

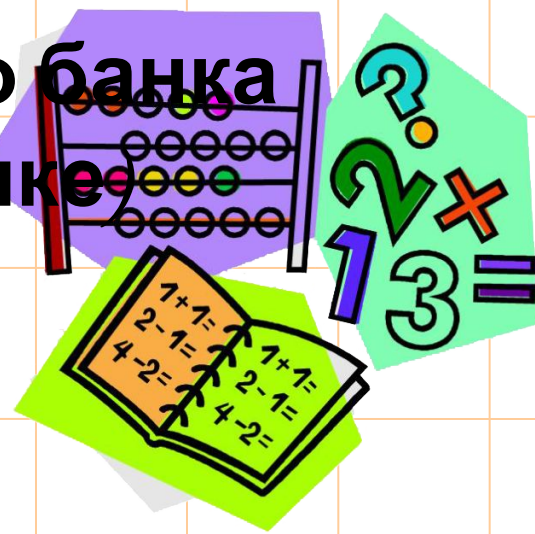
**Методическое пособие для учащихся 11
классов**

***Производная.
Первообразная.
Интеграл.***

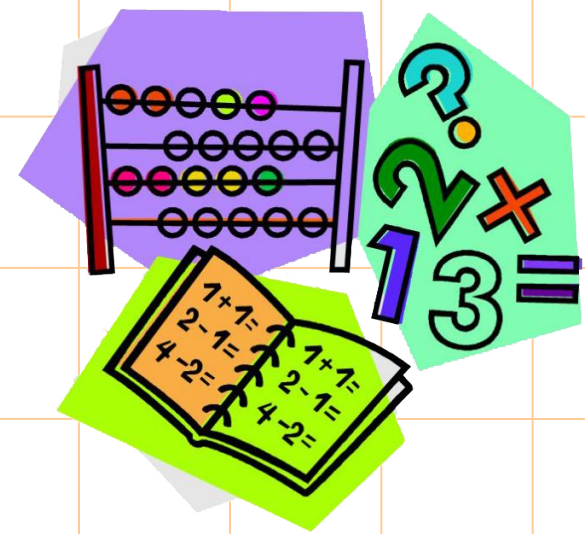
**(по материалам открытого банка
задач ЕГЭ по математике)**

2018

г.



Физический СМЫСЛ производной



Задача №1

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 6t^2 - 48t + 17$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

**Ответ: 60
м/с.**

Задача №2

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

**Ответ: 20
м/с.**

Задача №3

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

**Ответ: 59
м/с.**

Задача №4

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

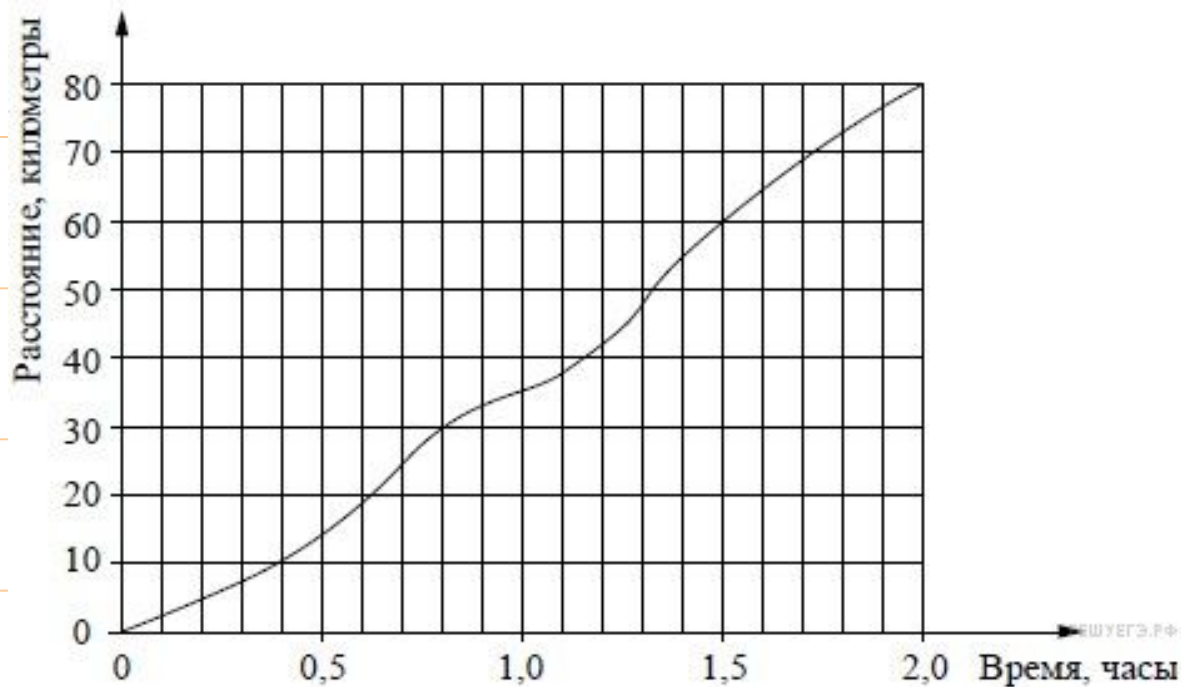
(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Ответ:

7с.

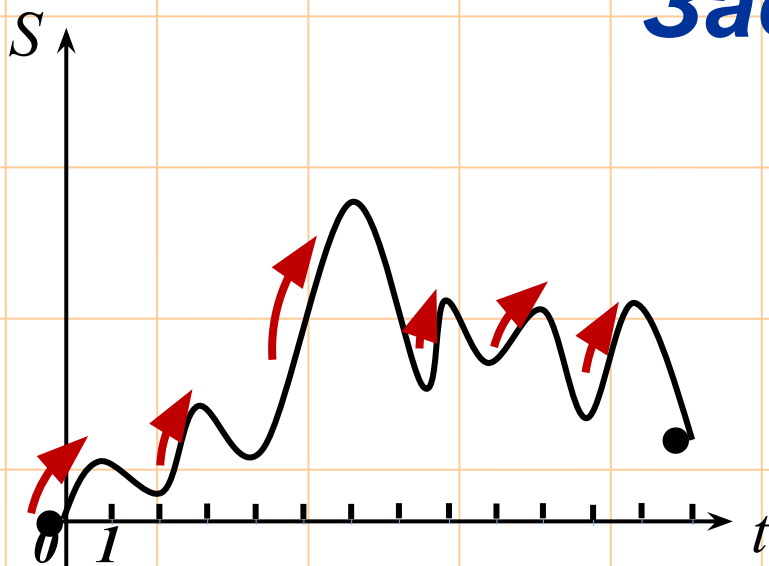
Задача №5

На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время (в часах), на оси ординат — пройденный путь (в километрах). Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.



**Ответ: 40
км/ч**

Задача №6



Материальная точка M начинает движение из точки A и движется на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах,

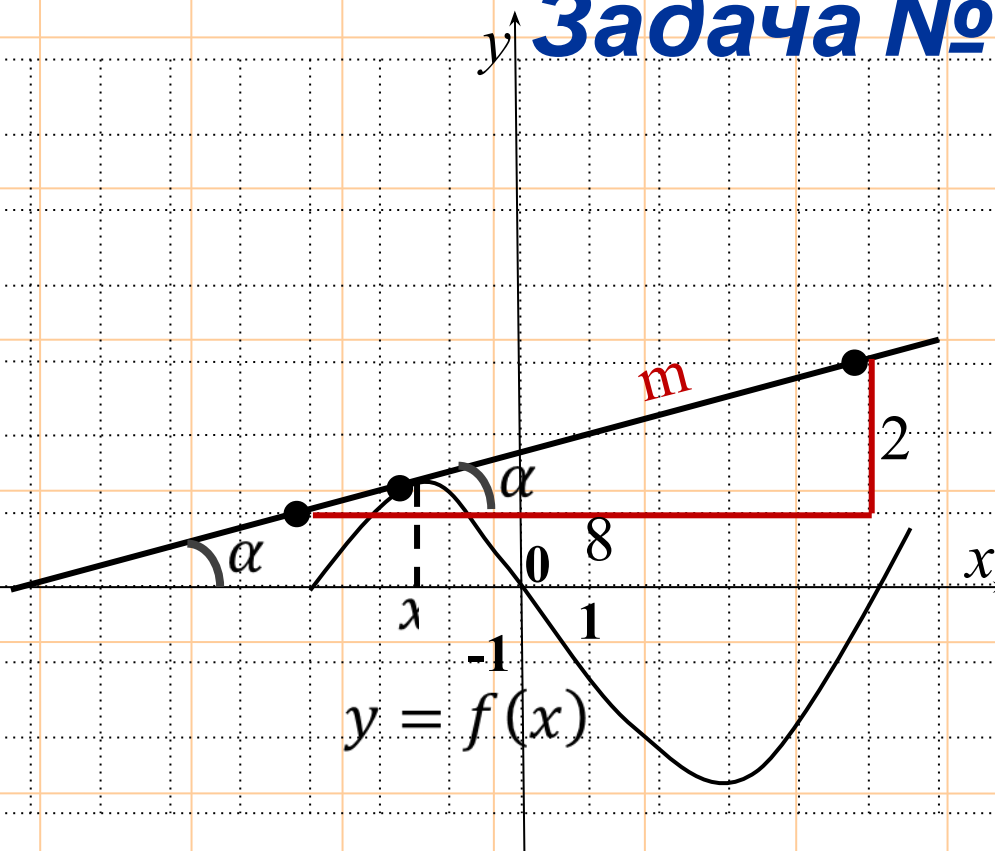
на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

