

Математический анализ

Множество – одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Объекты, составляющие множество, называют его *элементами*.

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет.

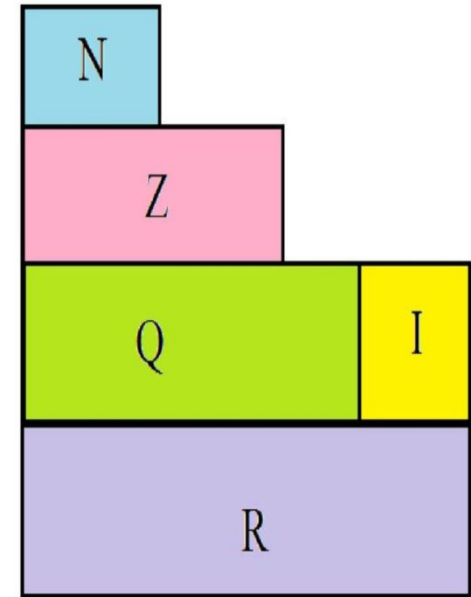
Элементами множества могут быть различные объекты – числа, слова, геометрические фигуры, функции и т. д. В математике особую роль играют *числовые множества*, то есть множества, элементами которых являются числа.

Например: \mathbf{N} – множество натуральных чисел, \mathbf{N}_0 – множество натуральных чисел и ноль ($\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$), \mathbf{Z} – множество целых чисел, \mathbf{Q} – множество рациональных чисел, \mathbf{R} – множество действительных чисел.

Числовые множества

натуральными называют числа, используемые при счете предметов, то есть $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$. Целыми считают натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число ноль. Таким образом, $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots\}$. Рациональные числа – это обыкновенные дроби с целым числителем и натуральным знаменателем: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$. Любое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, причем такое представление единственно

Все десятичные дроби (в том числе и бесконечные непериодические) образуют множество действительных чисел. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Иррациональные числа можно записать в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.



Множество натуральных чисел

N	Используются для счёта предметов: 1; 2; 3; ...
---	--

Множество целых чисел

Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: -1; -2; -3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N ₋	

Множество рациональных чисел

Q	Z	Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной
	дроби	

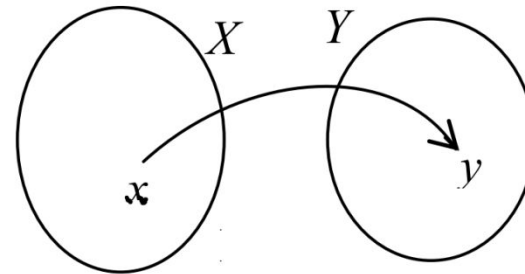
Множество действительных чисел

R	\bar{Q}	Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.
	Q	Объединение рациональных и иррациональных чисел называют действительными числами

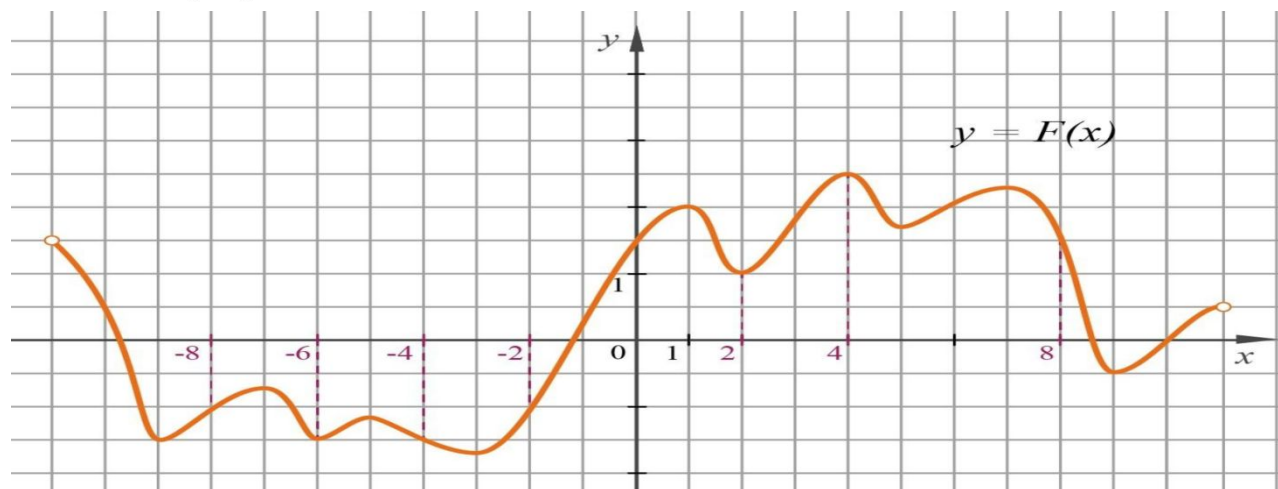
Понятие функции

Определение Пусть даны два множества X и Y и пусть указано правило, по которому каждому элементу x множества X поставлено в соответствие единственное значение y из множества Y . Это соответствие называется **функцией (отображением)** и обозначается $f: X \rightarrow Y$ или $y = f(x)$.

Переменная x называется **независимой** или **аргументом**, переменная y – **зависимой** или **функцией**. Множество X называется **областью определения** функции и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, которые принимает переменная y (это подмножество множества Y), называется **областью изменения (областью значений)** функции и обозначается $E(f)$.



Графиком $\Gamma(f)$ функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек (x, y) на плоскости (в некоторой выбранной системе координат xOy), координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика.



Функция считается заданной, если:

- а) задана область определения функции X ;
- б) задана область значений функции Y ;
- в) известно правило (закон) соответствия, причем каждому значению аргумента $x \in X$ поставлено в соответствие **единственное** значение функции $y \in Y$.

Если $x_0 \in X$, то число $f(x_0)$ называют **значением** функции $f(x)$ в точке x_0 .

Существует три основных способа задания функций: **аналитический**, **табличный** и **графический**.

При **аналитическом способе** задания функции зависимость f между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Например: $y = \sqrt{4 - x^2}$, где $x \in X = [-2; 2]$, $y \in Y = [0; 2]$;

Табличный способ задания функции – это таблица соответствия числовых значений y определенным значениям аргумента x . Примерами табличного способа задания функций могут служить всем хорошо известные таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы квадратов, кубов, обратных чисел и т.д., а также всевозможные таблицы технических характеристик процессов, статистические и хронологические таблицы, расписания и пр.

При **графическом способе** функция $y = f(x)$, (соответствие между значениями x и y) на ограниченном множестве X задается графиком $\Gamma(f)$

Сложная функция

Если на некотором множестве X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z , а на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется **сложной функцией от x** (суперпозицией или **композицией функций**), а переменная z – промежуточной переменной сложной функции.

