6-дәріс. Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d мына формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген λ қатынаста бөлетін $M(x; y; z)$ нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\ .$$

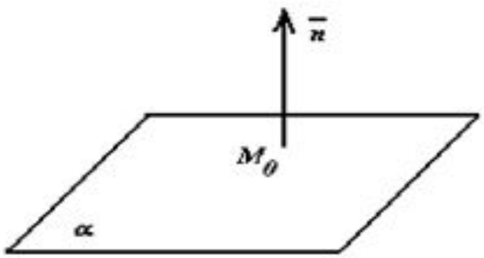
Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ болғанда кесіндінің ортасының координаталары: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

1-мысал. $M_1(3; -2; 2), M_2(5; -8; -3)$. M_1M_2 қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі. $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$

$$= \sqrt{(5-3)^2 + (-8+2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65}.$$

Жазықтық теңдеулері



Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0 .$$

$\bar{n} = \{A; B; C\}$ - жазықтықтың нормаль векторы, $\bar{n} \perp \alpha$.

Бізге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі, $\bar{n} = \{A; B; C\}$ жазықтықтың нормаль векторы берілсе, онда M_0 нүктесі арқылы өтетін $\bar{n}$ - нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Жазықтықтардың өз-ара орналасуы. Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады.

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

теңдеулерімен α_1, α_2 жазықтықтары берілсін.

$\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \alpha_1, \quad \overline{n_1} - \alpha_1$ жазықтығының нормаль векторы;

$\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \alpha_2, \quad \overline{n_2} - \alpha_2$ жазықтығының нормаль векторы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрышты θ деп белгілейік. Осы бұрыштың косинусы былай есептелінеді

$$\cos\theta = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Егер $\quad \alpha_1 \parallel \alpha_2 \ \Rightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

Егер $\quad \alpha_1 \perp \alpha_2 \ \Rightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

«Кесінді» түріндегі жазықтық теңдеуі.

$$Ax + By + Cz = -D \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

$$-\frac{D}{A} = a, \ -\frac{D}{B} = в, \ -\frac{D}{C} = c \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{в} + \frac{z}{c} = 1$$

жазықтықтың “кесінді” түріндегі теңдеуін аламыз.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ **нүктесінен** $Ax + By + Cz + D = 0$ **жазықтығына дейінгі қашықтық** d мына формуламен есептелінеді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуі

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0. \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2-мысал. $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың $\grave{I}_1(3;-2;2)$, $M_2(5;-8;-3)$, $M_3(-1;4;5)$, $M_4(4;3;-4)$ төбелерінің координаталары берілген. Табу керек:

1) $M_1M_2M_3$ жазықтығының теңдеуін табу керек.

Шешуі. $M_1M_2M_3$ - нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 5-3 & -8+2 & -3-2 \\ -1-3 & 4+2 & 5-2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-18(x-3)+20(y+2)+12(z-2)-24(z-2)-6(y+2)+30(x-3)=0$$

$$12(x-3)+14(y+2)-12(z-2)=0$$

$$12x-36+14y+28-12z+24=0$$

$$12x+14y-12z+16=0 \qquad 6x+7y-6z+8=0$$

2) M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына дейінгі ара қашықтығын табу керек.

Шешуі. $d=\dfrac{|Ax_4+By_4+Cz_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, онда $d=\left|\dfrac{6\cdot 4+7\cdot 3-9\cdot(-4)+8}{\sqrt{36+49+36}}\right|=\dfrac{77}{11}=7.$

3) $M_1M_2M_3$ үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі. $M_1M_2M_3$-ның ауданы $\vec{a}_1=\overline{M_1M_2}=\{2;-6;-5\}$, $\vec{a}_2=\overline{M_1M_3}=\{-4;6;3\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданының жартысына тең.

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -6 & -5\\ -4 & 6 & 3\end{vmatrix}=-18\vec{i}+20\vec{j}+12\vec{k}-24\vec{k}-6\vec{j}+30\vec{i}=12\vec{i}+14\vec{j}-12\vec{k}.$$

Бұдан $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|=\sqrt{12^2+14^2+12^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 22=11.$

Кеңістіктегі түзу теңдеуі

Кеңістікте түзу екі жазықтық қиылысуы арқылы анықталады

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

нормаль векторлары $\alpha_1 :\ \overline{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\alpha_2 :\ N_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$.

Түзудің канондық теңдеуі $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Түзудің канондық теңдеуін $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = t$ параметріне теңестірсек, онда түзудің параметрлік теңдеуі

$$x = lt + x_1, \quad y = mt + y_1, \quad z = nt + z_1.$$

Екі түзудің арасындағы бұрыш

$\tilde{l}_1: \dfrac{x-a_1}{l_1} = \dfrac{y-в_1}{m_1} = \dfrac{z-c_1}{n_1}$, $\tilde{l}_2: \dfrac{x-a_2}{l_2} = \dfrac{y-в_2}{m_2} = \dfrac{z-c_2}{n_2}$ түзулері канондық теңдеулерімен берілсе, онда екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right|\cdot\left|\overline{a_2}\right|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ – түзулердің перпендикулярлық белгісі.

$l_1 // l_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ – түзулердің параллельдік белгісі.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

$\frac{x-a}{l}=\frac{y-в}{m}=\frac{z-c}{n}$ түзу және $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығы берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы сүйір бұрыштың синусы

$$\sin\alpha=\frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

формуламен анықталады.