Ответ:

11.

***Геометрический смысл
производной,
касательная***

Задача № 7

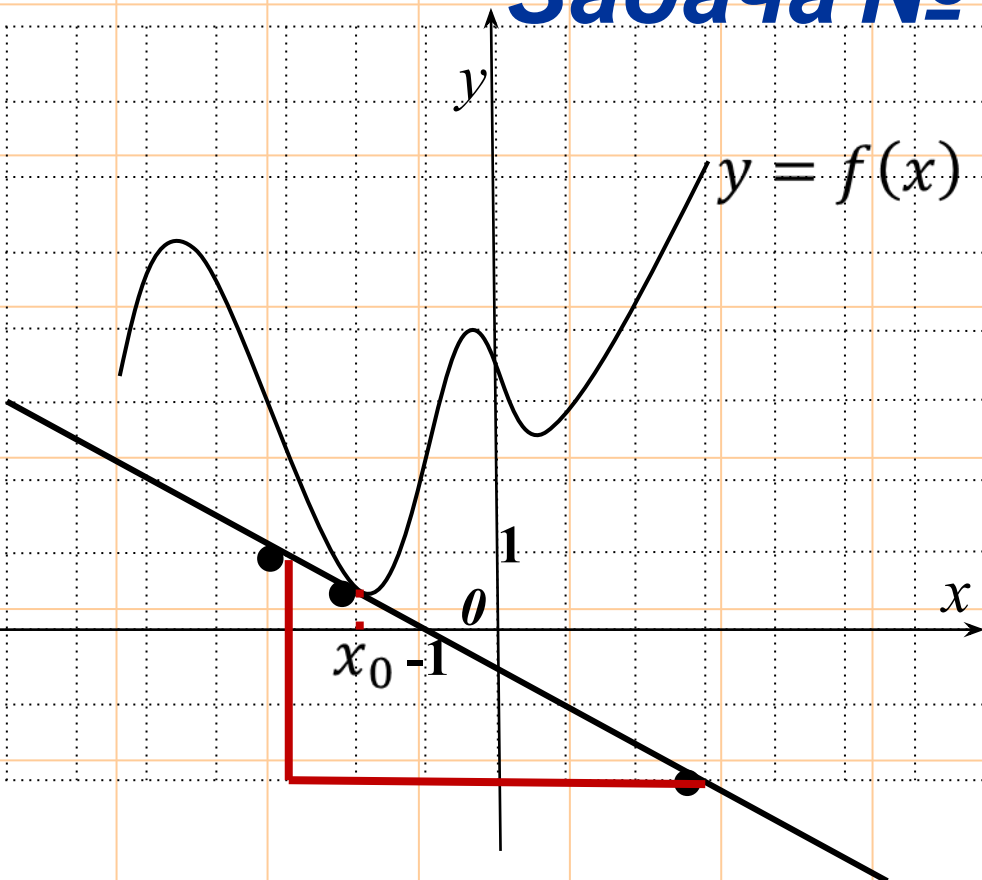


На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Ответ:
0,25

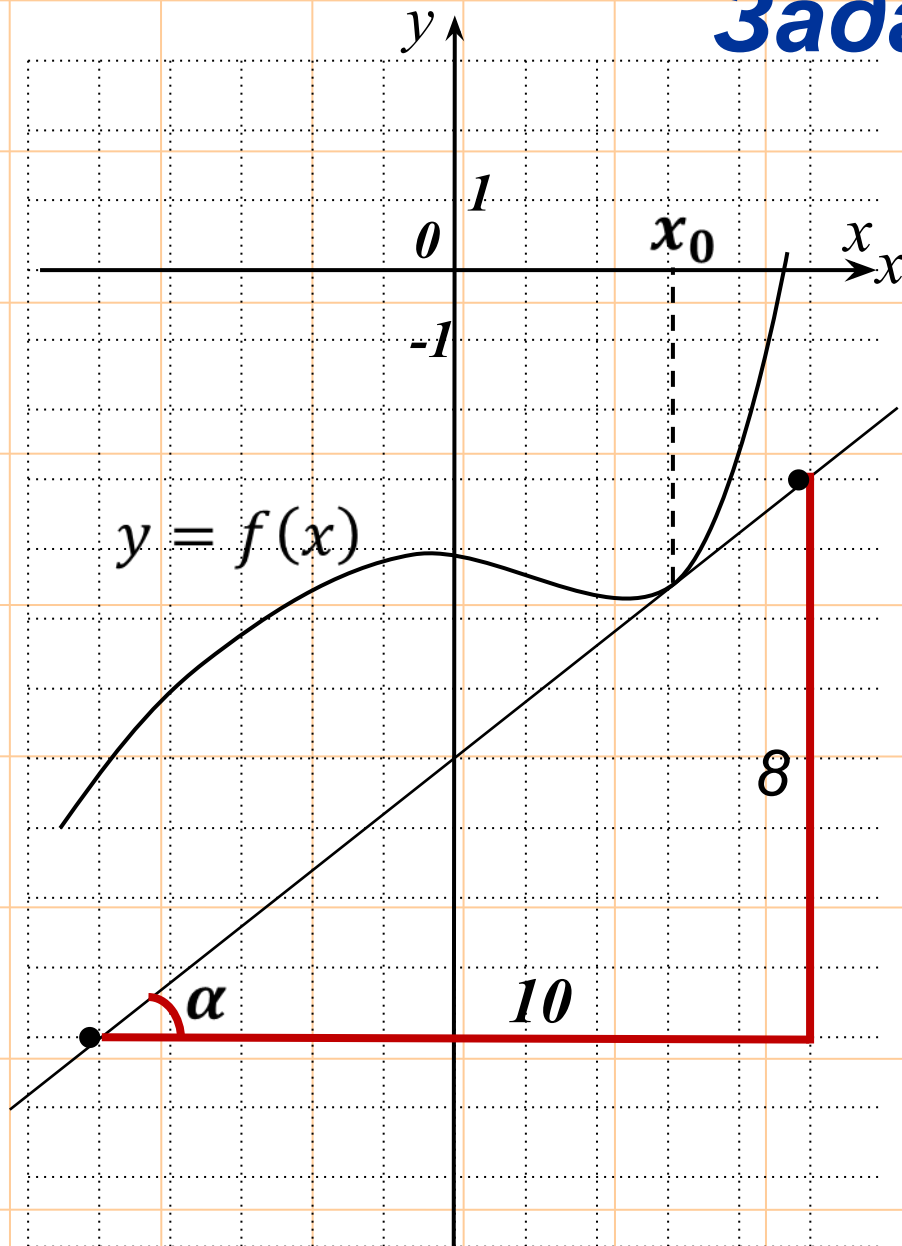
Задача № 8

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ:
 $-0,5$

Задача №9