Например, если $y = f(z) = \cos z$, а $z = \varphi(x) = x^3$, то $y = f(\varphi(x)) = \cos x^3$ и $z = \varphi(f(x)) = \cos^3 x$ – две разные сложные функции, определенные на всей числовой прямой.

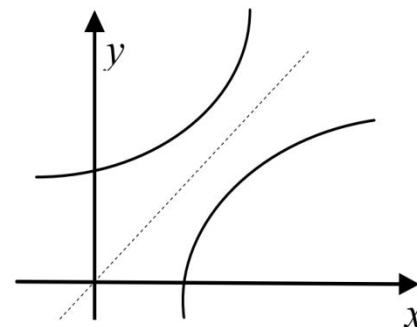
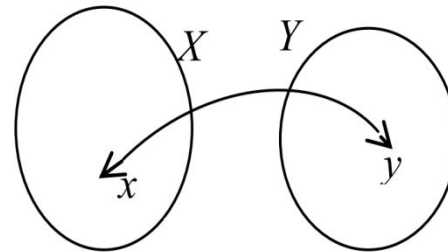
Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$, определенная на множестве X , такова, что любым двум различным значениям аргумента x ставит в соответствие различные значения y , то есть, если $x_1 \neq x_2$, то $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Эта функция устанавливает взаимнооднозначное соответствие между областью своего определения X и областью изменения Y .

Действительно, каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное $y \in Y$. При этом каждой точке $y \in Y$

соответствует единственное $x \in X$, такое, что $y = f(x)$. Таким образом, на множестве Y определена функция f^{-1} , которая называется **обратной** к

функции f . Область определения обратной функции – множество Y , область значений – множество X . Графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$



Классификация функций

Постоянная функция $f(x) = C = \text{const}$, степенная функция x^α (α – любое число), показательная функция a^x ($0 < a \neq 1$), логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$), тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются **простейшими элементарными функциями**.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют **класс элементарных функций**.

Элементарные функции классифицируются следующим образом

1. Целой рациональной функцией или **алгебраическим многочленом степени n** называется функция вида

$$P_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n,$$

где n - неотрицательное целое число; p_0, p_1, \dots, p_n - любые числа — коэффициенты многочлена ($p_0 \neq 0$).

В частности, при $n = 1$ и при $n = 2$ получаем соответственно линейную и квадратическую функции.

2. Дробно-рациональной функцией называется отношение двух алгебраических многочленов $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс **рациональных функций**.

3. Иррациональной функцией называется функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями, и не являющаяся рациональной.

4. Трансцендентной функцией называется функция, не являющаяся рациональной или иррациональной.

Свойства функций

$D(f) \subset \mathbf{R}$ и $E(f) \subset \mathbf{R}$.

Определение Функция $y = f(x)$ называется **монотонно возрастающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

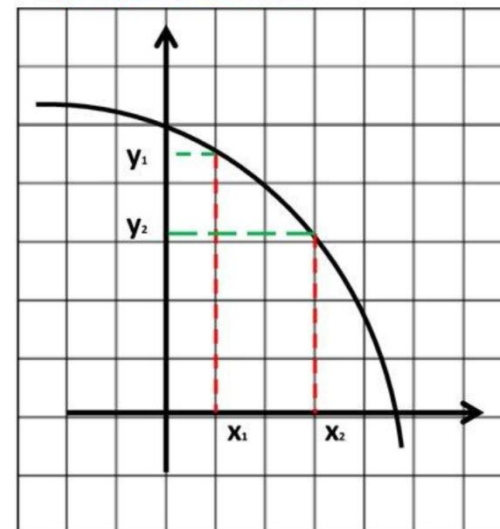
Определение Функция $y = f(x)$ называется **монотонно убывающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Определение Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее или равное значение функции.

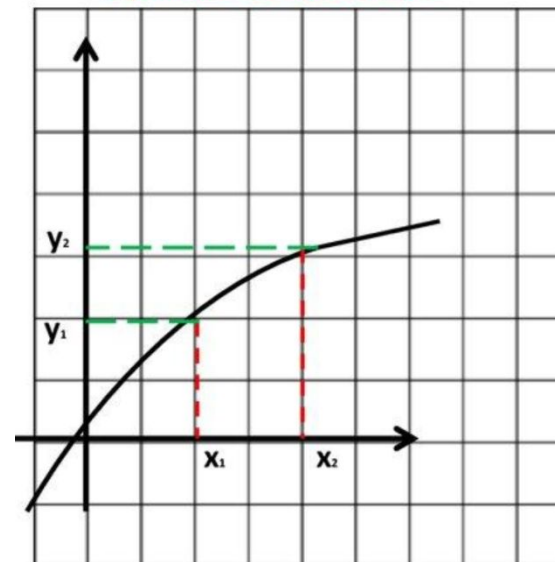
Определение Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на множестве $X \subset D(f)$, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее или равное значение функции.

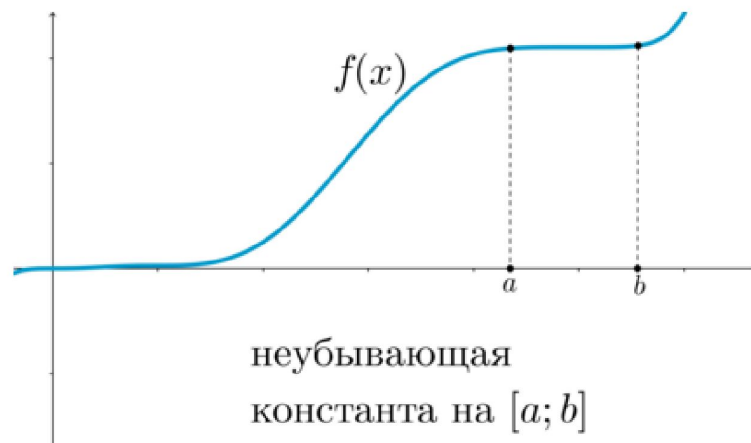
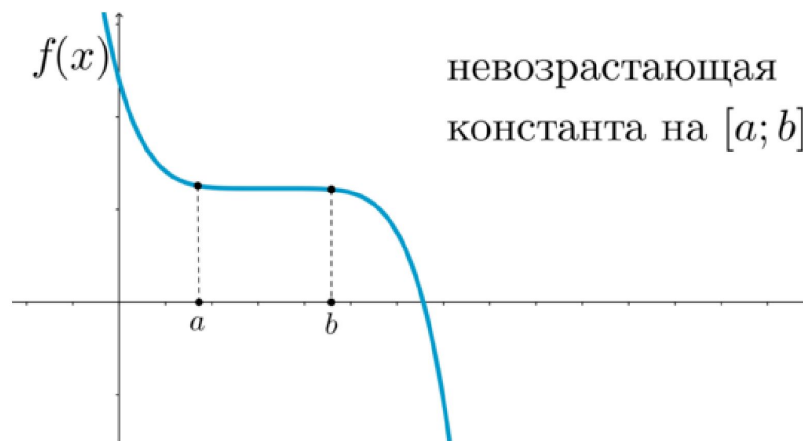
Монотонно возрастающие и монотонно убывающие функции называют монотонными.

