

## 6-дәріс. Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

$M_1(x_1; y_1; z_1)$  және  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  нүктелерінің ара қашықтығы  $d$  мына формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$  және  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген  $\lambda$  қатынаста бөлетін  $M(x; y; z)$  нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

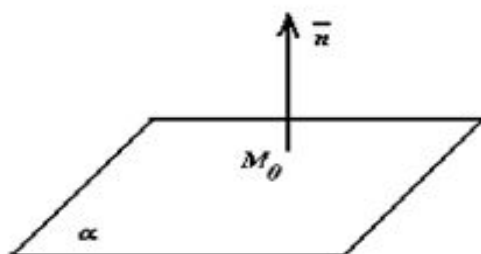
Дербес жағдайда,  $\lambda = 1$  болғанда кесіндінің ортасының

координаталары:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

**1-мысал.**  $M_1(3; -2; 2), M_2(5; -8; -3)$ .  $M_1M_2$  қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі.  $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$   
 $= \sqrt{(5 - 3)^2 + (-8 + 2)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65}.$

## Жазықтық теңдеулері



Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

$\bar{n} = \{A; B; C\}$  - жазықтықтың нормаль векторы,  $\bar{n} \perp \alpha$ .

Бізге  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  нүктесі,  $\bar{n} = \{A; B; C\}$  жазықтықтың нормаль

векторы берілсе, онда  $M_0$  нүктесі арқылы өтетін  $\bar{n}$  - нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

**Жазықтықтардың өз-ара орналасуы.** Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

тендеулерімен  $\alpha_1, \alpha_2$  жазықтықтары берілсін.

$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \alpha_1$ ,  $\bar{n}_1 - \alpha_1$  жазықтығының нормаль векторы;

$\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \alpha_2$ ,  $\bar{n}_2 - \alpha_2$  жазықтығының нормаль векторы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрышты  $\theta$  деп белгілейік. Осы бұрыштың косинусы былай есептелінеді

$$\cos \theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Егер  $\alpha_1 // \alpha_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

Егер  $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ .

**«Кесінді» түріндегі жазықтық теңдеуі.**

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

жазықтықтың “кесінді” түріндегі теңдеуін аламыз.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$  нүктесінен  $Ax + By + Cz + D = 0$  жазықтығына дейінгі қашықтық  $d$  мына формуламен есептеледі:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы өтетін жазықтық теңдеуі.**  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуі

$$\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_2M_3} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2-мысал.  $M_1M_2M_3M_4$  - үшбұрышты пирамиданың  $I_1(3; -2; 2)$ ,  
 $M_2(5; -8; -3)$ ,  $M_3(-1; 4; 5)$ ,  $M_4(4; 3; -4)$  төбелерінің координаталары  
 берілген. Табу керек:

1)  $M_1M_2M_3$  жазықтығының тендеуін табу керек.

Шешуі.  $M_1M_2M_3$  - нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың тендеуі

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 5-3 & -8+2 & -3-2 \\ -1-3 & 4+2 & 5-2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-18(x-3) + 20(y+2) + 12(z-2) - 24(z-2) - 6(y+2) + 30(x-3) = 0$$

$$12(x-3) + 14(y+2) - 12(z-2) = 0$$

$$12x - 36 + 14y + 28 - 12z + 24 = 0$$

$$12x + 14y - 12z + 16 = 0 \qquad 6x + 7y - 6z + 8 = 0$$

2)  $M_4$  нүктесінен  $M_1M_2M_3$  жазықтығына дейінгі ара қашықтығын табу керек.

Шешуі.  $d = \frac{|Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , онда  $d = \left| \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 - 9 \cdot (-4) + 8}{\sqrt{36 + 49 + 36}} \right| = \frac{77}{11} = 7$ .

3)  $M_1M_2M_3$  үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі.  $M_1M_2M_3$ -ның ауданы  $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ ,  
 $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_3} = \{-4; 6; 3\}$  векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданының жартысына тең.

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k} - 24\vec{k} - 6\vec{j} + 30\vec{i} = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Бұдан  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{12^2 + 14^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11$ .

## Кеңістіктегі түзу теңдеуі

Кеңістікте түзу екі жазықтық қиылысуы арқылы анықталады

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

нормаль векторлары  $\alpha_1 : \overline{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ ,  $\alpha_2 : \overline{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ .

Түзудің канондық теңдеуі  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ .

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Түзудің канондық теңдеуін  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t$

параметріне теңестірсек, онда түзудің параметрлік теңдеуі

$$x = lt + x_1, \quad y = mt + y_1, \quad z = nt + z_1.$$

## Екі түзудің арасындағы бұрыш

$$\tilde{l}_1: \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}, \quad \tilde{l}_2: \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2} \quad \text{түзулері канондық}$$

теңдеулерімен берілсе, онда екі түзудің арасындағы бұрыштың косинусы

$$\cos \alpha = \frac{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}}{|\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$  – түзулердің перпендикулярлық белгісі.

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$  – түзулердің параллельдік белгісі.



### Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$  түзу және  $Ax + By + Cz + D = 0$  жазықтығы берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы сүйір бұрыштың синусы

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

формуламен анықталады.

