Математический анализ

Множество – одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Объекты, составляющие множество, называют его ***элементами***.

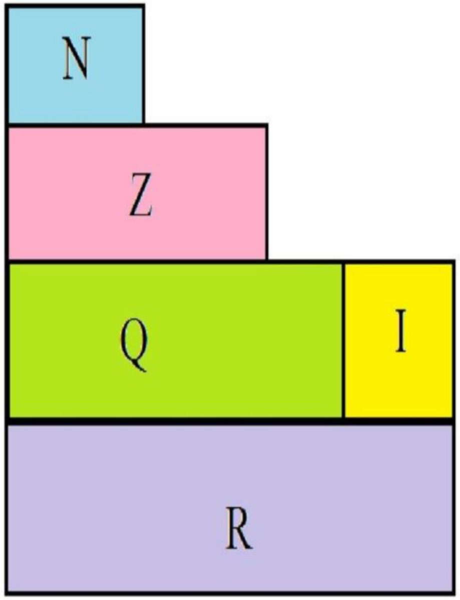
Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет.

Элементами множества могут быть различные объекты – числа, слова, геометрические фигуры, функции и т. д. В математике особую роль играют ***числовые множества***, то есть множества, элементами которых являются числа.

Например: **N** – множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0$ – множество натуральных чисел и ноль ($\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$), **Z** – множество целых чисел, **Q** – множество рациональных чисел, **R** – множество действительных чисел.

Числовые множества

натуральными называют числа, используемые при счете предметов, то есть $\mathbf{N}=\{1; 2; 3; 4; 5;\ldots\}$. Целыми считают натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число ноль. Таким образом, $\mathbf{Z}=\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4;\ldots\}$. Рациональные числа – это обыкновенные дроби с целым числителем и натуральным знаменателем: $\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}\right\}$. Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, причем такое представление единственно



Все десятичные дроби (в том числе и бесконечные непериодические) образуют множество действительных чисел. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют ***иррациональными***. Иррациональные числа можно записать в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Множество натуральных чисел

N	Используются для счёта предметов: 1; 2; 3; ...

Множество целых чисел

<table>
<tr><td rowspan="3">Z</td><td>N</td><td rowspan="3">Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: −1; −2; −3; ... и число 0 образуют множество целых чисел</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>N_-</td></tr>
</table>

Множество рациональных чисел

<table>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной</td></tr>
<tr><td>дроби</td></tr>
</table>

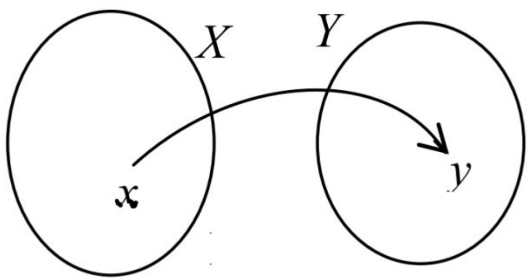
Множество действительных чисел

<table>
<tr><td rowspan="2">R</td><td>$\overline{Q}$</td><td rowspan="2">Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.
Объединение рациональных и иррациональных чисел называют действительными числами</td></tr>
<tr><td>Q</td></tr>
</table>

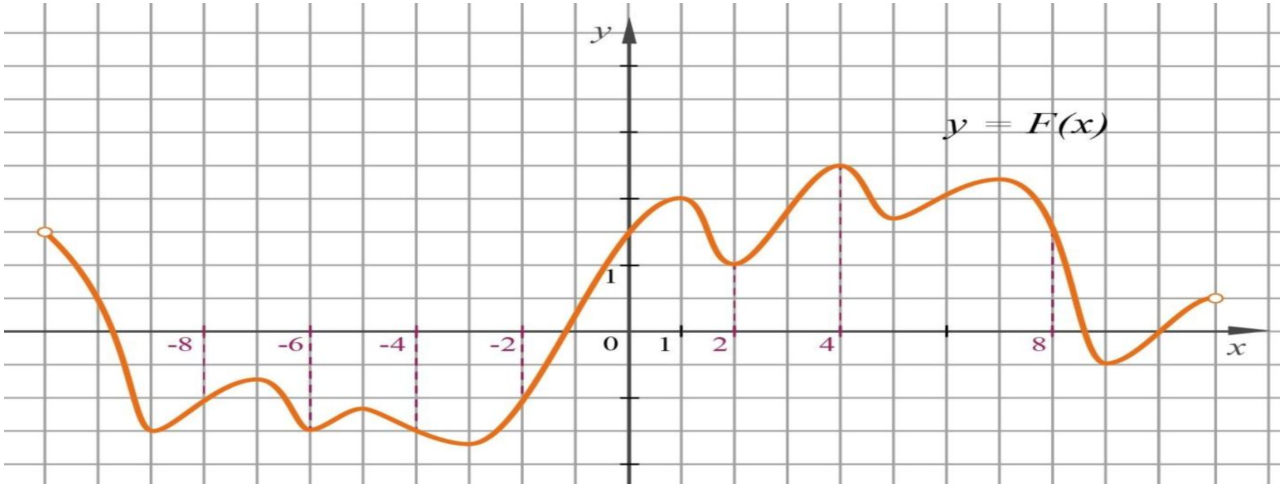
Понятие функции

Определение *Пусть даны два множества X и Y и пусть указано правило, по которому каждому элементу x множества X поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y. Это соответствие называется* ***функцией (отображением)*** *и обозначается* $f: X \to Y$ *или* $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой или ***аргументом***, переменная y – зависимой или ***функцией***. Множество X называется ***областью определения*** функции и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, которые принимает переменная y (это подмножество множества Y), называется ***областью изменения*** (***областью значений***) функции и обозначается $E(f)$.



Графиком $\Gamma(f)$ функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек (x, y) на плоскости (в некоторой выбранной системе координат xOy), координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.



Функция считается заданной, если:

а) задана область определения функции X;

б) задана область значений функции Y;

в) известно правило (закон) соответствия, причем каждому значению аргумента $x \in X$ поставлено в соответствие **единственное** значение функции $y \in Y$.

Если $x_0 \in X$, то число $f(x_0)$ называют ***значением*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Существует три основных способа задания функций: **аналитический**, **табличный** и **графический**.

При **аналитическом способе** задания функции зависимость f между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Например: $y = \sqrt{4 - x^2}$, где $x \in X = [-2;2]$, $y \in Y = [0;2]$;

Табличный способ задания функции – это таблица соответствия числовых значений y определенным значениям аргумента x. Примерами табличного способа задания функций могут служить всем хорошо известные таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы квадратов, кубов, обратных чисел и т.д., а также всевозможные таблицы технических характеристик процессов, статистические и хронологические таблицы, расписания и пр.