Функция убывает.



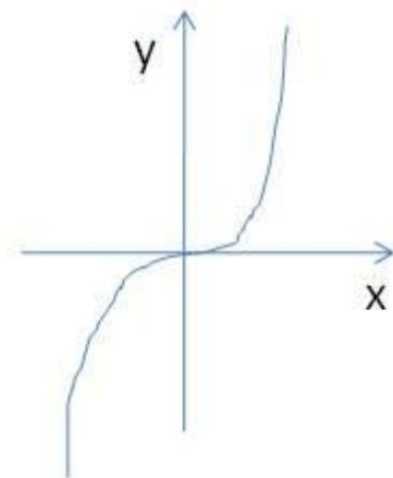
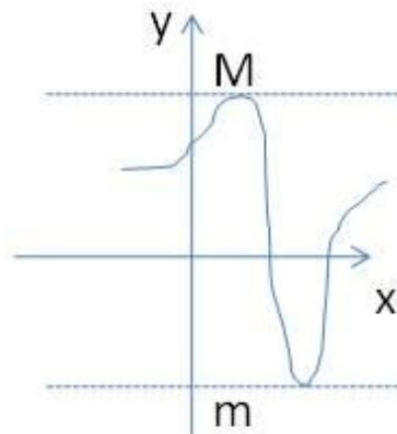
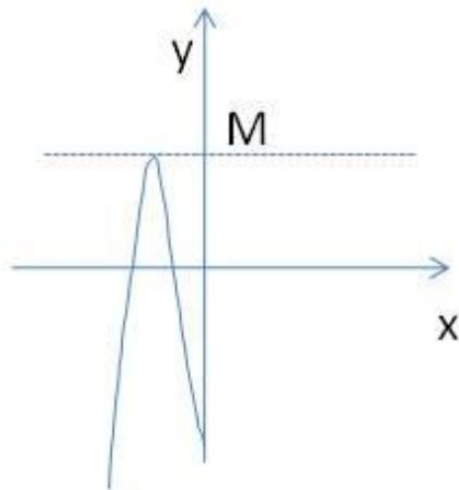
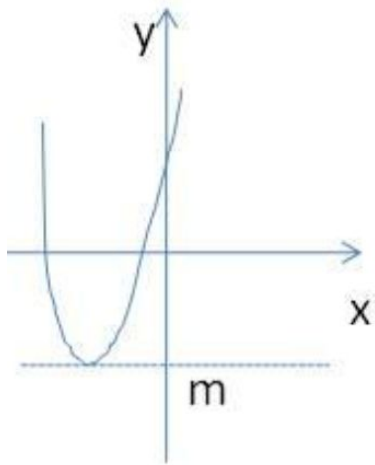
Функция возрастает.





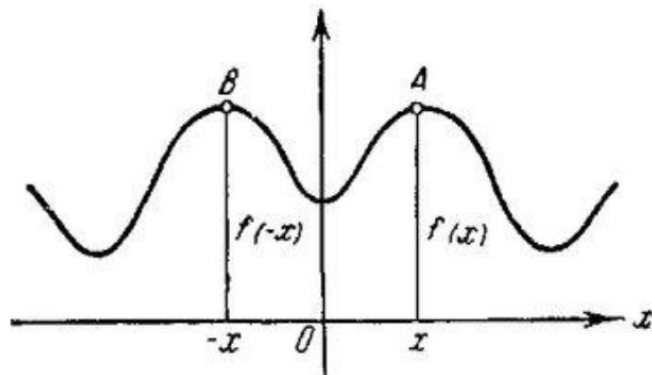
Определение Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число M , что значение функции в любой точке не превосходит этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

Определение Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число m , что значение функции в любой точке не меньше этого числа, то есть для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$.



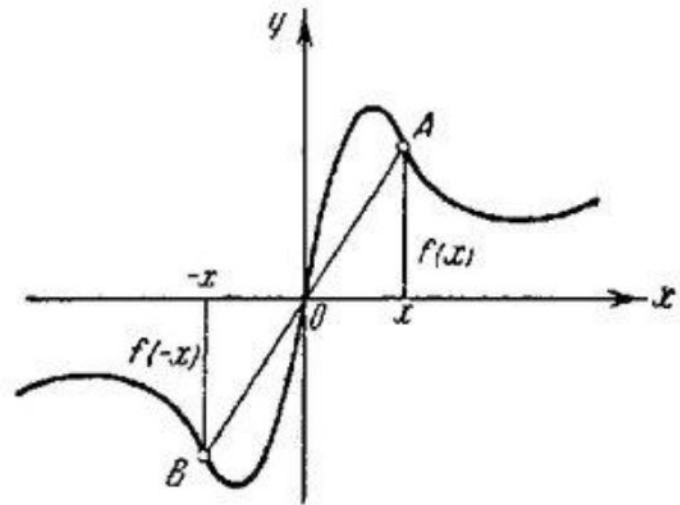
Определение Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

График четной функции имеет ось симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику четной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$ и точка $M_1(-x_0; y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно оси ординат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то функция $f(x)$ четная.

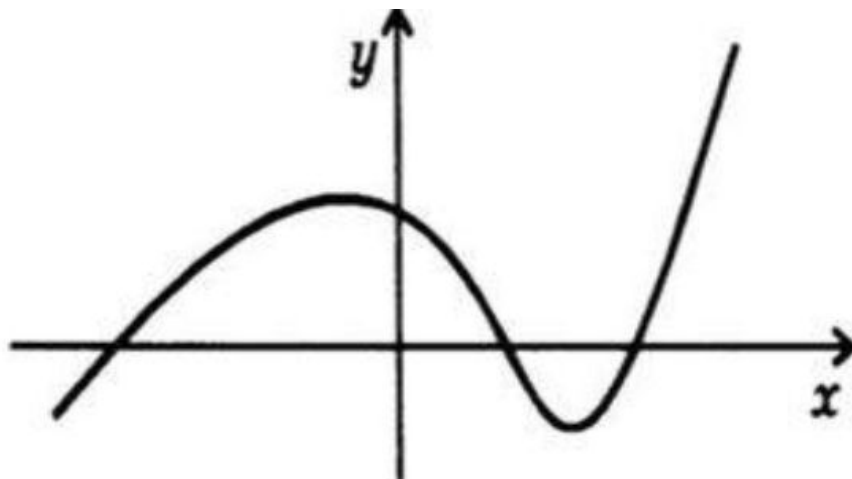


Определение Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если ее область определения симметрична относительно начала координат, и $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

График нечетной функции имеет центр симметрии. Если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику нечетной функции, т. е. $x_0 \in D(f)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $-x_0 \in D(f)$, $f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0$ и точка $M_1(-x_0; -y_0)$ принадлежит графику этой функции. Следовательно, он симметричен относительно начала координат. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно начала координат, то функция $f(x)$ нечетная.