$\vec{n}\perp\vec{a}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{a}=0$ - түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі.

$\vec{n}\,//\,\vec{a}\Rightarrow\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ - түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі.

3-мысал. $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың $M_1(3;-2;2)$, $M_2(5;-8;-3)$, $M_3(-1;4;5)$, $M_4(4;3;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

1) M_1M_2 қабырғасының (түзуінің)теңдеуін табу керек.

Шешуі. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}.$

Осыдан $\dfrac{x-3}{5-3}=\dfrac{y+2}{-8+2}=\dfrac{z-2}{-1-2}$ $\qquad \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z-2}{-3}$

M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a}_{12}=\overline{M_1M_2}=\{2;-6;-3\}$

2) M_3 нүктесі арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі. Ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде $\vec{a}_1=\{2;-6;-5\}$ алуға болады. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z-5}{-5}$ $-$ізделінді түзудің теңдеуі.

3) M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі. Ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде $M_1M_2M_3$ жазықтығының $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторы алуға болады.

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+4}{-6}$$ – ізделінді түзудің теңдеуі.

4) M_1M_2 және M_1M_4 түзулерінің арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі. $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ және $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$

$$Cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{2\cdot 1 + (-6)\cdot 5 + (-5)\cdot(-6)}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{-58}{\sqrt{4030}};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-58}{\sqrt{4030}}\right).$$

5) M_1M_4 түзуі мен $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі. $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1, 5, -6\}$ мен $n_1 = \{6; 7; -6\}$ векторлар арасындағы бұрышын анықтаймыз.

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{a}_4}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{a}_4|} = \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 5 + (-6) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{78}{11 \cdot \sqrt{62}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{-58}{11 \cdot \sqrt{62}}.$$

6) $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың көлемін табу керек.

Шешуі. Үшбұрышты пирамиданың көлемі $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$, $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_2} = \{-4; 6; 3\}$, $\vec{a}_3 = \overline{M_1M_3} = \{1; 5; -6\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелепипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең.

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -72 - 18 + 100 + 30 + 144 - 30 = 274 - 120 = 154.$$

Осыдан $V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3| = \frac{1}{6} \cdot 154 = \frac{77}{3}.$

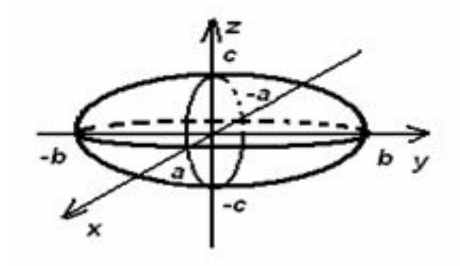
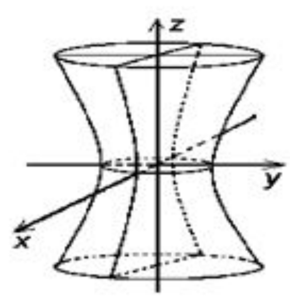
Екінші ретті беттер

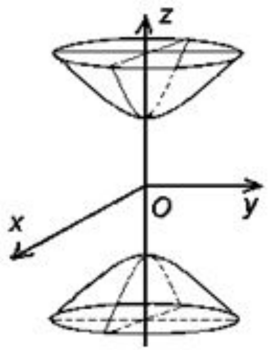
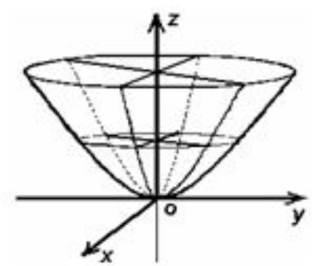
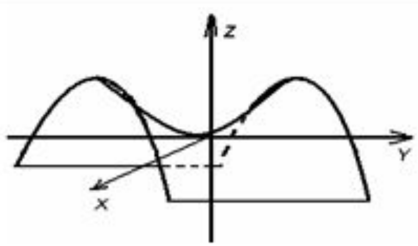
Декарттық координат жүйесінде екінші ретті беттер

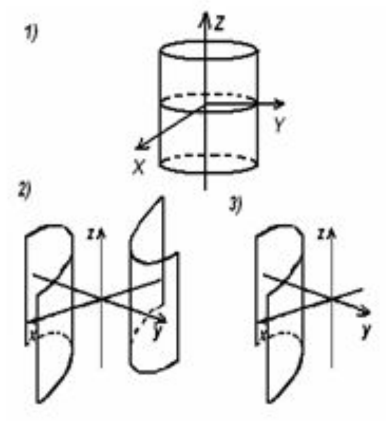
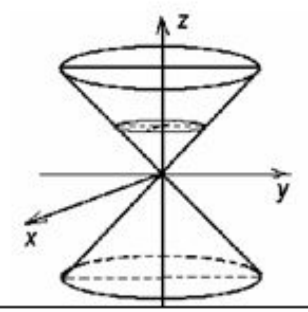
$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz +$$
$$+ 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$$

жалпы теңдеуімен беріледі, мұндағы $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ - бірдей нөлге тең емес сандар.

Кеңістікте екінші ретті теңдеумен өрнектелетін беттер:

	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоид
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ бір қуысты гиперболоид

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ екі қуысты гиперболоид
	$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ эллипстік параболоид
	$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}$ гиперболалық параболоид

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипстік цилиндр, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболалық цилиндр, $y^2=2px$ параболалық цилиндр
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ конус.