При **графическом способе** функция $y = f(x)$, (соответствие между значениями x и y) на ограниченном множестве X задается графиком $\Gamma(f)$

Сложная функция

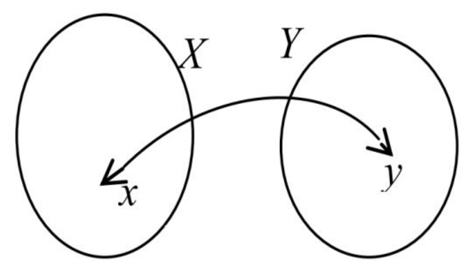
Если на некотором множестве X определена функция $z=\varphi(x)$ с множеством значений Z, а на множестве Z определена функция $y=f(z)$, то функция $y=f\big(\varphi(x)\big)$ называется **сложной функцией от *x* (суперпозицией** или **композицией функций)**, а переменная z – промежуточной переменной сложной функции.

Например, если $y=f(z)=\cos z$, а $z=\varphi(x)=x^3$, то $y=f\big(\varphi(x)\big)=\cos x^3$ и $z=\varphi\big(f(x)\big)=\cos^3 x$ – две разные сложные функции, определенные на всей числовой прямой.

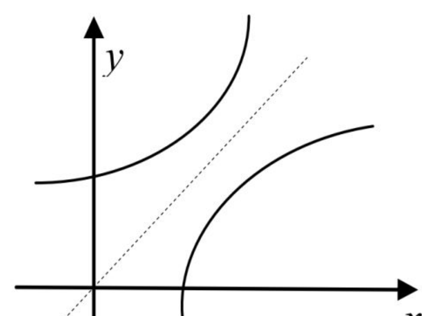
Обратная функция

Пусть функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, такова, что любым двум различным значениям аргумента x ставит в соответствие различные значения y, то есть, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Эта функция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между областью своего определения X и областью изменения Y.

Действительно, каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное $y \in Y$. При этом каждой точке $y \in Y$ соответствует единственное $x \in X$, такое, что $y=f(x)$. Та-



Таким образом, на множестве Y определена функция f^{-1}, которая называется ***обратной*** к функции f. Область определения обратной функции – множество Y, область значений – множество X. Графики функции $y=f(x)$ и обратной к ней функции $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$



Классификация функций

Постоянная функция $f(x) = C = const$, степенная функция x^{α} (α – любое число), показательная функция a^{x} $(0 < a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ называются **простейшими элементарными функциями**.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют **класс элементарных функций**.

Элементарные функции классифицируются следующим образом

1. ***Целой рациональной функцией*** **или** ***алгебраическим многочленом степени*** n называется функция вида

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

где n- неотрицательное целое число; $p_0, p_1, \ldots, p_n$ −любые числа— коэффициенты многочлена $(p_0 \neq 0)$.

В частности, при $n = 1$ и при $n = 2$ получаем соответственно линейную и квадратическую функции.

2. ***Дробно-рациональной функцией*** называется отношение двух алгебраических многочленов $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

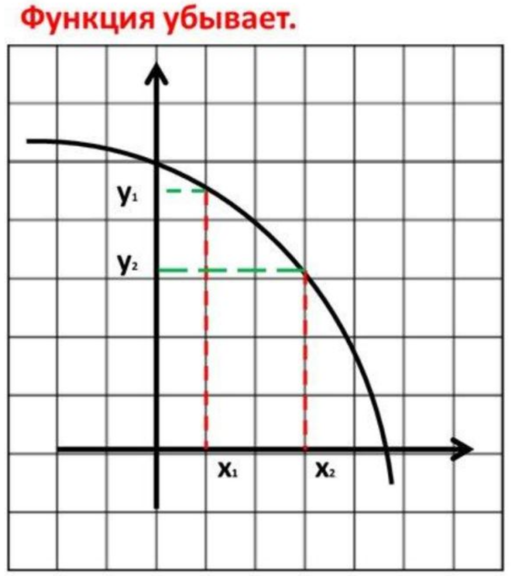
Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс **рациональных функций.**

3. ***Иррациональной функцией*** называется функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями, и не являющаяся рациональной.

4 ***Трансцендентной функцией*** называется функция, не являющаяся рациональной или иррациональной.

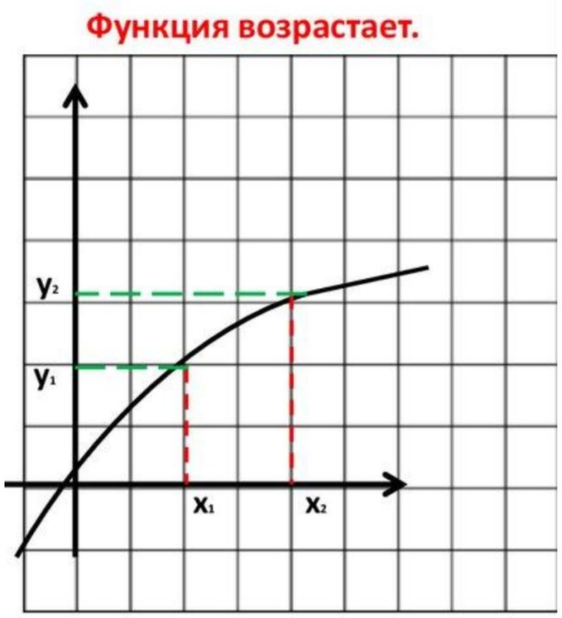
Свойства функций

$D(f) \subset \mathbf{R}$ и $E(f) \subset \mathbf{R}$.



Определение Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

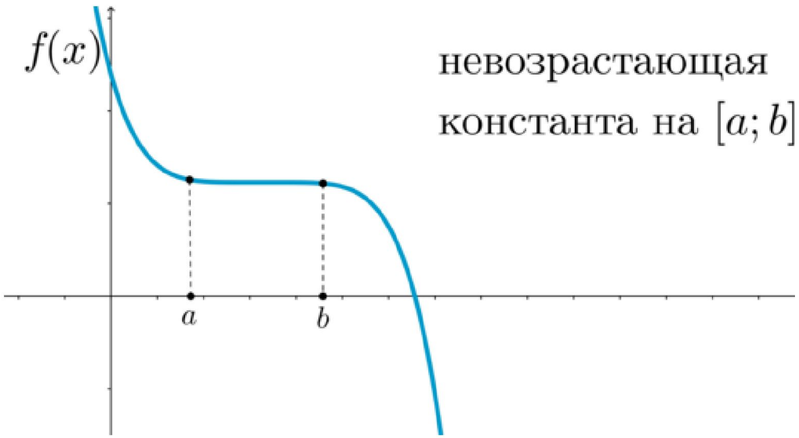
Определение Функция $y = f(x)$ называется ***монотонно убывающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