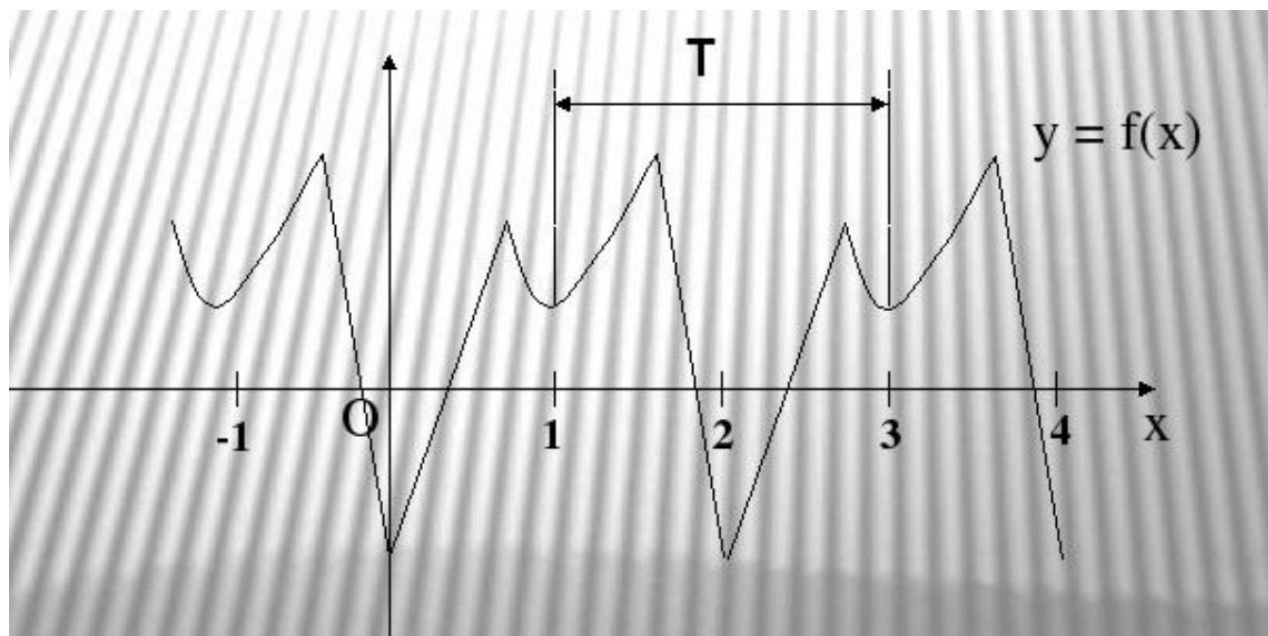


Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называют *функциями общего вида*.



Определение Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T > 0$, что для любого $x \in D(f)$ точка $x + T \in D(f)$ и справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшее из положительных чисел T в определении называют **главным периодом**. Периодическая функция имеет бесконечно много периодов, все они кратны числу T .



Для каждой точки $x_0 \in D(f)$ обозначим через $\Delta x(x_0) = x - x_0$ *приращение аргумента* в точке x_0 , а через $\Delta y(x_0) = f(x) - f(x_0)$ *приращение функции*, соответствующее данному приращению аргумента. Заметим, что для возрастающих функций знаки приращений аргумента и функции одинаковы, а для убывающих – противоположны.

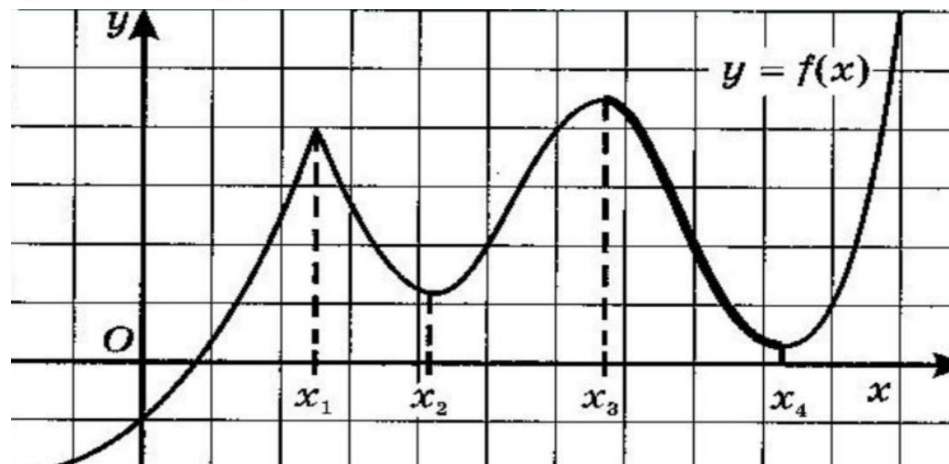
Определение *Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x(x_0)$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y(x_0)$. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется **точкой разрыва** функции.*

К точкам разрыва также относят граничные точки области определения.

Определение Точка $x_0 \in D(f)$ называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение Точка $x_0 \in D(f)$ называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

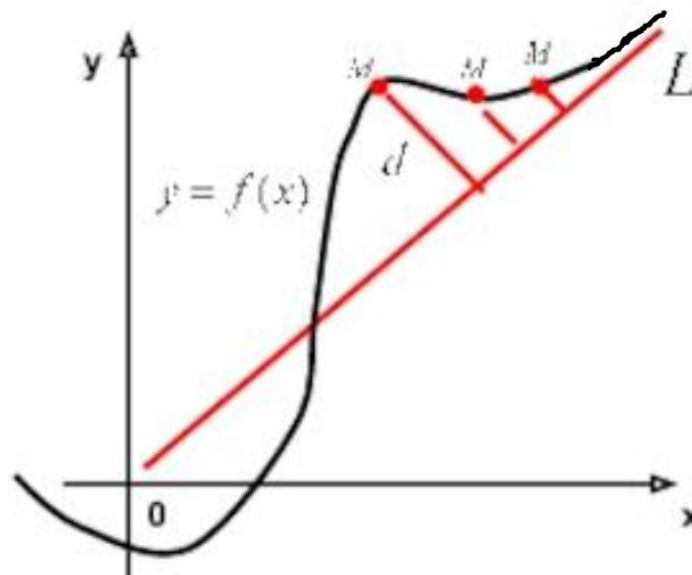
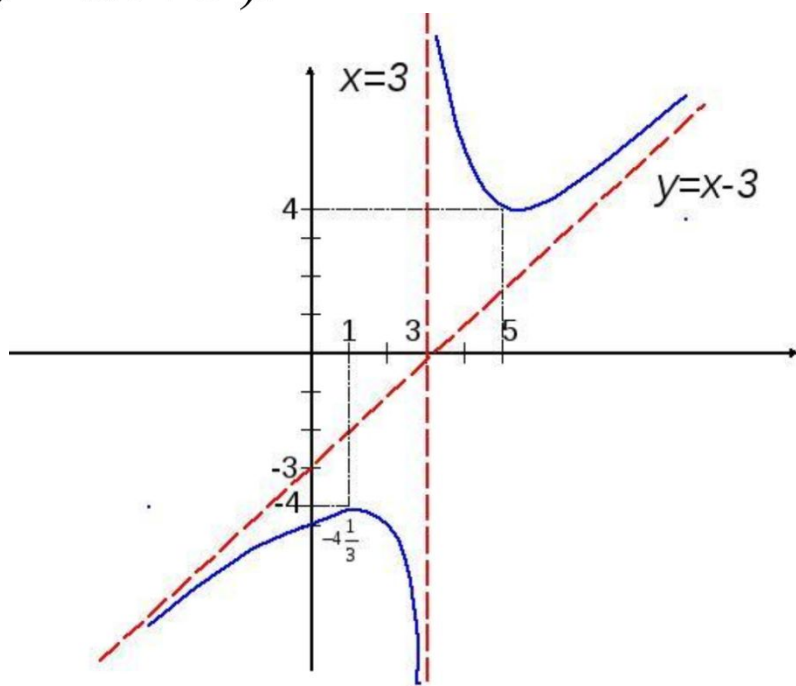
Точки максимума и минимума называют точками **экстремума** функции.