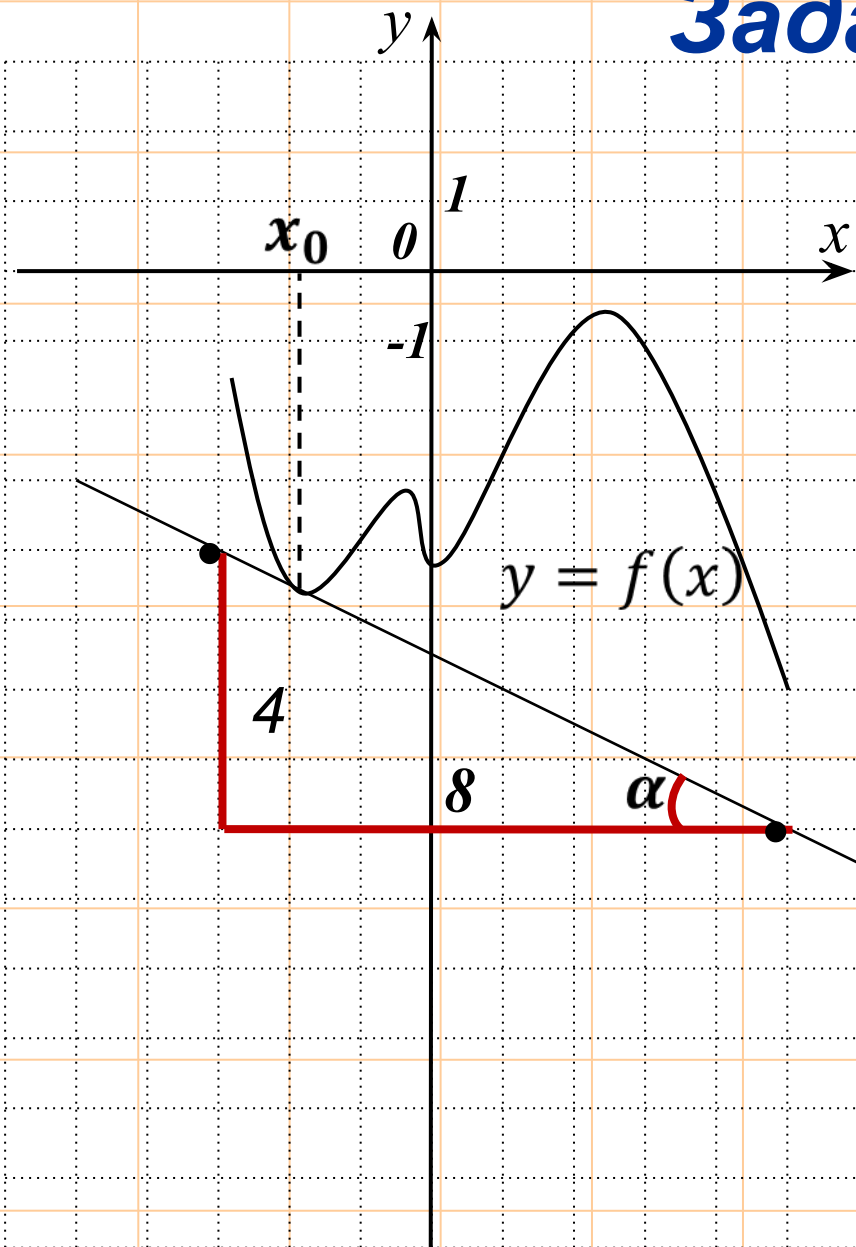
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Ответ:
0,8

Задача №10

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

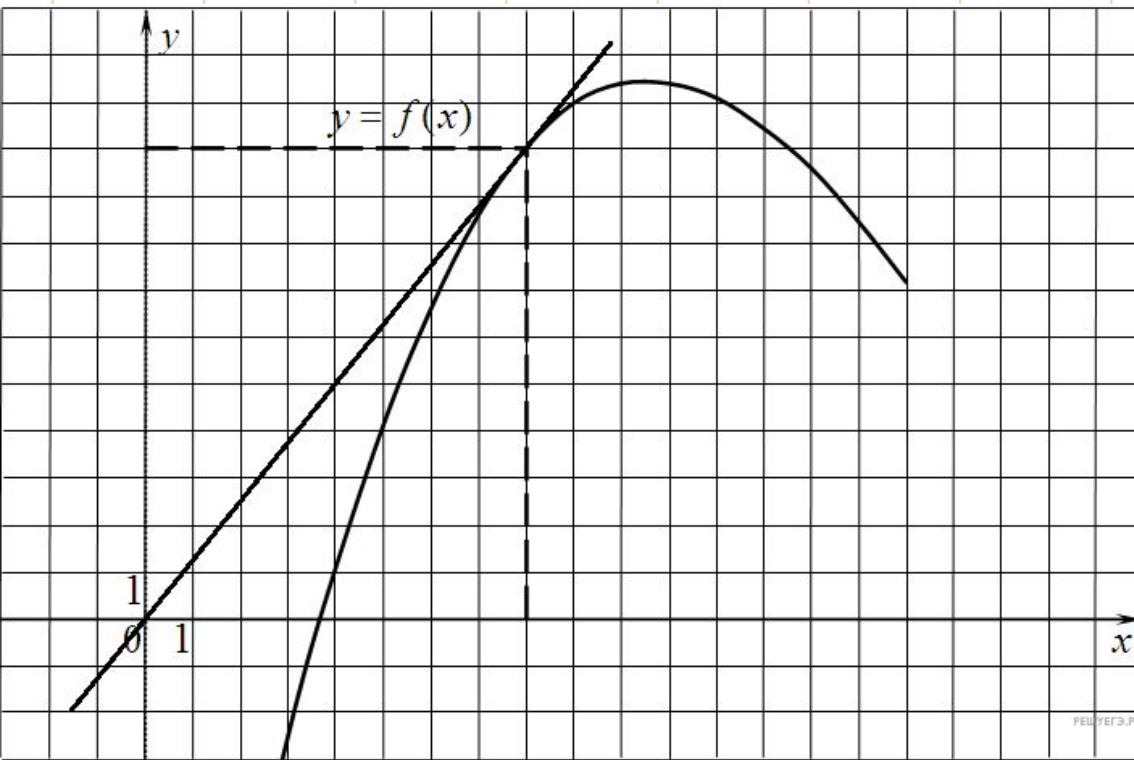


Ответ:

$-0,5$

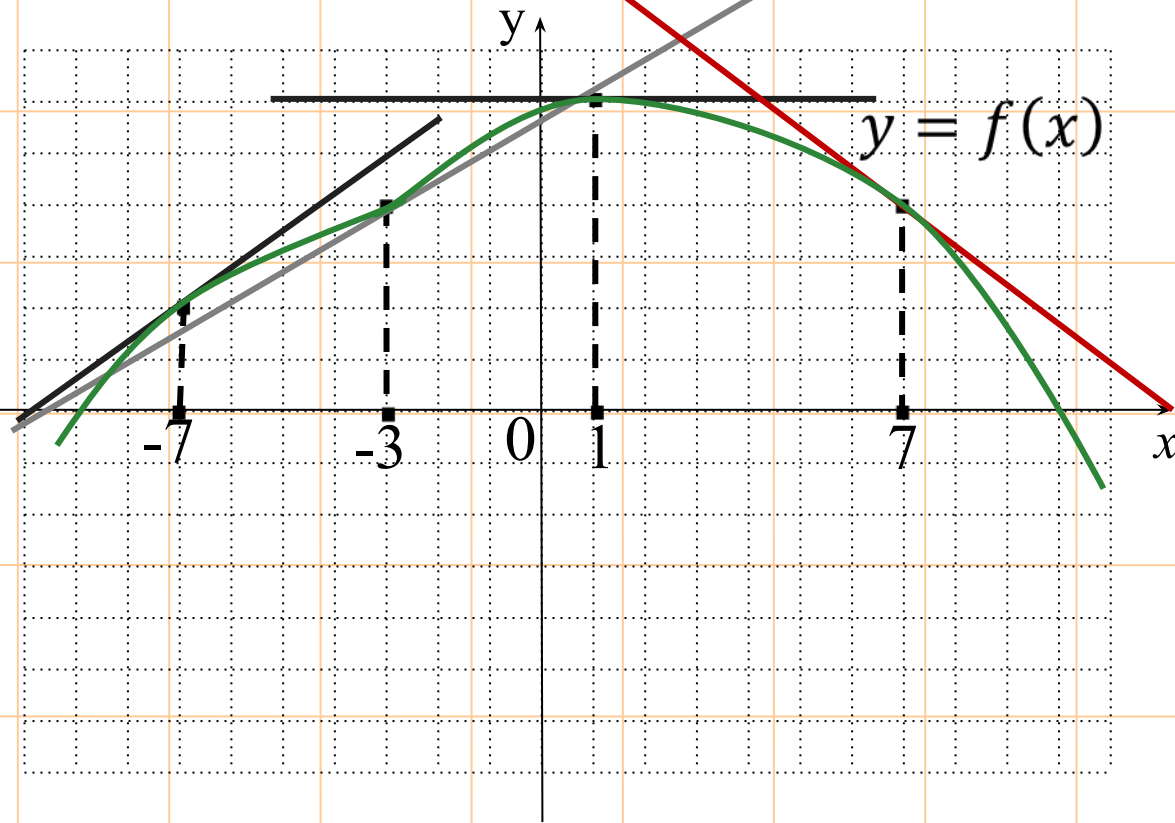
Задача №11

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



Ответ:

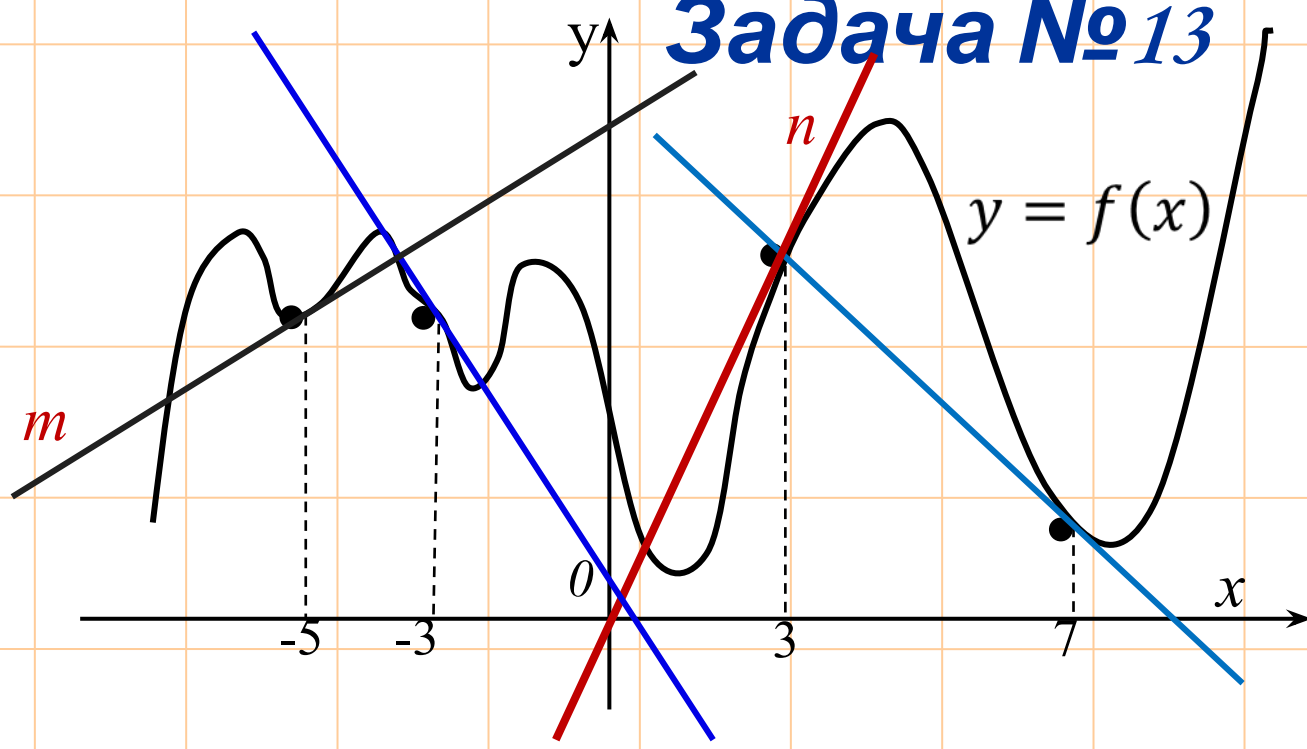
Задача №12



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-7, -3, 1, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Ответ: 7

Задача №13



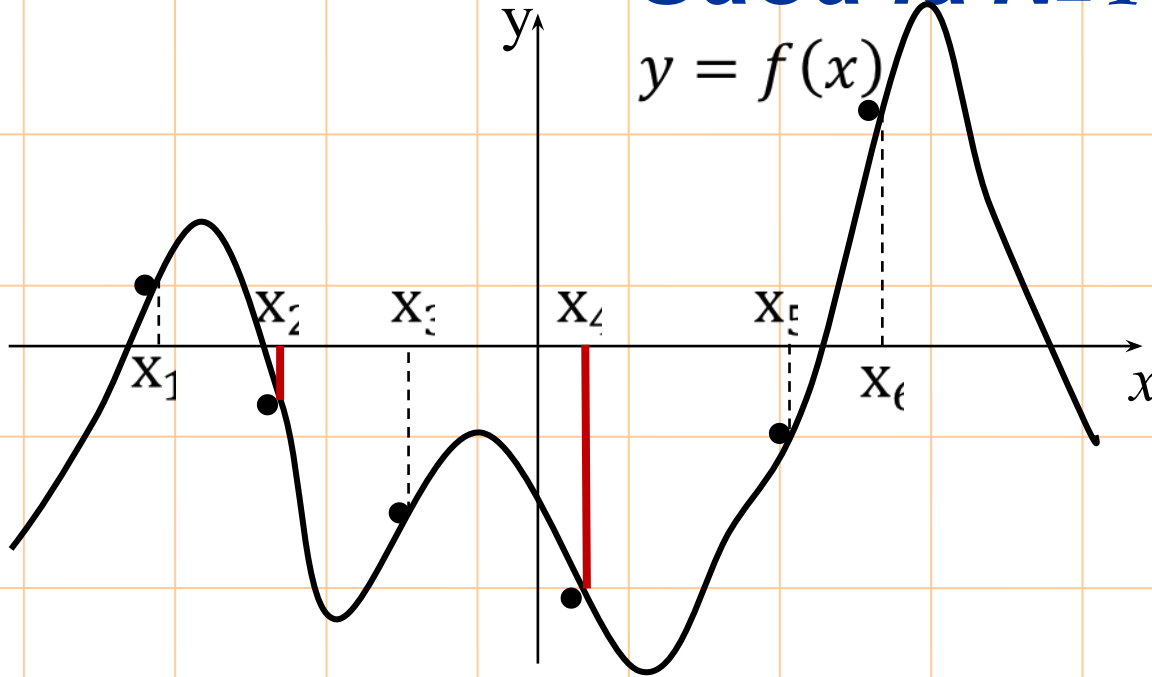
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -5, -3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку

Ответ:

***Применение
производной
к исследованию
функций***

Задача №14

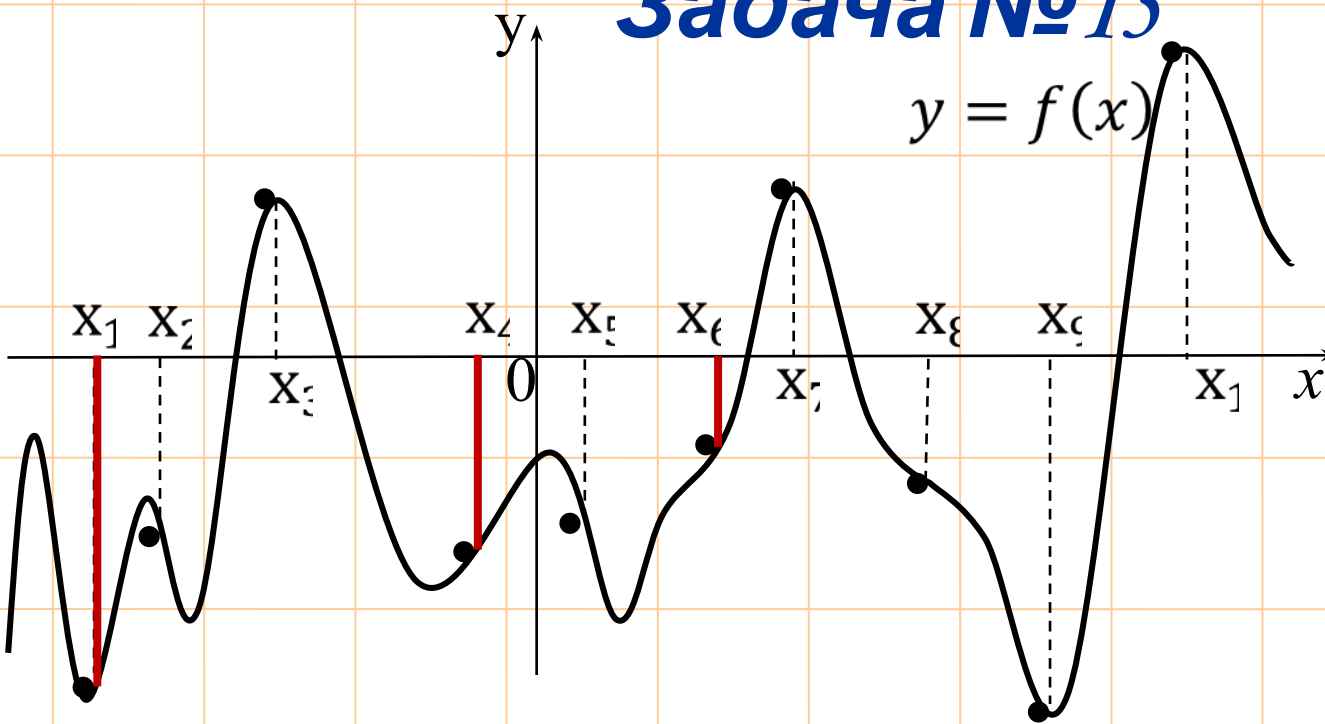
$$y = f(x)$$



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 и X_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Ответ: 2

Задача №15

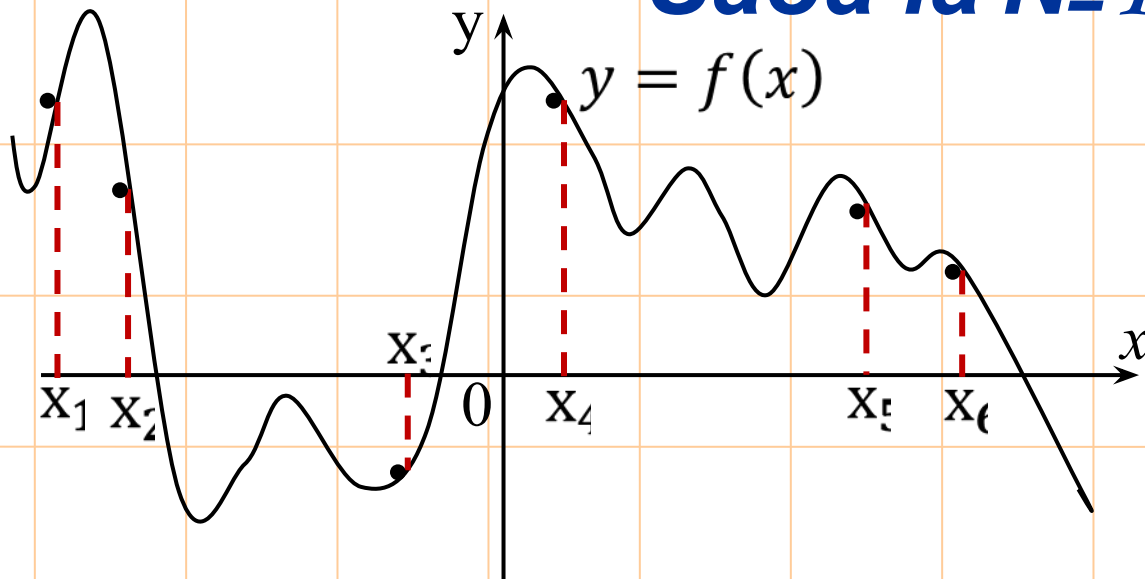


$$y = f(x)$$

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна.

Ответ: 3

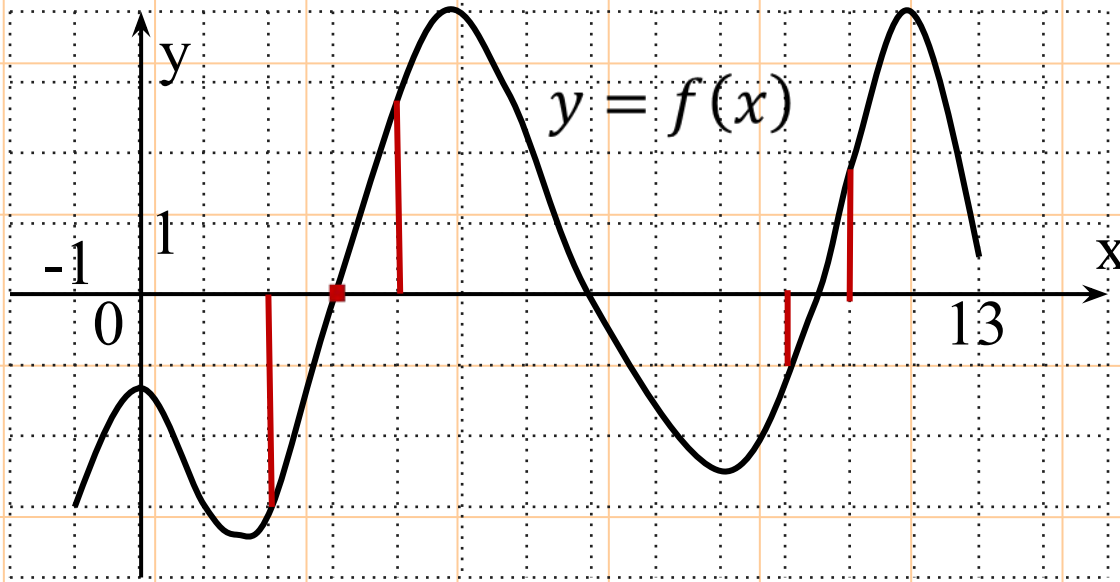
Задача №16



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 и X_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Ответ: 4.