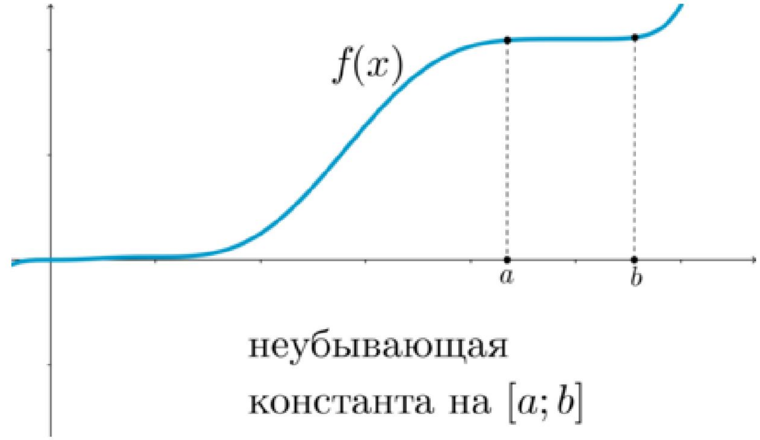
Определение *Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее или равное значение функции.*

Определение *Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее или равное значение функции.*

Монотонно возрастающие и монотонно убывающие функции называют монотонными.



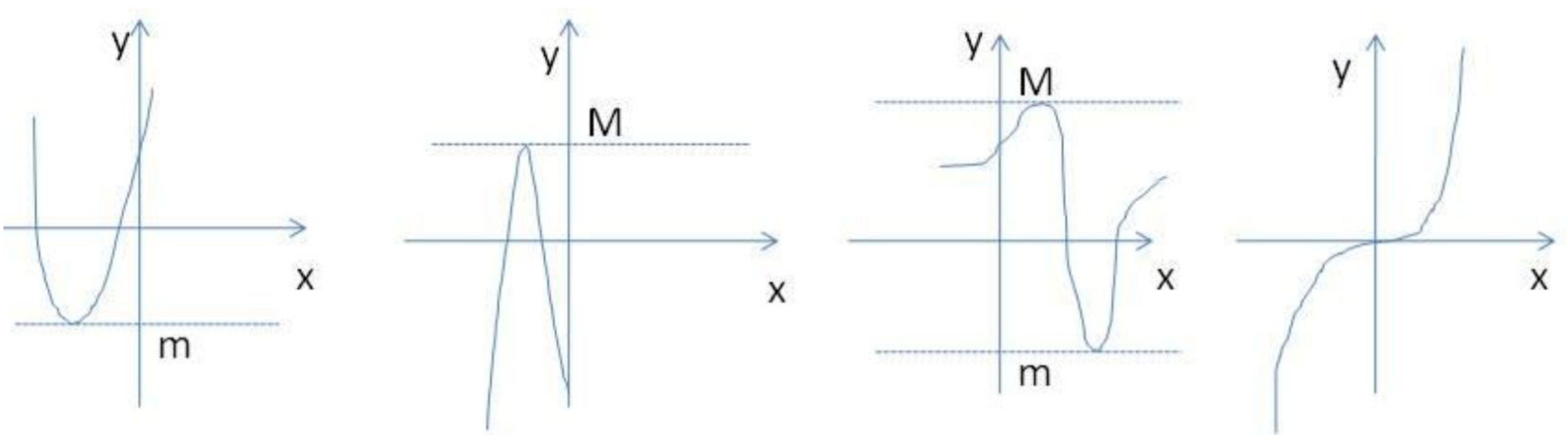
невозрастающая
константа на $[a; b]$



неубывающая
константа на $[a; b]$

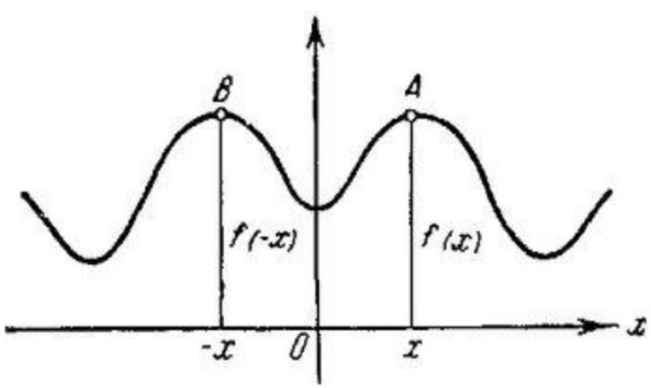
Определение *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной сверху*** *на множестве* $X \subset D(f)$, *если существует такое число M, что значение функции в любой точке не превосходит этого числа, то есть для любого* $x \in X$ *выполняется неравенство* $f(x) \le M$.

Определение *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной снизу*** *на множестве* $X \subset D(f)$, *если существует такое число m, что значение функции в любой точке не меньше этого числа, то есть для любого* $x \in X$ *выполняется неравенство* $f(x) \ge m$.



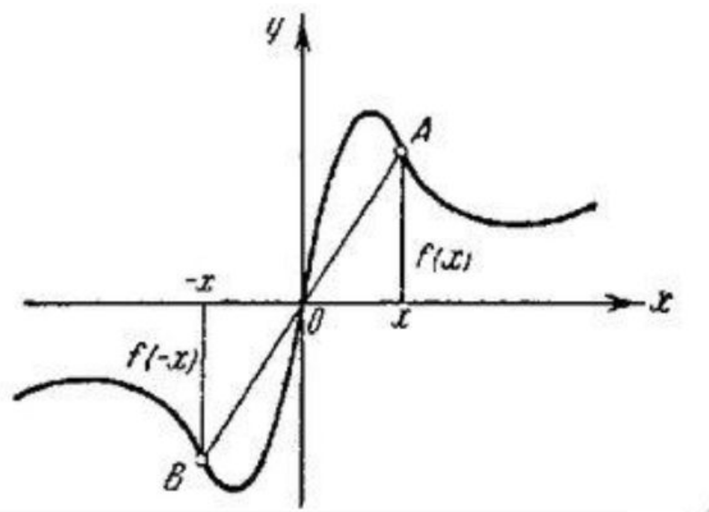
Определение *Функция $y = f(x)$ называется* ***четной****, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.*

График четной функции имеет ось симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику четной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$ и точка $M_1(-x_0; y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно оси ординат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то функция $f(x)$ четная.