Определение Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает **наибольшее** на множестве X значение, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение Будем говорить, что в точке $x_0 \in X \subset D(f)$ функция $y = f(x)$ принимает **наименьшее** на множестве X значение, если для всех точек $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Асимптотой графика функции называется прямая такая, что расстояние от точек графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точек графика в бесконечность. Асимптоты бывают вертикальные (параллельные оси Oy , их уравнение $x = x_0$), горизонтальные (параллельные оси Ox , их уравнение $y = b$) и наклонные (их уравнение $y = kx + b$).

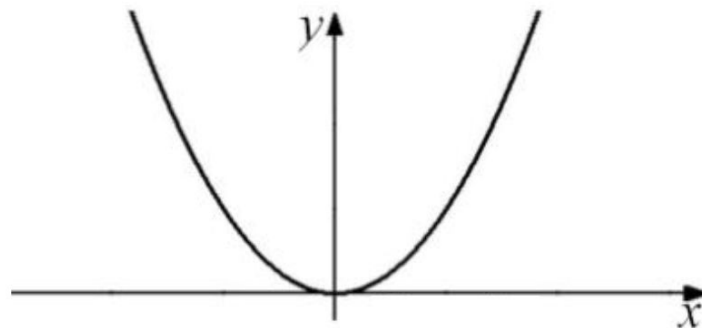


Элементарные функции

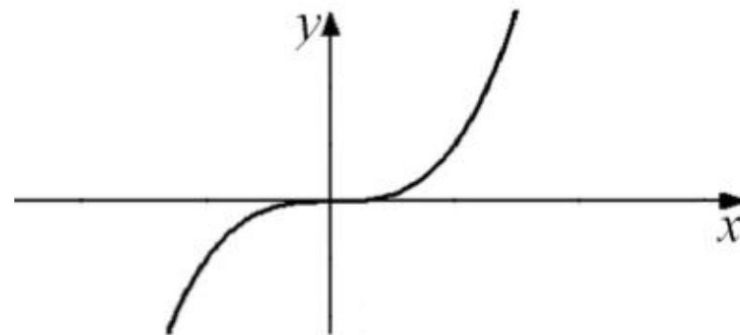
Степенные функции $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Рассмотрим несколько частных случаев степенной функции.

Функции $y = x^{2n}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Они принимают только неотрицательные значения, $E(f) = [0; +\infty)$. Функции являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. Эти функции ограничены снизу. В точке $x = 0$ они имеют минимум и принимают наименьшее значение, равное 0, сверху функции не ограничены.

Функции $y = x^{2n}$ возрастают на промежутке $[0; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; 0]$



Функции $y = x^{2n-1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены на всей числовой прямой, $D(f) = \mathbf{R}$. Множества их изменения – также вся числовая ось $E(f) = \mathbf{R}$, то есть эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. График функции при $n > 1$ приведен на рис. 6 (при $n = 1$ – график функции прямая).



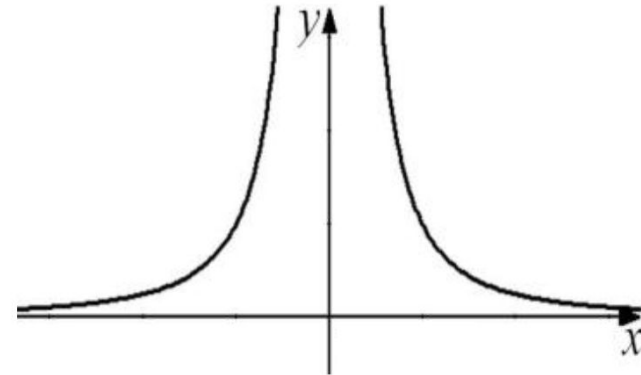
Функции $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены

для всех значений x , отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Они

принимают только положительные значения $E(f) = (0; +\infty)$.

Эти функции ограничены снизу,

но они не принимают свое наименьшее значение. Функции



являются четными, их графики симметричны относительно оси ординат. При $x > 0$ функции убывают, при $x < 0$ функции возрастают. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций

Функции $y = x^{-2n+1} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции опреде-

лены для всех значений x , отличных от 0, то есть

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Множества их

изменения также все значения

y , отличные от 0, то есть

$E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Эти функции

не ограничены ни сверху, ни

снизу. Функции являются не-

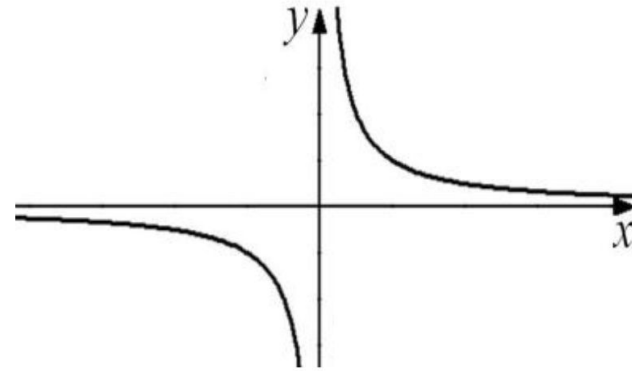
четными, их графики симметричны относительно начала ко-

ординат. Функции убывают на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

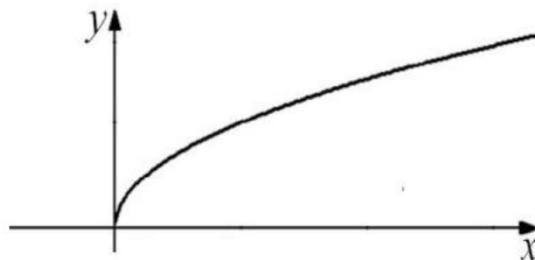
Точка $x = 0$ – точка разрыва функции. Графики функций не