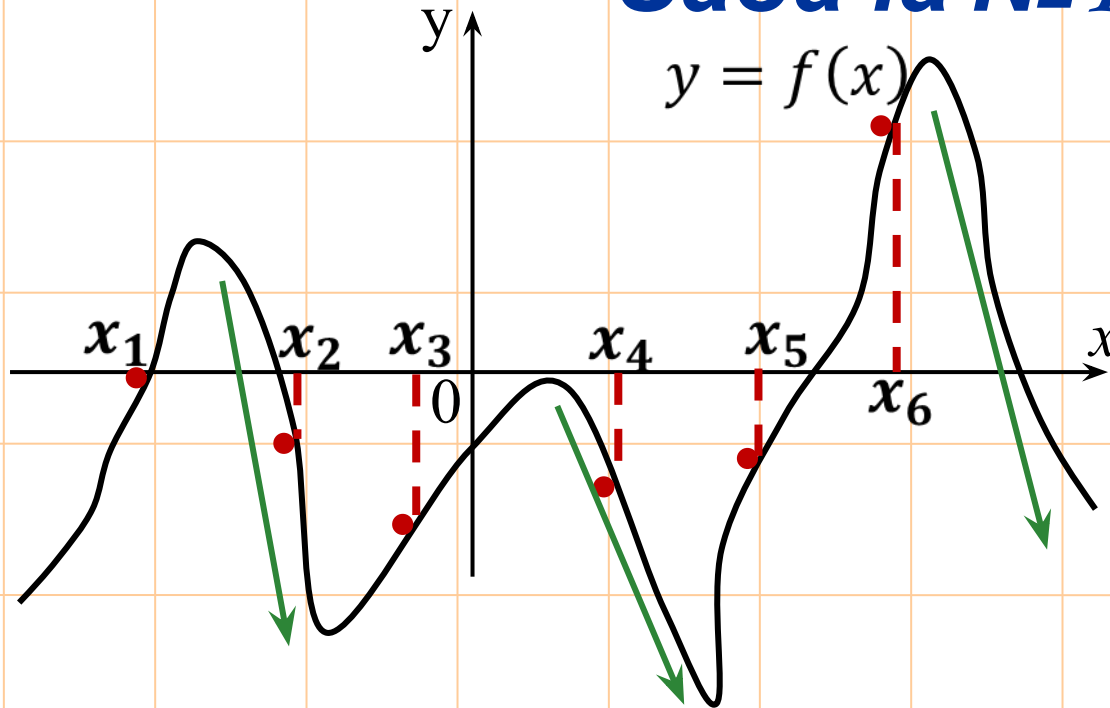
Задача №17



На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Ответ: 5

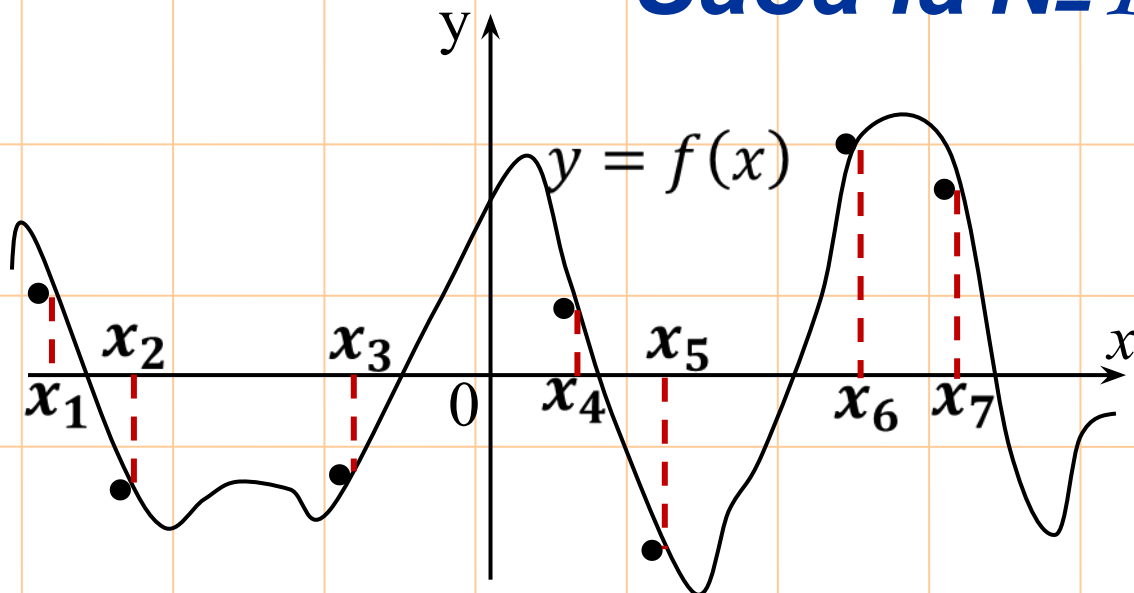
Задача №18



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

Ответ: 2.

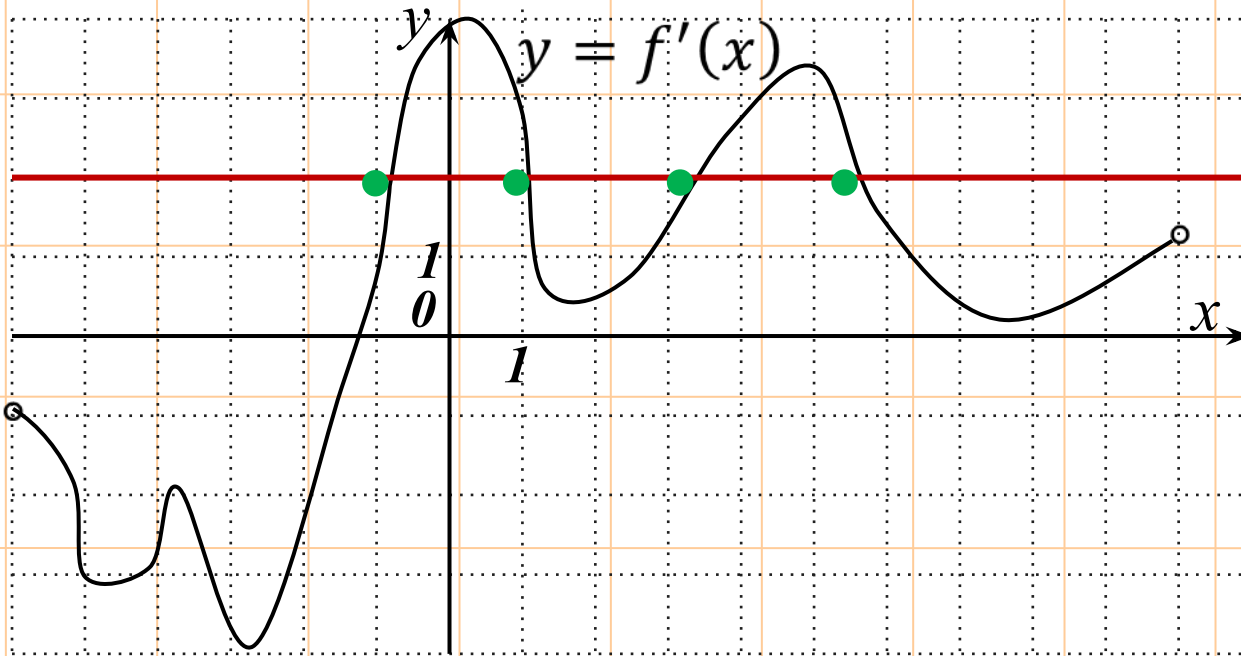
Задача №19



На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;13)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Ответ: 2.

Задача №20



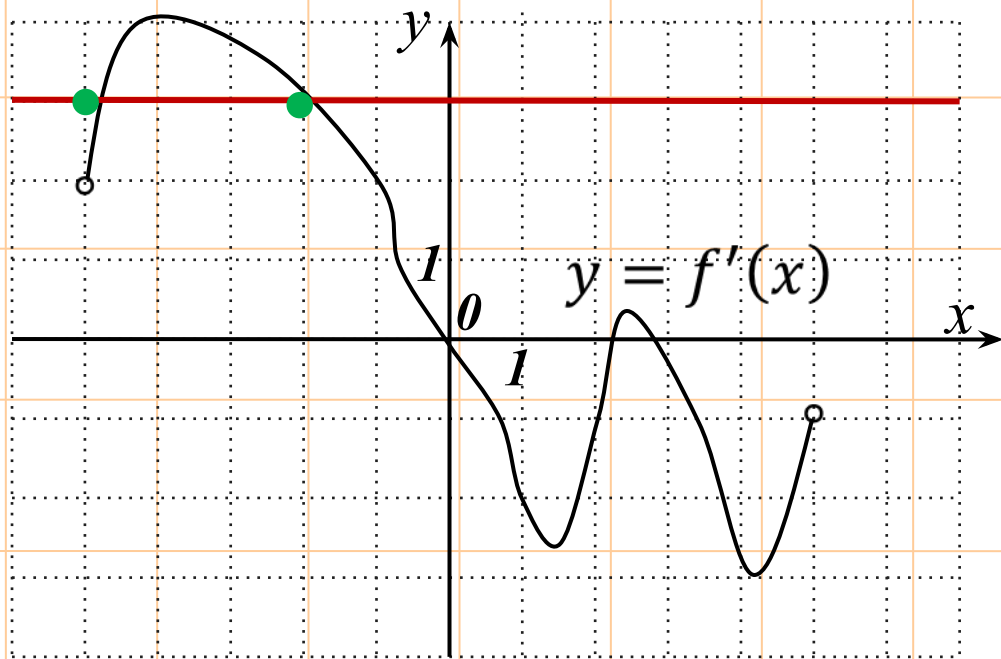
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к

графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.