$\vec{n} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$  - түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі.

$\vec{n} \parallel \vec{a} \Rightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$  - түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі.

3-мысал.  $M_1M_2M_3M_4$  - үшбұрышты пирамиданың  $M_1(3; -2; 2)$ ,  $M_2(5; -8; -3)$ ,  $M_3(-1; 4; 5)$ ,  $M_4(4; 3; -4)$  төбелерінің координаталары берілген.

1)  $M_1M_2$  қабырғасының (түзуінің) теңдеуін табу керек.

Шешуі. 
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Осыдан 
$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y + 2}{-8 + 2} = \frac{z - 2}{-1 - 2} \qquad \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z - 2}{-3}$$

$M_1M_2$  түзуінің бағыттаушы векторы  $\vec{a}_{12} = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -3\}$

2)  $M_3$  нүктесі арқылы өтетін және  $M_1M_2$  түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі. Изделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде  $\vec{a}_1 = \{2; -6; -5\}$

алуға болады. 
$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 4}{-6} = \frac{z - 5}{-5}$$
 - изделінді түзудің теңдеуі.

3)  $M_4$  нүктесі арқылы өтетін  $M_1M_2M_3$  жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі. Ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде  $M_1M_2M_3$  жазықтығының  $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$  нормаль векторы алуға болады.

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+4}{-6} \text{ - ізделінді түзудің теңдеуі.}$$

4)  $M_1M_2$  және  $M_1M_4$  түзулерінің арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі.  $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$  және  $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{2 \cdot 1 + (-6) \cdot 5 + (-5) \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{-58}{\sqrt{4030}};$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{-58}{\sqrt{4030}} \right).$$

5)  $M_1M_4$  түзуі мен  $M_1M_2M_3$  жазықтығының арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі.  $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_4} = \{1, 5, -6\}$  мен  $n_1 = \{6; 7; -6\}$  векторлар арасындағы бұрышын анықтаймыз.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 5 + (-6) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{78}{11 \cdot \sqrt{62}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{-58}{11 \cdot \sqrt{62}}.$$

6)  $M_1M_2M_3M_4$  - үшбұрышты пирамиданың көлемін табу керек.

Шешуі. Үшбұрышты пирамиданың көлемі  $\vec{a}_1 = \overline{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ ,  
 $\vec{a}_2 = \overline{M_1M_3} = \{-4; 6; 3\}$ ,  $\vec{a}_3 = \overline{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$  векторлары арқылы тұрғызылған параллелепипед көлемінің  $\frac{1}{6}$  бөлігіне тең.

$$|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -72 - 18 + 100 + 30 + 144 - 30 = 274 - 120 = 154.$$

$$\text{Осыдан} \quad V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3| = \frac{1}{6} \cdot 154 = \frac{77}{3}.$$

## Екінші ретті беттер

Декарттық координат жүйесінде екінші ретті беттер

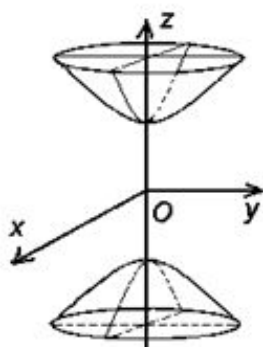
$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$$

жалпы тендеуімен беріледі, мұндағы  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  - бірдей нөлге тең емес сандар.

Кеңістікте екінші ретті тендеумен өрнектелетін беттер:

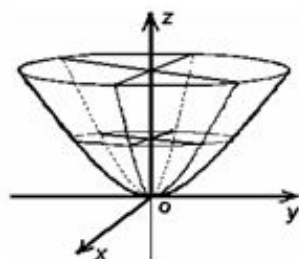


	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>ЭЛЛИПСОИД</p>
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>бір қуысты гиперболоид</p>



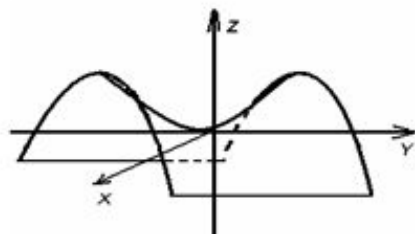
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

екі қуысты гиперболоид



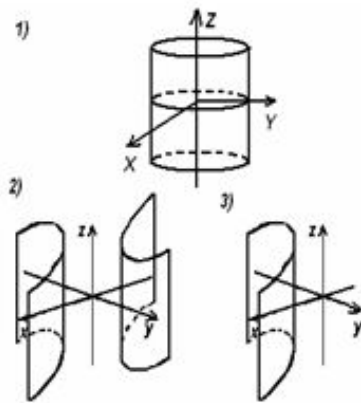
$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$

эллипстік параболоид



$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

гиперболалық  
параболоид



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

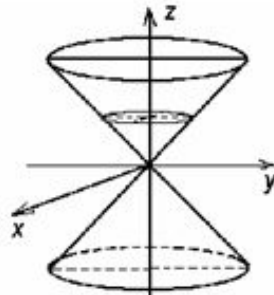
эллипстік цилиндр,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболалық цилиндр,

$$y^2 = 2px$$

параболалық цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

конус.