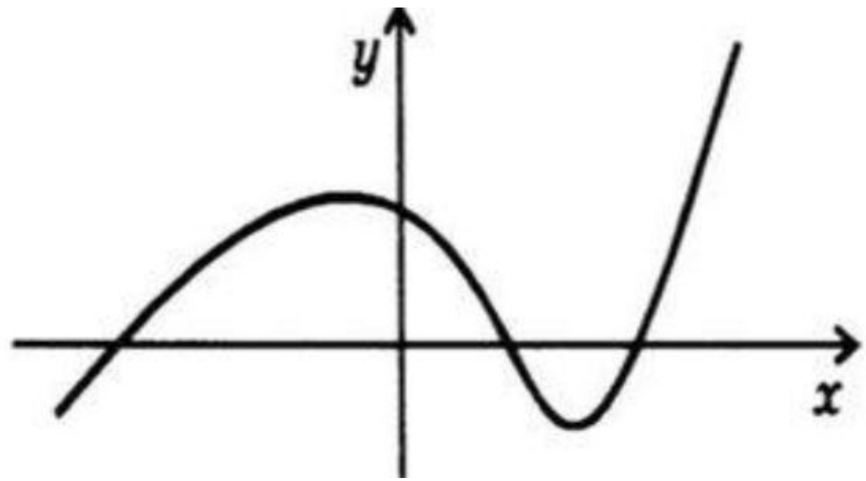


Определение *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***нечетной****, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и* $f(-x) = -f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$.

График нечетной функции имеет центр симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику нечетной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0$ и точка $M_1(-x_0; -y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно начала координат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно начала координат, то функция $f(x)$ нечетная.

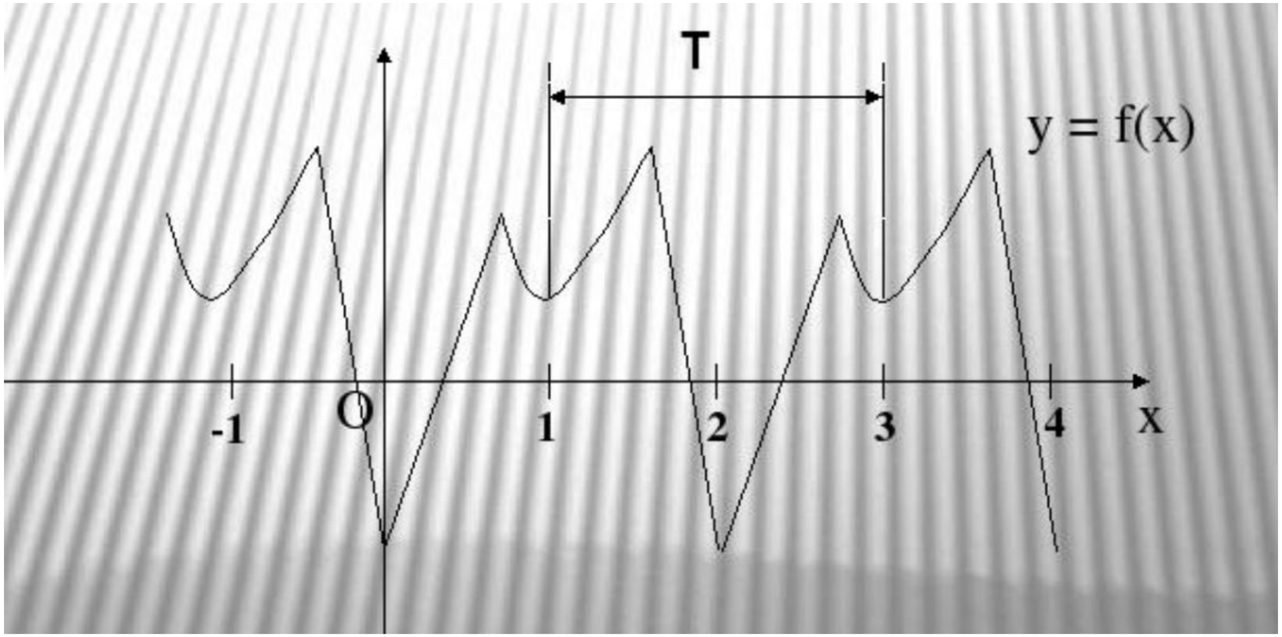


Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называют ***функциями общего вида***.



Определение *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***периодической***, *если существует такое число* $T > 0$, *что для любого* $x \in D(f)$ *точка* $x + T \in D(f)$ *и справедливо равенство* $f(x+T) = f(x)$.

Наименьшее из положительных чисел *T* в определении называют ***главным периодом***. Периодическая функция имеет бесконечно много периодов, все они кратны числу *T*.



Для каждой точки $x_0 \in D(f)$ обозначим через $\Delta x(x_0) = x - x_0$ ***приращение аргумента*** в точке x_0, а через $\Delta y(x_0) = f(x) - f(x_0)$ ***приращение функции***, соответствующее данному приращению аргумента. Заметим, что для возрастающих функций знаки приращений аргумента и функции одинаковы, а для убывающих – противоположны.

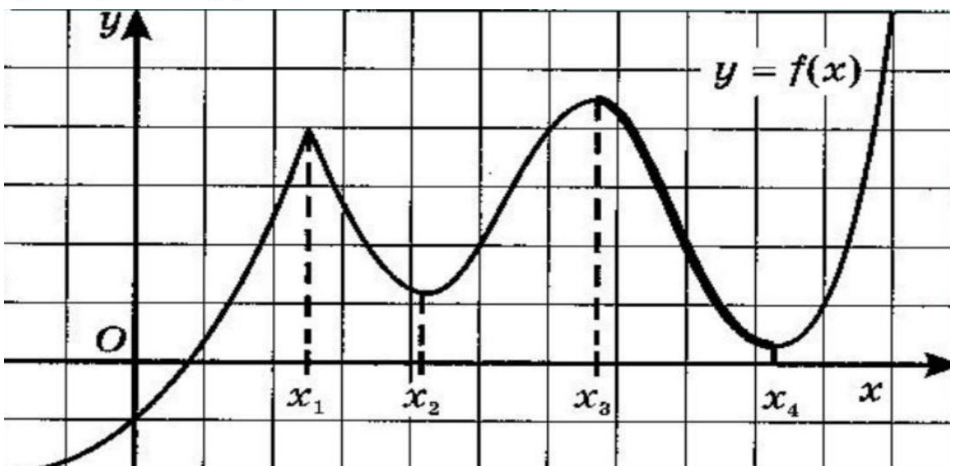
Определение *Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x(x_0)$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y(x_0)$. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется **точкой разрыва** функции.*

К точкам разрыва также относят граничные точки области определения.

Определение *Точка* $x_0 \in D(f)$ *называется точкой* ***максимума*** *функции* $y = f(x)$, *если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек* $x \neq x_0$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0)$.

Определение *Точка* $x_0 \in D(f)$ *называется точкой* ***минимума*** *функции* $y = f(x)$, *если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек* $x \neq x_0$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x) > f(x_0)$.