Ответ

4

Задача №21

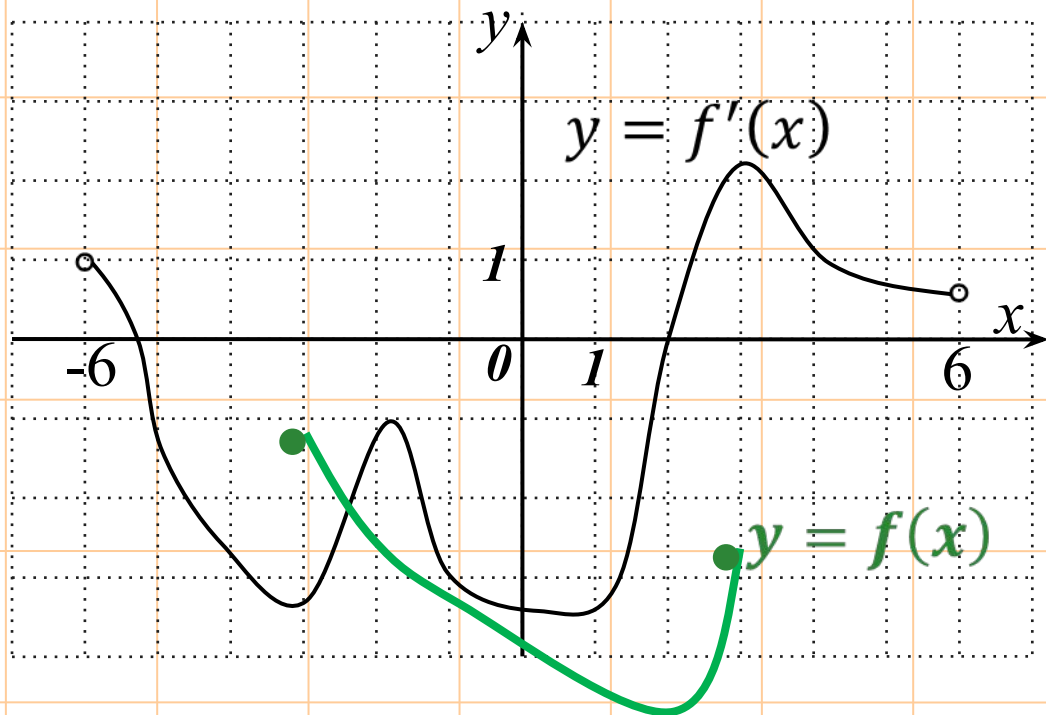


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней.

Ответ

: 2.

Задача №22

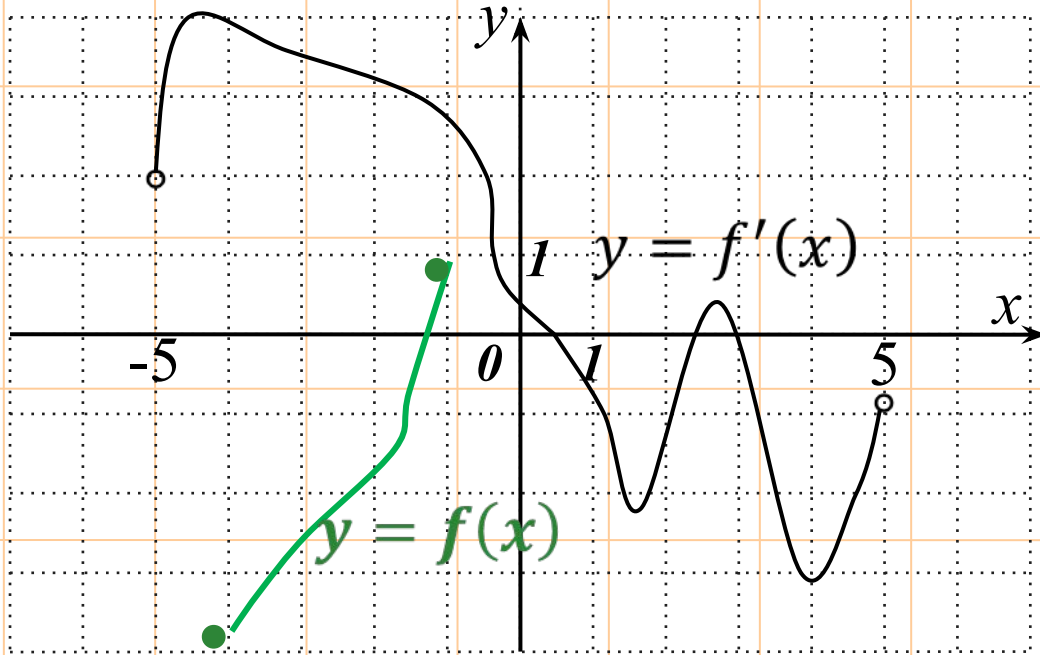


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ

: 2.

Задача №23



На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Ответ:

-1.

Задача №24

Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:

Задача №25

-0,5.

Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ

: 1.

Задача №26

Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ

: 2.

Задача №27

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 4$. Найдите ординату точки касания.

Решение. Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е. $y' = 3$

$$y' = 3x^2 + 8x + 3$$
$$3x^2 + 8x + 3 = 3$$
$$x(3x+8) = 0. \text{ Отсюда } x = 0 \text{ или } x = 8/3$$

Уравнению $x^3 + 4x^2 + 3x + 4 = 3x + 4$ удовлетворяет только $x = 0$. Значит, абсцисса точки касания равна 0, а тогда ее ордината равна 4.

Ответ

: 4.

Задача №28

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции – парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ имело единственно решение.

Получим $ax^2 + 2x + 3 - 3x - 1$

$$ax^2 - x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8a$$

Для этого дискриминант должен быть равен нулю, откуда

$$1 - 8a = 0$$

$$a = 1/8 = 0,125$$

Ответ:
0,125.

Задача №29

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Решение.

График заданной функции – парабола. Касательная к параболе имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $3x^2 - 3x + c = 3x + 4$ имело единственно решение. Получим

$$3x^2 - 6x + c - 4 = 0$$

$$D = 36 - 12(c - 4) = 36 - 12c + 48 = 84 - 12c$$

Для этого дискриминант должен быть равен нулю, откуда

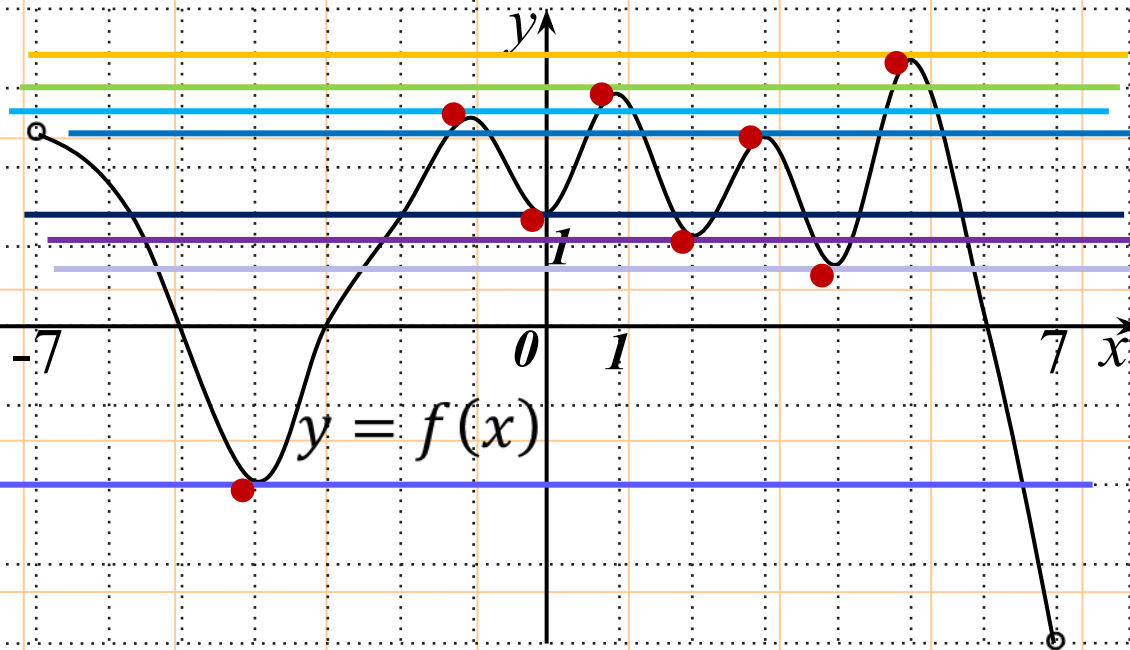
$$84 - 12c = 0$$

$$c = 84/12 = 7$$

Ответ

: 7.