пересекают оси координат. Оси координат являются асим-

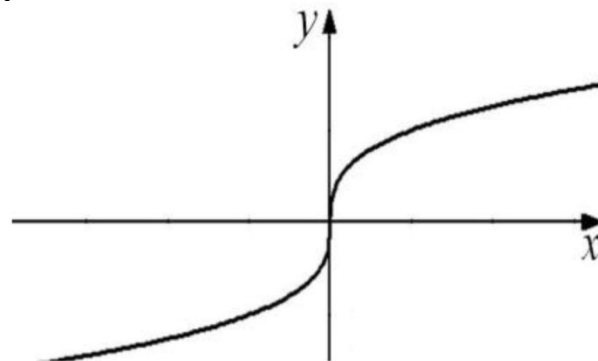
птотами графиков этих функций



Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех неотрицательных значений x , то есть $D(f) = [0; +\infty)$. Множества их изменения также все неотрицательные значения y , то есть $E(f) = [0; +\infty)$. Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху. Наименьшее значение $y = 0$ функции принимают при $x = 0$. Функции возрастают на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти



Функции $y = \sqrt[2n-1]{x}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для всех значений x , то есть $D(f) = \mathbf{R}^1$. Множества их изменения – также все значения y , то есть $E(f) = \mathbf{R}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции возрастают на всей области своего определения. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат

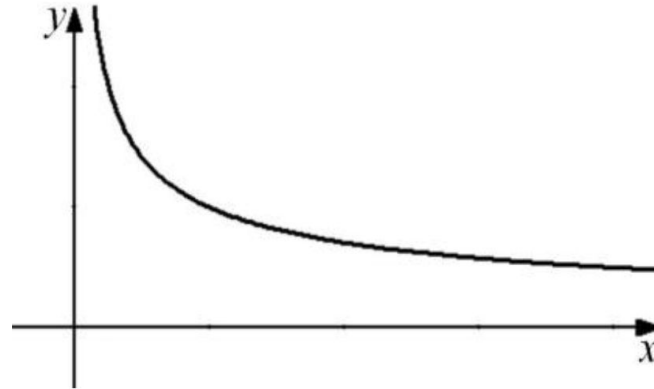


Функции $y = \frac{1}{\sqrt[2n]{x}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для

всех положительных значений x , то есть $D(f) = (0; +\infty)$.

Множества их изменения – также все положительные значения y , то есть $E(f) = (0; +\infty)$.

Эти функции ограничены снизу и не ограничены сверху, но они ни в одной точке не принимают своего наименьшего значения. Функции убывают

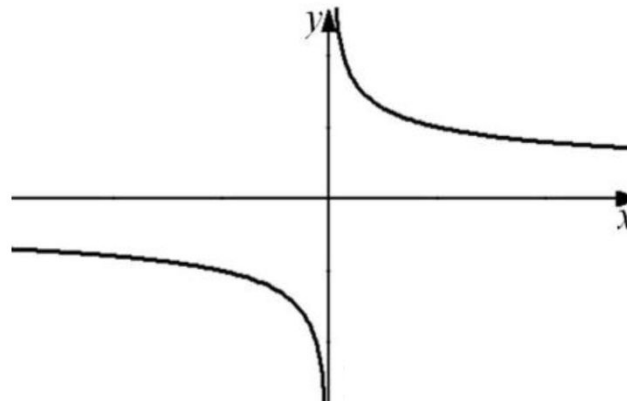


на всей области своего определения. Графики функций расположены в первой четверти. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций

Функции $y = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{x}}$ ($n \in \mathbf{N}$). Функции определены для

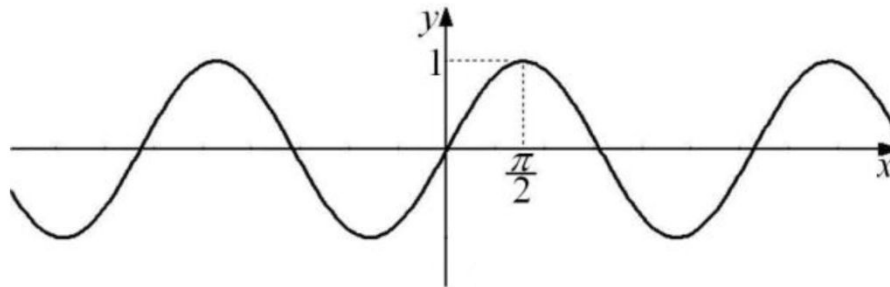
всех значений x , отличных от 0, то есть $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Множества их изменения – также все значения y , отличные от 0, то есть $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Эти функции не ограничены ни сверху, ни снизу. Функции являются нечетными, их графики симметричны относительно начала координат. Функции убывают на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка разрыва функции. Графики функций не пересекают оси координат. Оси координат являются асимптотами графиков этих функций

Функции $y = x^{-2n+1}$
и $y = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{x}}$ взаимно обратные. Их графики симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четвертей.

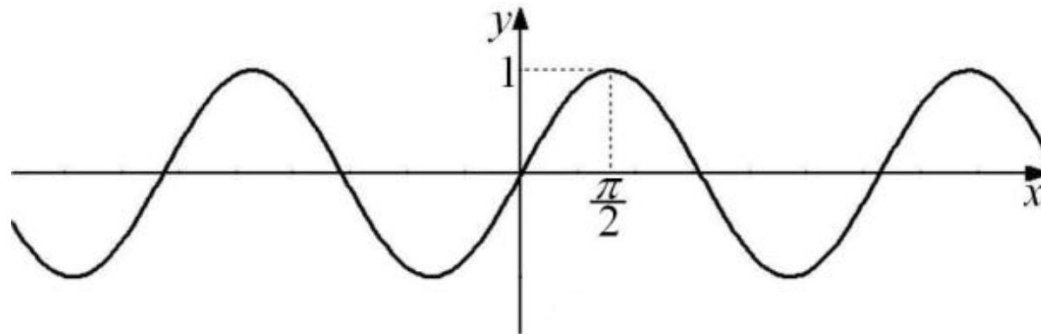


Функция $y = \sin x$. Область определения функции – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \leq 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$),

и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \sin x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \sin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.



Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на



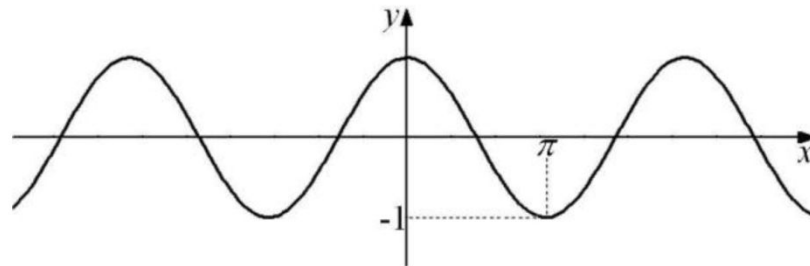
каждом промежутке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ ($n \in \mathbf{Z}$) и убывает

на каждом промежутке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m\right]$ ($m \in \mathbf{Z}$). Гра-

фик этой функции называется *синусоидой*. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной 2π , например $[0; 2\pi]$, а затем копировать его

Функция $y = \cos x$. Область определения функции вся числовая прямая: $D(f) = \mathbf{R}$. Она принимает значения, удовлетворяющие условию $|y| \leq 1$, то есть $E(f) = [-1; 1]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -1$ функция принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками минимума. Наибольшее значение $y = 1$ функция принимает в точках $x = 2\pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$), и эти точки являются точками максимума. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \cos x$ является периодической, ее период $T = 2\pi$. Функция $y = \cos x$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом промежутке $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ($n \in \mathbf{Z}$) и убывает на каждом промежутке $[2\pi m; \pi + 2\pi m]$ ($m \in \mathbf{Z}$). График этой функции называется *косинусоидой*.



Функция $y = \operatorname{tg} x$. Область определения функции все действительные значения x , кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$ ($m \in \mathbf{Z}$):

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \right\}$. Множество ее изменения – вся

числовая прямая, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена

ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не

принимает ни

наименьшего, ни

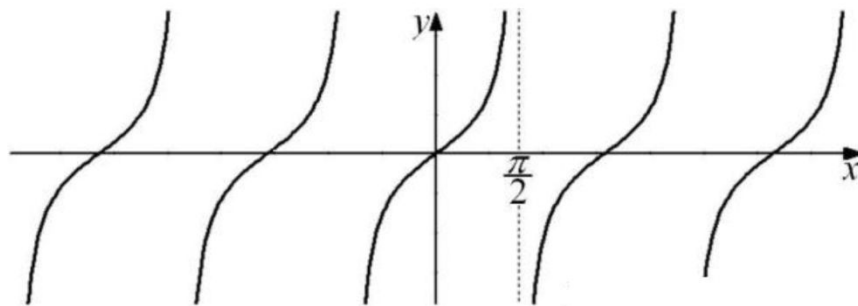
наибольшего

значений. Гра-

фик функции

$y = \operatorname{tg} x$ пересе-

кает ось абсцисс в точках $x = \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Функция $y = \operatorname{tg} x$



является периодической, ее период $T = \pi$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она возрастает на каждом проме-

жутке $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ($n \in \mathbf{Z}$), в точках

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) функция имеет разрывы. Прямые

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) являются вертикальными асимптотами

графика функции. График этой функции называется **тангенсодой**. Учитывая периодичность, достаточно построить

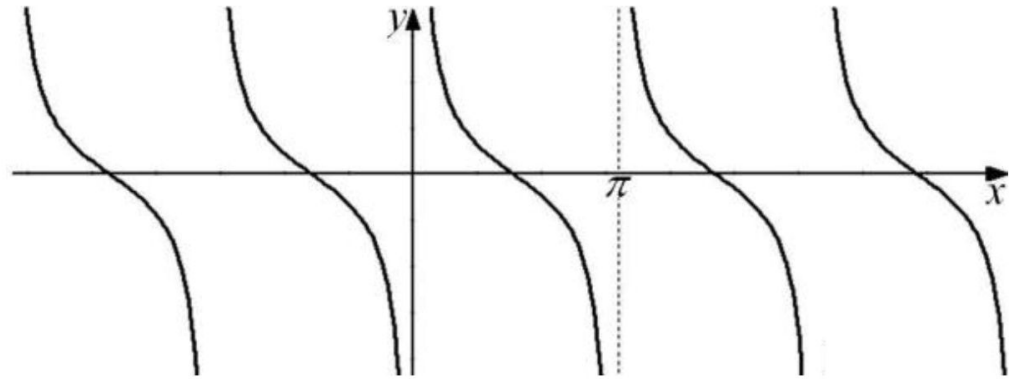
график на отрезке длиной π , например $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем

копировать его

Функция $y = \operatorname{ctg}x$. Область определения функции все действительные значения x , кроме $x = \pi t$ ($t \in \mathbf{Z}$):

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{\pi t, t \in \mathbf{Z}\}$. Множество ее изменения – вся числовая прямая, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция $y = \operatorname{ctg}x$ не ограничена

ни сверху, ни снизу. Она не имеет точек экстремума и не принимает ни

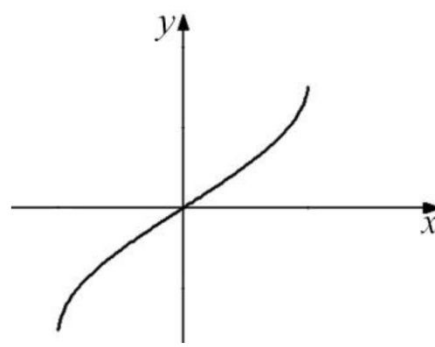


наименьшее, ни наибольшее значения. График функции

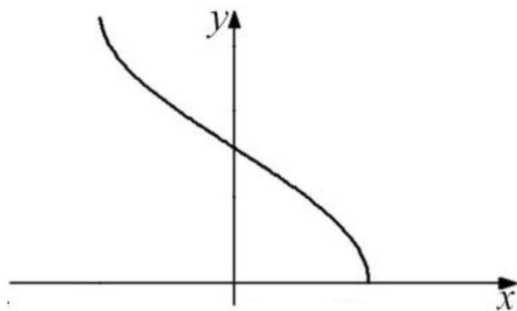
$y = \operatorname{ctg}x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Функция $y = \operatorname{ctg}x$ является периодической, ее период $T = \pi$.
Функция $y = \operatorname{ctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция не является монотонной на всей области определения, но она убывает на каждом промежутке $(\pi n; \pi + \pi n)$ ($n \in \mathbf{Z}$), в точках $x = \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) функция имеет разрывы. Прямые $x = \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$) являются вертикальными асимптотами графика функции. График этой функции называется *котангенсойдой*. Учитывая периодичность, достаточно построить график на отрезке длиной π , например $(0; \pi)$, а затем копировать его

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \sin x$, на которой синус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ каждому значению синуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arcsin x$ – отрезок $[-1; 1]$, множество изменения – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = -1$, наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ функция принимает в точке $x = 1$. Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения. График функции $y = \arcsin x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \sin x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей

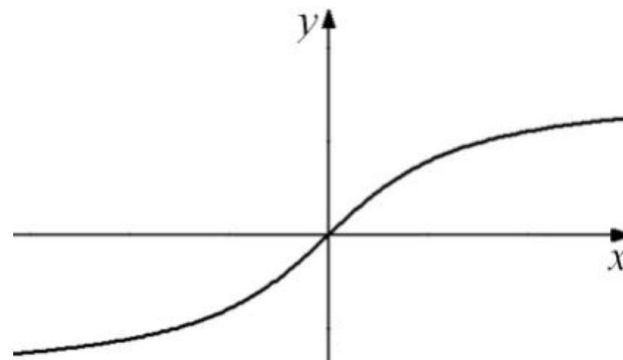


Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим часть графика функции $y = \cos x$, на которой косинус каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – отрезок $[0; \pi]$. Функция $y = \arccos x$ каждому



значению косинуса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \arccos x$ – отрезок $[-1; 1]$, множество изменения – отрезок $[0; \pi]$. Функция ограничена и сверху и снизу. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает в точке $x = 1$, наибольшее значение $y = \pi$ функция принимает в точке $x = -1$. Функция $y = \arccos x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. График функции $y = \arccos x$ симметричен рассмотренной выше части графика функции $y = \cos x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей

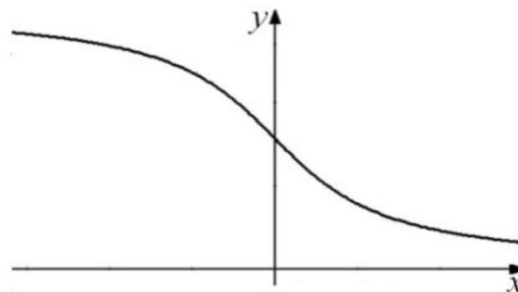
Функция $y = \operatorname{arctg}x$ является обратной к функции $y = \operatorname{tg}x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \operatorname{tg}x$, на которой тангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = \operatorname{arctg}x$ каждому значению тангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arctg}x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$, множество изменения – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но



она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \operatorname{arctg}x$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат. Функция является монотонно возрастающей на всей области определения.

Прямые $y = \pm \frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции. График функции $y = \operatorname{arctg}x$ симметричен ветви графика функции $y = \operatorname{tg}x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.

Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Используя свойства прямой функции, получим свойства обратной. Для этого рассмотрим одну ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, на которой котангенс каждое свое значение принимает только один раз (промежуток монотонности функции) – интервал $(0; \pi)$. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ каждому значению котангенса ставит в соответствие его аргумент. Таким образом, область определения функции $y = \operatorname{arccotg} x$ – вся числовая прямая, $D(f) = \mathbf{R}$, множество изменения – интервал $(0; \pi)$. Функция ограничена и сверху и снизу, но она не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ не является ни четной, ни нечетной. Функция является монотонно убывающей на всей области определения. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика функции.



Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Область определения функции – вся числовая прямая,

$D(f) = \mathbf{R}$. Функция принимает

только положительные значения:

$$E(f) = (0; +\infty).$$

Функция ограничена снизу и

не ограничена сверху. Она не

принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений, не

имеет точек экстремума.

Показательная функция не

является ни четной, ни не-

четной. График функции

пересекает ось ординат в

точке $(0; 1)$, ось абсцисс он

не пересекает. При $a > 1$

функция является возрастающей

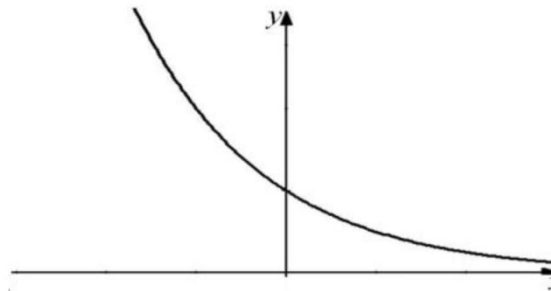
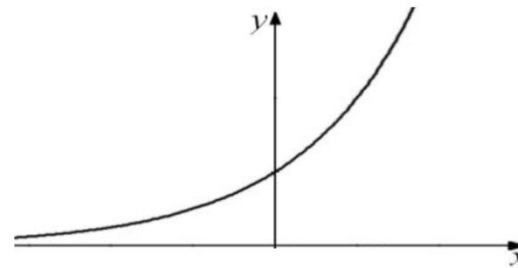
а при $0 < a < 1$ –

убывающей

на всей области определения. Ось Ox

является горизонтальной асимптотой графика показательной

функции.



В математике и ее приложениях наиболее часто ис-

пользуется показательная функция, основание которой равно

числу e . Функцию $y = e^x$ называют **экспонентой**.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$

и $a \neq 1$. Логарифмическая функция является обратной к по-

казательной. Поэтому ее область определения – множество положительных чисел, $D(f) = (0; +\infty)$, область изменения –

множество действительных

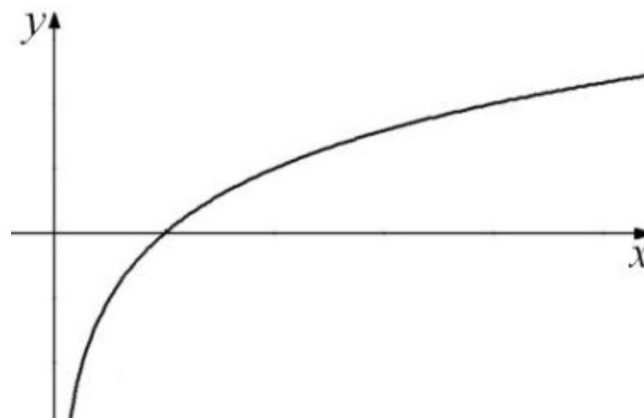
чисел, $E(f) = \mathbf{R}$. Функция не

ограничена ни сверху, ни снизу.

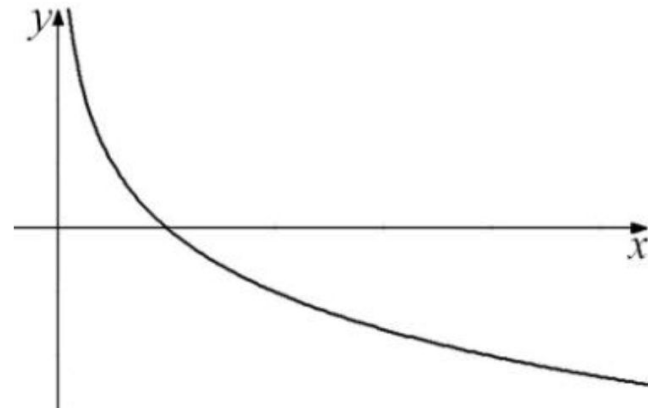
Она не принимает ни наименьшего,

ни наибольшего значений, не имеет точек эк-

стремума. Логарифмическая функция не является ни четной



ни нечетной. График функции пересекает ось абсцисс в точке $(1; 0)$, ось ординат график не пересекает. При $a > 1$ функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей на всей области определения. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции. График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей.



Логарифмическую функцию, основание которой равно e , называют *натуральным логарифмом* и обозначают $y = \ln x$.