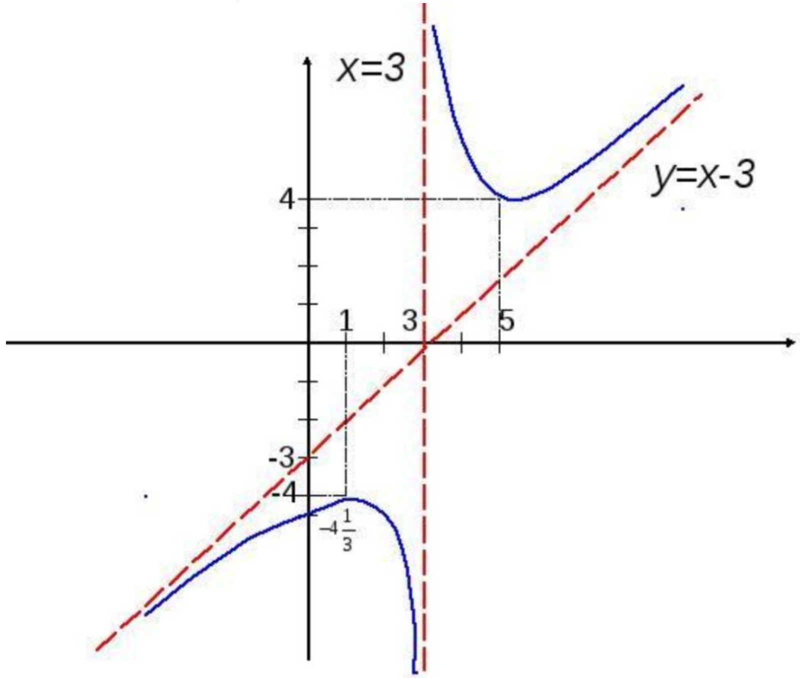
Точки максимума и минимума называют точками ***экстремума*** функции.

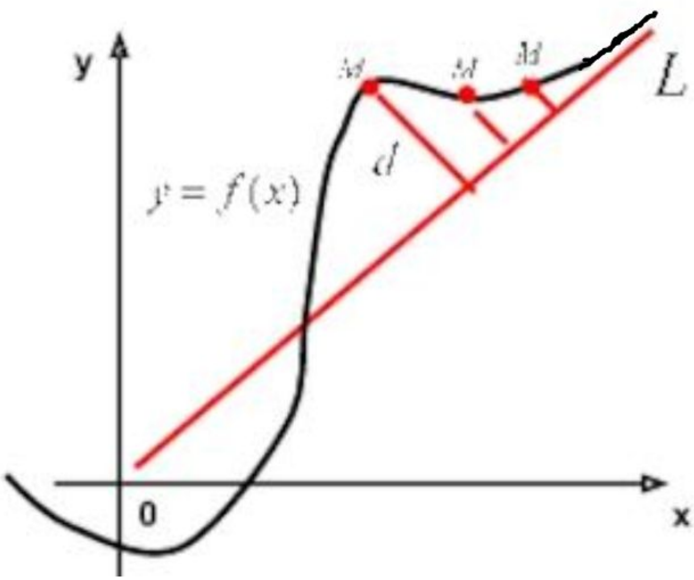


Определение *Будем говорить, что в точке* $x_0 \in X \subset D(f)$ *функция* $y = f(x)$ *принимает* ***наибольшее*** *на множестве* X *значение, если для всех точек* $x \in X$ *справедливо неравенство* $f(x) \le f(x_0)$.

Определение *Будем говорить, что в точке* $x_0 \in X \subset D(f)$ *функция* $y = f(x)$ *принимает* ***наименьшее*** *на множестве* X *значение, если для всех точек* $x \in X$ *справедливо неравенство* $f(x) \ge f(x_0)$.

Асимптотой графика функции называется прямая такая, что расстояние от точек графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точек графика в бесконечностьАсимптоты бывают вертикальные (параллельные оси Oy, их уравнение $x = x_0$), горизонтальные (параллельные оси Ox, их уравнение $y = b$) и наклонные (их уравнение $y = kx + b$).



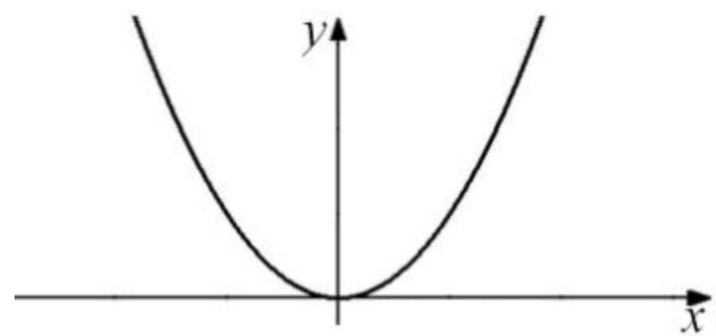


Элементарные функции

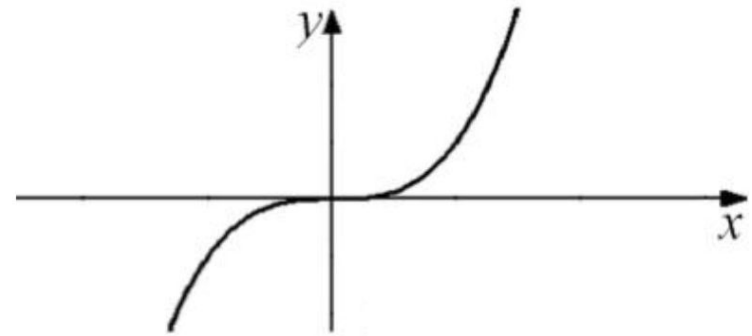
Степенные функции $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Рассмотрим несколько частных случаев степенной функции.

Функции $y = x^{2n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Они принимают только неотрицательные значения, $E(f) = [0; +\infty)$. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. Эти функции ограничены снизу. В точке $x = 0$ они имеют минимум и принимают наименьшее значение, равное 0, сверху функции не ограничены.

