| \geq 3$$

1 РАЗДЕЛ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения

$$\square |f(x)| = g(x)$$

$$\begin{cases} f = g \\ f = -g \\ g \geq 0 \end{cases}$$

$$1) |x^2 + x - 1| = 2x - 1$$

$$2) |x^2 + 3x - 10| = 3x - 1$$

$$3) x^3 - |x - 1| = 1$$

Неравенства

$$\square |f(x)| \leq g(x)$$

$$-g \leq f \leq g \quad \begin{cases} f \leq g \\ f \geq -g \end{cases}$$

$$\square |f(x)| \geq g(x), \quad \begin{cases} f \geq g \\ f \leq -g \end{cases}$$

$$1) |x - 1| \leq 2x + 1$$

$$2) |x^2 - x| \leq x$$

$$3) |x^2 - x| \leq x + 2$$

$$1) \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \geq x$$

$$2) |3x + 2| + x > 1$$

$$3) \left| \frac{1}{x} - 1 \right| > x + 2$$

2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[\begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \right]$$

$$1) x|x| + 7x + 12 = 0$$

$$2) x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$$

$$3) x^2 - 3x + \frac{3,5-x}{|x-3,5|} = 0$$

Неравенства

$$1) \frac{|x-2|}{x+4} < 1$$

$$2) \frac{|x-1|+x+1}{2-x} \geq 2$$

$$3) \frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[\begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \right]$$

3 РАЗДЕЛ

СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ

Уравнения

$$\square |f(x)| = |g(x)|$$
$$\begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases}$$

$$1) |x - x^2 - 1| = |2x + 3 - x^2|$$

$$2) |4 - y| = |2y + 1|$$

$$3) |x - 2| = 3|3 - x|$$

Неравенства

$$\square |f(x)| \geq |g(x)|$$
$$(f - g)(f + g) \geq 0$$

$$1) |x + x^2 - 3| \leq |x - 3 + 2x^2|$$

$$2) |3x - 1| < |2x - 5|$$

$$3) |2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$$

4 РАЗДЕЛ ДВА МОДУЛЯ

Уравнения

Неравенства

- ❑ Метод промежутков.
- ❑ Находим корни подмодульных выражений.
- ❑ Составим совокупность нескольких систем.

$$1) 2|x - 1| - 3|x + 4| = 1$$

$$2) \frac{4|x-3|-x}{2-|x-2|} = 4$$

$$3) |x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$$

$$1) |x^2 - 2x| + |x - 1| \leq x^2$$

$$2) |3 - x| - |x - 2| \leq 5$$

$$3) |2x - 6| + |4 - x| \leq |x - 2|$$

5 РАЗДЕЛ НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ

Уравнения

$$\square |f(x)| = t, \quad t \geq 0, \\ f^2 = t^2$$

$$1) (x - 2)^2 - 8|x - 2| + 15 = 0$$

$$2) x^2 + |x| - 6 = 0$$

$$3) x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$$

Неравенства

$$\square a \leq |x| \leq b, \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{cases}$$

$$\square |x| \geq a, \quad \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}, \quad a \geq 0$$

$$1) x^2 - |x| - 12 \geq 0$$

$$2) 20 - 3x^2 + 11|x| > 0$$

$$3) x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$$

6 РАЗДЕЛ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнения

Неравенства

Совокупность систем

Замена переменной

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С
МОДУЛЕМ**

$$|f(x)| = a, \quad a \geq 0, \\ \begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x), \quad \begin{cases} \begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases} \\ g \geq 0 \end{cases}$$

Пример №1 $|x^2 - 5x| = 6$

Решение $\begin{cases} x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6, x_2 = -1 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{cases}$$

Ответ $\{-1; 2; 3; 6\}$

Пример №1 $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$

Решение $\begin{cases} x^2 + x - 1 = 2x - 1 \\ x^2 + x - 1 = -2x + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \quad x \geq 0,5$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ $\left\{1; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2**

$$|2x - 3| = 1$$

ОТВЕТ $\{1; 2\}$

$$|f(x)| \leq a, a \geq 0, a - \text{const}$$

$$-a \leq f(x) \leq a, \quad \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \geq a, \quad \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$$a \geq 0, \quad a - \text{const}$$

Пример №1 $|x^2 - 5x| \leq 6$

Решение $-6 \leq x^2 - 5x \leq 6$

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6 \\ x^2 - 5x \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Ответ $[-1; 2] \cup [3; 6]$

Пример №1 $|x^2 - 5| \geq 4$

Решение

$$\begin{cases} x^2 - 5 \geq 4 \\ x^2 - 5 \leq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 9 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ответ $(-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА С
МОДУЛЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2**

$|5x - 3| \leq 4$ **ОТВЕТ** $[-0, 2; 1, 4]$

$$|f(x)| = a, \begin{cases} f = a \\ f = -a \end{cases}$$

$a \geq 0, a - \text{const}$

$$|f(x)| \geq a, \begin{cases} f \geq a \\ f \leq -a \end{cases}$$

$a \geq 0, a - \text{const}$

$$|f(x)| = g(x), \begin{cases} f = g \\ f = -g \\ g \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq a, a \geq 0, a - \text{const}$$
$$-a \leq f(x) \leq a, \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$$

Пример №2 $|2x - 3| = 1$

Решение $\begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ {1; 2}

Пример №2 $|5x - 3| \leq 4$

Решение

$$-4 \leq 5x - 3 \leq 4,$$

$$-1 \leq 5x \leq 4,$$

$$-0,2 \leq x \leq 1,4$$

Ответ [-0,2; 1,4]