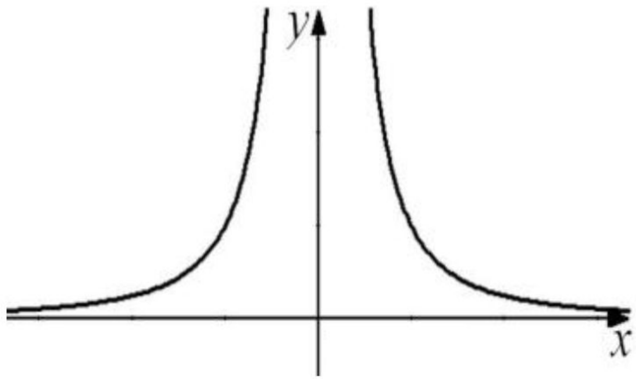
Функции $y = x^{2n}$ возрастают на промежутке $[0; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; 0]$



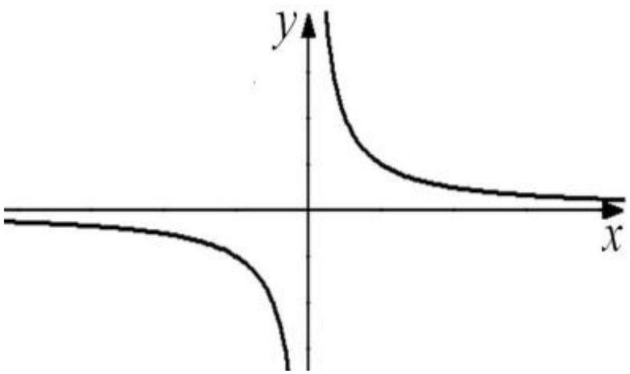
Функции $y = x^{2n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Множества их изменения – также вся числовая ось $E(f) = \mathbf{R}$, то есть эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. График функции при $n > 1$ приведен на рис. 6 (при $n = 1$ – график функции прямая).



Функции $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Они принимают только положительные значения $E(f) = (0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу, но они не принимают свое наименьшее значение. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. При $x > 0$ функции убывают, при $x < 0$ функции возрастают. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций

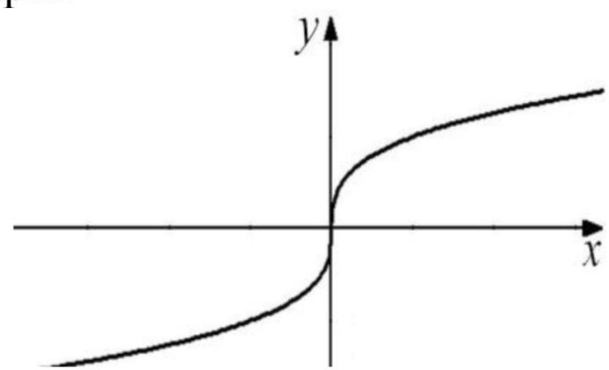


Функции $y = x^{-2n+1} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены для всех значений x, отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Множества их изменения также все значения y, отличные от 0, то есть $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают на интервалах (–∞; 0) и (0; +∞). Точка $x = 0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций

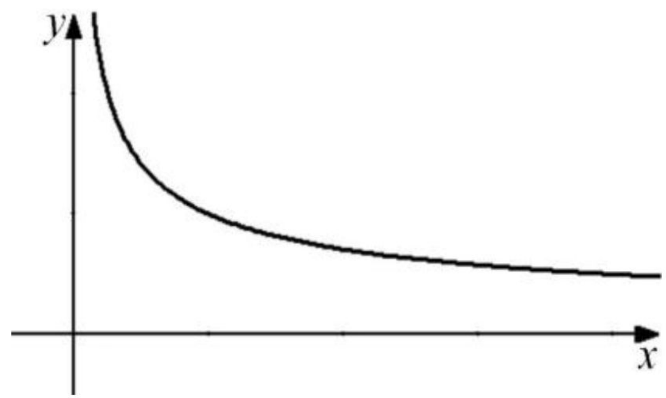


Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ $(n\in \mathbf{N})$. Функции определены для всех неотрицательных значений x, то есть $D(f)=[0;+\infty)$. Множества их изменения также все неотрицательные значения y, то есть $E(f)=[0;+\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху. Наименьшее значение $y=0$ функции принимают при $x=0$. Функции возрастают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти

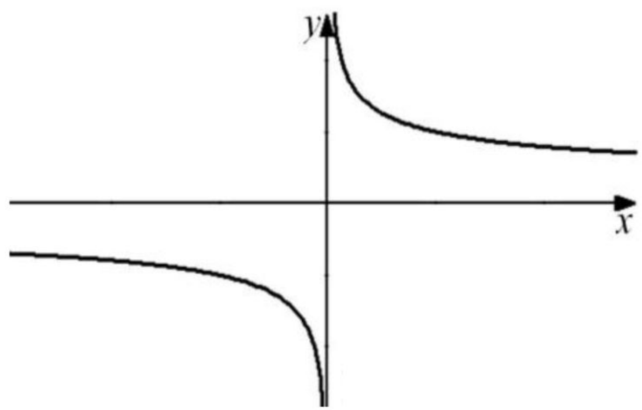
Функции $y=\sqrt[2n-1]{x}$ $(n\in \mathbf{N})$. Функции определены для всех значений x, то есть $D(f)=\mathbf{R}^1$. Множества их изменения – также все значения y, то есть $E(f)=\mathbf{R}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции возрастают на всей области своего определения. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат



Функции $y = \frac{1}{\sqrt[2n]{x}}$ $(n \in \mathbf{N})$. Функции определены для всех положительных значений x, то есть $D(f) = (0; +\infty)$. Множества их изменения – также все положительные значения y, то есть $E(f) = (0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху, но они ни в одной точке не принимают своего наименьшего значения. Функции убывают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций



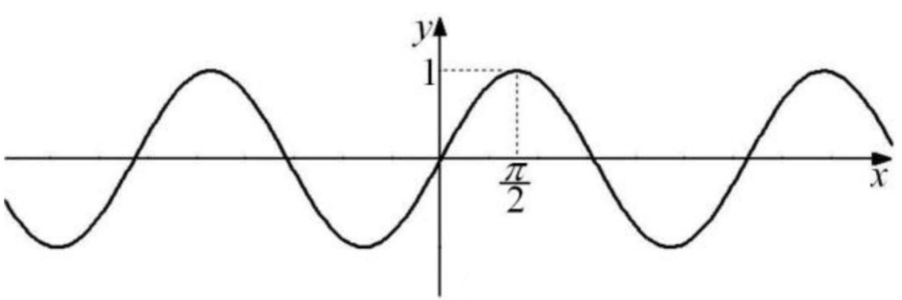
Функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$ $(n\in\mathbf{N})$. Функции определены для всех значений *x*, отличных от 0, то есть $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$[2] Множества их изменения – также все значения *y*, отличные от 0, то есть $E(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают на интервалах (–∞; 0) и (0; +∞). Точка $x=0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций



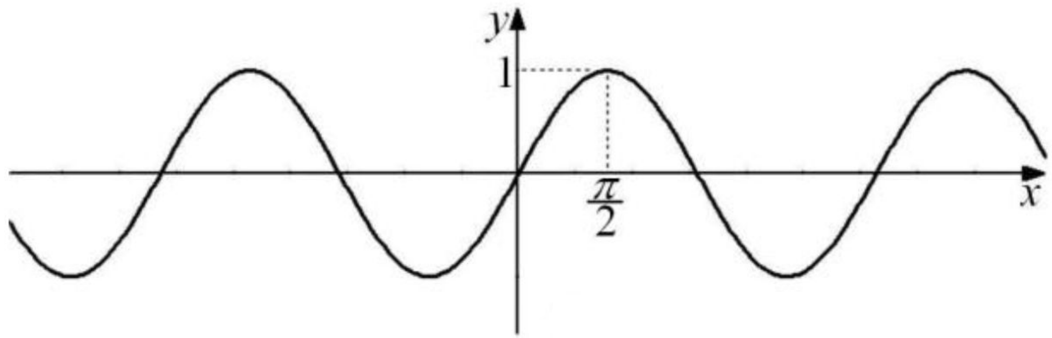
Функции $y=x^{-2n+1}$ и $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n-1]{x}}$ взаимно обратные. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.

Функция $y = \sin x$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$,

и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Функция $y = \sin x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \sin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.



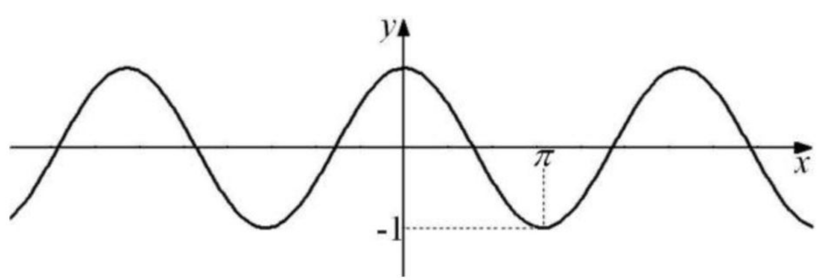
Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на



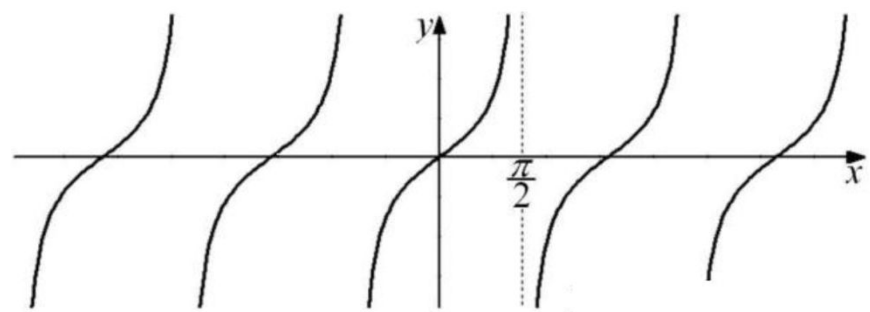
каждом промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ $(n \in \mathbf{Z})$ и убывает

на каждом промежутке $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi m; \frac{3\pi}{2}+2\pi m\right]$ $(m \in \mathbf{Z})$. График этой функции называется ***синусоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π , например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его

Функция $y = \cos x$. Область определения функции вся числовая прямая: $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \le 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \cos x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \cos x$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ($n \in \mathbf{Z}$) и убывает на каждом промежутке $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$ ($m \in \mathbf{Z}$). График этой функции называется ***косинусоидой***.

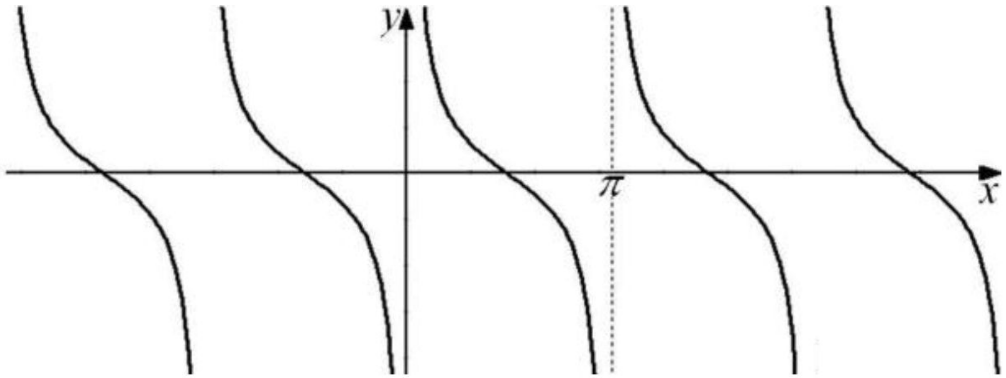


Функция $y = \mathrm{tg}\, x$. Область определения функции все действительные значения x, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \right\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$

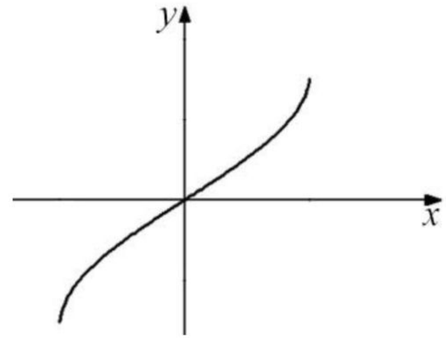


является периодической, ее период $T = \pi$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ $(n \in \mathbf{Z})$, в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ функция имеет разрывы. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ являются вертикальными асимптотами графика функции. График этой функции называется ***тангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем копировать его

Функция $y=\mathrm{ctg}x$. Область определения функции все действительные значения x, кроме $x=\pi m\,(m\in\mathbf{Z})$: $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{\pi m, m\in\mathbf{Z}\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f)=\mathbf{R}$. Функция $y=\mathrm{ctg}x$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни наименьшее, ни наибольшее значения. График функции $y=\mathrm{ctg}x$ пересекает ось абсцисс в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

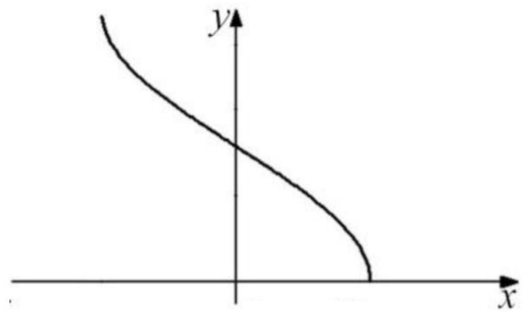


Функция $y=\mathrm{ctg}x$ является периодической, ее период $T=\pi$. Функция $y=\mathrm{ctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она убывает на каждом промежутке $(\pi n; \pi+\pi n)$ ($n\in\mathbf{Z}$), в точках $x=\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$) функция имеет разрывы. Прямые $x=\pi n$ ($n\in\mathbf{Z}$) являются вертикальными асимптотами графика функции. График этой функции называется ***котангенсоидой***. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π, например $(0;\pi)$, а затем копировать его



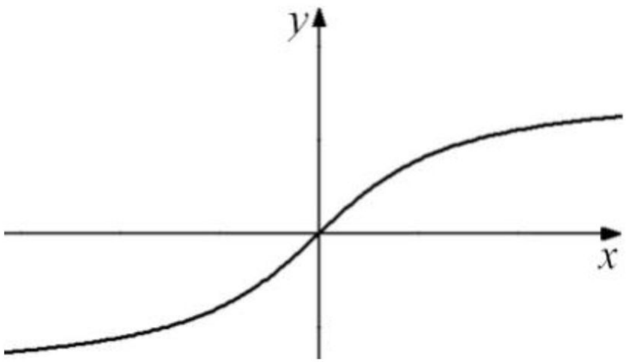
Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \sin x$, на которой синус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ каждому значению синуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = -1$, наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = 1$. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. График функции $y = \arcsin x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \sin x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей

Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \cos x$, на которой косинус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $[0; \pi]$. Функция $y = \arccos x$ каждому



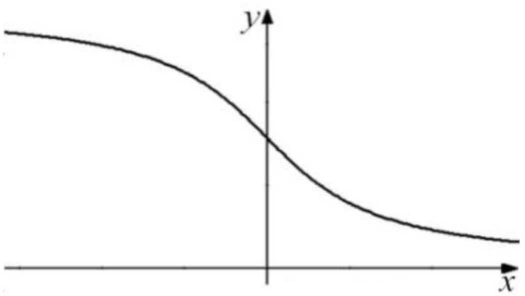
значению косинуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arccos x$ – отрезок [–1; 1], множество изменения – отрезок $[0; \pi]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает в точке $x = 1$, наибольшее значение $y = \pi$ функция принимает в точке $x = -1$. Функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. График функции $y = \arccos x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \cos x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей

Функция $y=\mathrm{arctg}x$ является обратной к функции $y=\mathrm{tg}x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y=\mathrm{tg}x$, на которой тангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y=\mathrm{arctg}x$ каждому значению тангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y=\mathrm{arctg}x$ – вся числовая прямая, $D(f)=\mathbf{R}$, множество изменения – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но

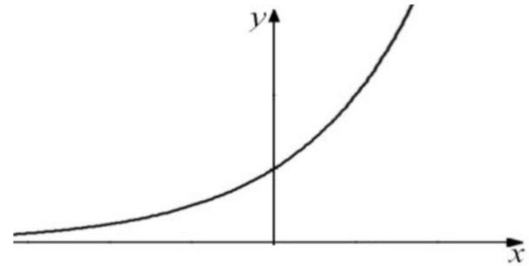


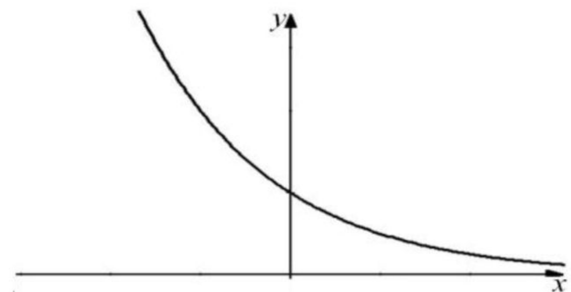
она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y=\operatorname{arctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. Прямые $y=\pm\frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции. График функции $y=\operatorname{arctg}x$ симметричен ветви графика функции $y=\operatorname{tg}x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, на которой котангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $(0; \pi)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ каждому значению котангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$, множество изменения – интервал $(0; \pi)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика функции.



Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$. Функция принимает только положительные значения: $E(f) = (0; +\infty)$. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экстремума.



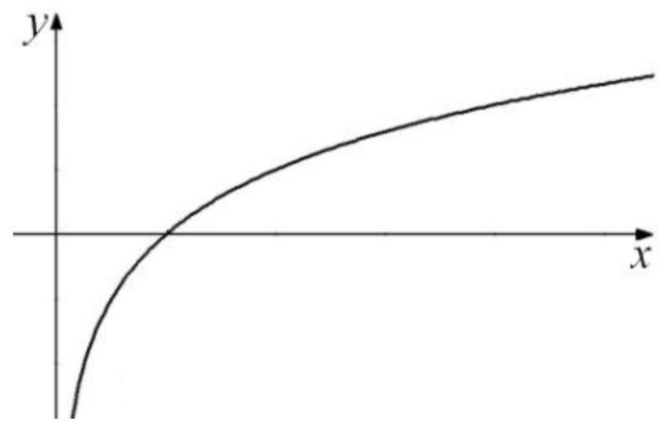


Показательная функция не является ни четной, ни нечетной. График функции пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$, ось абсцисс он не пересекает. При $a > 1$ функция является возрастающей , а при $0 < a < 1$ – убывающей на всей области определения. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика показательной функции.

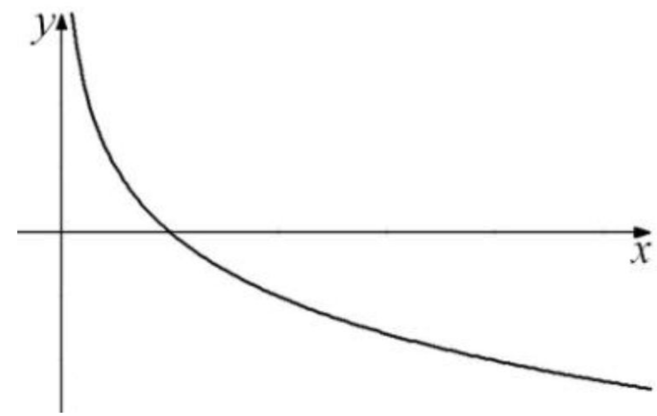
В математике и ее приложениях наиболее часто используется показательная функция, основание которой равно числу *e*. Функцию $y = e^x$ называют ***экспонентой***.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Логарифмическая функция является обратной к по-

казательной. Поэтому ее область определения – множество положительных чисел, $D(f) = (0; +\infty)$, область изменения – множество действительных чисел, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция не ограничена ни сверху, ни снизу. Она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не имеет точек экстремума. Логарифмическая функция не является ни четной



ни нечетной. График функции пересекает ось абсцисс в точке $(1;0)$, ось ординат график не пересекает. При $a>1$ функция является возрастающей , а при $0<a<1$ – убывающей на всей области определения. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции. График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.



Логарифмическую функцию, основание которой равно e, называют ***натуральным логарифмом*** и обозначают $y=\ln x$.