**1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И
НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[\begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \right]$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[\begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \right]$$

Пример №1 $\frac{|x-2|}{x+4} < 1$

Ответ $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$

$$\left[\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+4} < 1 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{x-2-x-4}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{-6}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x \geq 2 \\ x+4 > 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -4 \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x-2 < 0 \\ \frac{-x+2}{x+4} < 1 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x < 2 \\ \frac{-x+2-x-4}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x < 2 \\ \frac{-2x-2}{x+4} < 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x < 2 \\ \frac{2x+2}{x+4} > 0 \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x < 2 \\ [x > -1 \\ x < -4 \end{cases} \right.$$

3 РАЗДЕЛ **СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ** САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$$

ОТВЕТ $x = 6$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Пример №2 $x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$ **Решение**

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x_1 = 6, x_2 = -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ $x = 6$

3 РАЗДЕЛ **СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ** САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

$$|f(x)| = |g(x)|, \begin{cases} f = g \\ f = -g \end{cases}$$

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \\ (f - g)(f + g) \geq 0$$

№1 $|-x^2 + x - 1| = |-x^2 + 2x + 3|$

Решение

$$\begin{cases} -x^2 + x - 1 = -x^2 + 2x + 3 \\ -x^2 + x - 1 = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -4 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ x_1 = \frac{-1}{2}, x_2 = 2 \end{cases}$$

Ответ $\{-4; 2; -0,5\}$

№1 $|x + x^2 - 3| \leq |x - 2 + 2x^2|$

Решение

$$(2x + 3x^2 - 5)(-x^2 - 1) \leq 0$$
$$(2x + 3x^2 - 5)(x^2 + 1) \geq 0$$
$$(2x + 3x^2 - 5) \geq 0$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ответ $(-\infty; -\frac{5}{3}] \cup [1; +\infty)$

4 РАЗДЕЛ ДВА МОДУЛЯ

САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$|3x - 1| < |2x - 5|$$

ОТВЕТ $(-4; 1, 2)$

Уравнения

Пример №2. $|3x - 1| < |2x - 5|$

$$(3x - 1 + 2x - 5)(3x - 1 - 2x + 5) < 0$$

$$(5x - 6)(x + 4) < 0, -4 \leq x \leq 1,2$$

Ответ $(-4; 1,2)$

Пример №1. $2|x - 1| - 3|x + 4| = 1$

Решение $x_1 = 1, x_2 = -4$

$$\text{а)} \begin{cases} x \leq -4 \\ -2x + 2 + 3x + 12 = 1 \end{cases} \quad x = -13$$

$$\text{б)} \begin{cases} -4 \leq x \leq 1 \\ -2x + 2 - 3x - 12 = 1 \end{cases} \quad x = -2,2$$

$$\text{в)} \begin{cases} x > 1 \\ 2x - 2 - 3x - 12 = 1 \end{cases} \quad x = -15 \text{-не уд.}$$

Ответ $\{-13; -2,2\}$

5 РАЗДЕЛ

НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ
МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ

Пример №1. $|x^2 - 2x| + |x - 1| \leq x^2$

Решение. $|(x - 2)x| + |x - 1| \leq x^2$, $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$,

$$\text{а)} \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2x - x + 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \quad \emptyset$$

$$\text{б)} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x - x + 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 1 \\ x \leq -0,5 \end{cases}, \quad \emptyset$$

$$\text{в)} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 2x + x - 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 1 \\ x \leq 0,5 \end{cases} \quad [1; 2]$$

$$\text{г)} \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x + x - 1 \leq x^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} (2; +\infty) \quad \text{Ответ} \quad [1; +\infty)$$

Неравенства

5 РАЗДЕЛ

**НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ
МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ**

$$\square |f(x)| = t, t \geq 0$$

$$f^2 = t^2$$

$$\square a \leq |x| \leq b, \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{cases}$$

$$\square |x| \geq a, \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}, a \geq 0$$

№1 $(x - 2)^2 - 8|x - 2| + 15 = 0$

Решение. $|x - 2| = t, t > 0$

$$t^2 - 8t + 15 = 0, t_1 = 5, t_2 = 3$$

$$\begin{cases} |x - 2| = 5 \\ |x - 2| = 3 \end{cases} \begin{cases} x - 2 = 5 \\ x - 2 = -5 \\ x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Ответ $\{-3; -1; 5; 7\}$

Пример №1. $x^2 - |x| - 12 \geq 0$

Решение. $|x| = t, t > 0$

$$t^2 - t - 12 = 0, \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq -3 \end{cases}$$

$$|x| \geq 4, \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

Ответ $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

6 РАЗДЕЛ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$x^2 + |x| - 6 = 0$$

ОТВЕТ $x_1 = -2, x_2 = 2$

Замена переменной

№2. $x^2 + |x| - 6 = 0$

Решение. $|x| = t, t > 0$

$$t^2 + t - 6 = 0,$$

$$t_1 = -3, t_2 = 2, |x| = 2,$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2$$

Ответ $x_1 = -2, x_2 = 2$

Домашнее задание

1) $||x| - 2| = 4$

3) $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2$

2) $|2x - 6| \geq 3$

4) $x^3 - |x - 1| = 1$

5) $|x^2 - x| \leq x + 2$

6) $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| > x + 2$

7) $x^2 - 3x + \frac{3,5-x}{|x-3,5|} = 0$

8) $\frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$

9) $|x - 2| = 3|3 - x|$

10) $|2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$

11) $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$

12) $|2x - 6| + |4 - x| \leq |x - 2|$

13) $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$

14) $x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.
ПРИМЕРЫ №3 (1-6 РАЗДЕЛЫ).