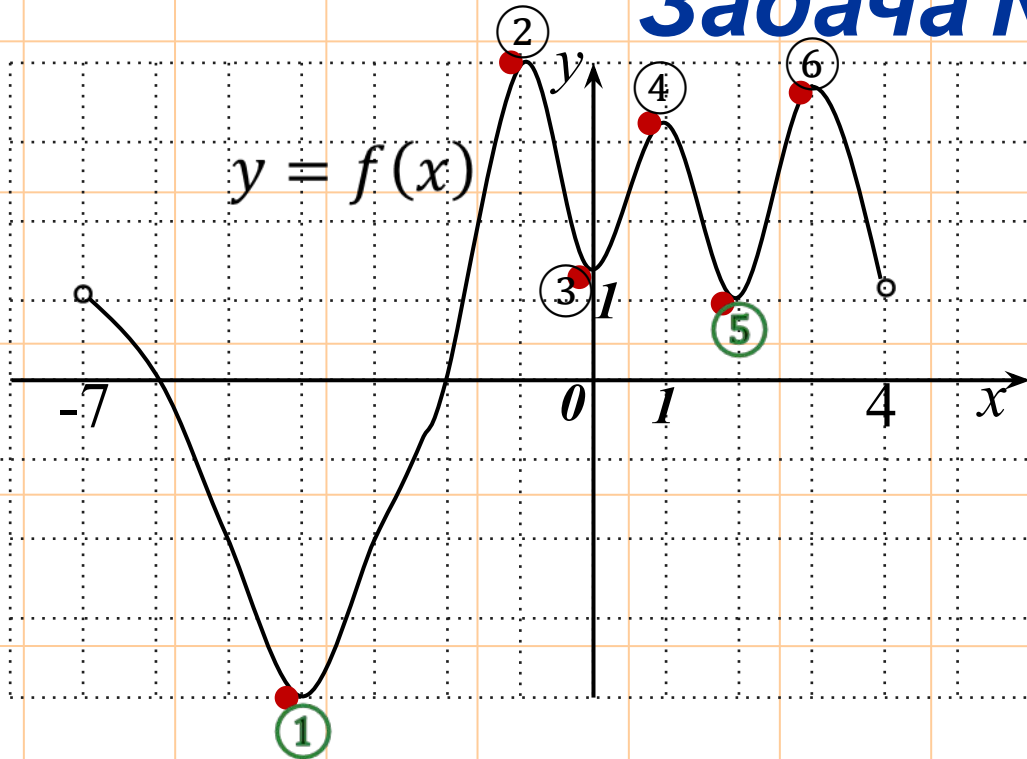
Задача №30



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 13$.

Ответ
: 8.

Задача №31

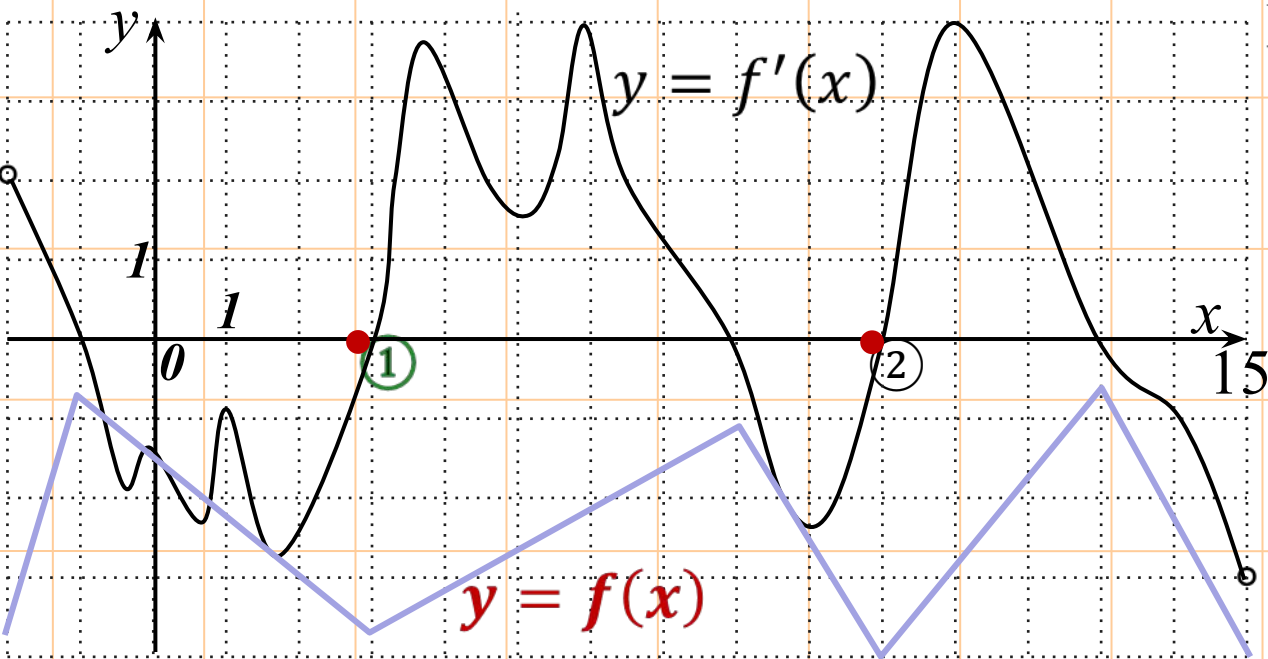


На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -17$.

Ответ

: 6.

Задача №32

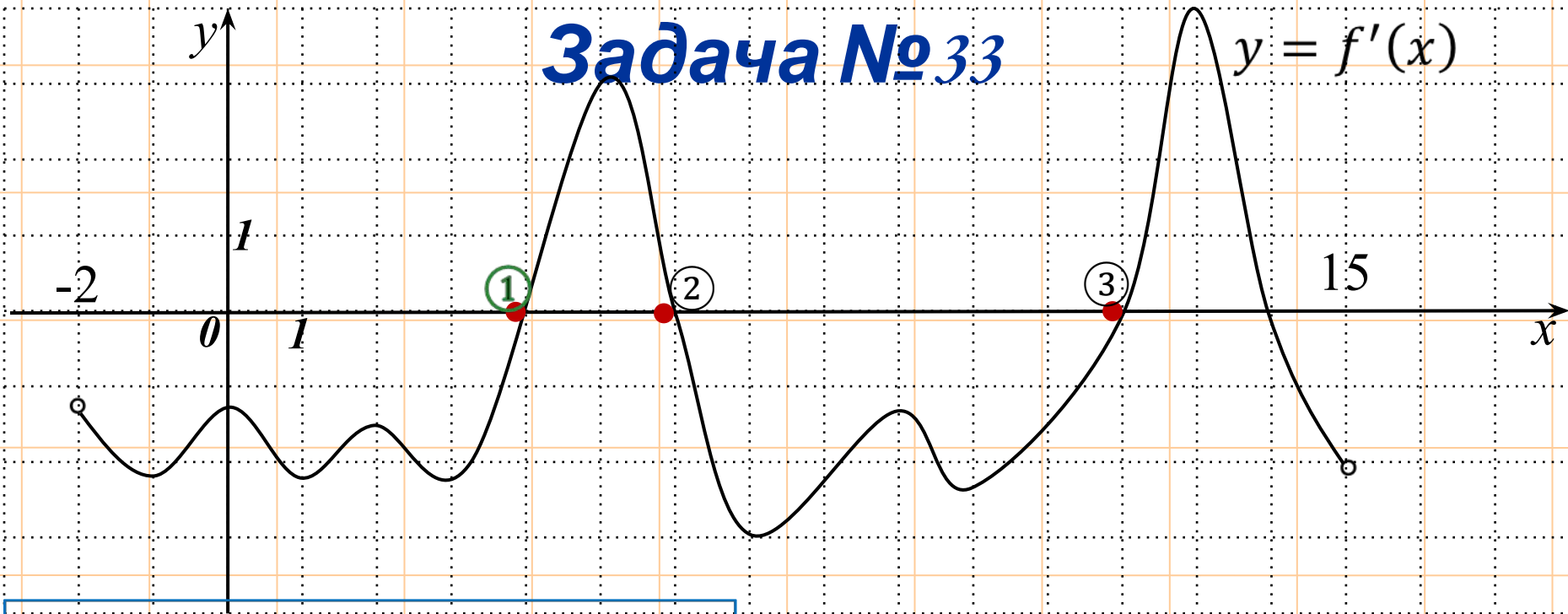


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 12]$.

Ответ

: 2.

Задача №33



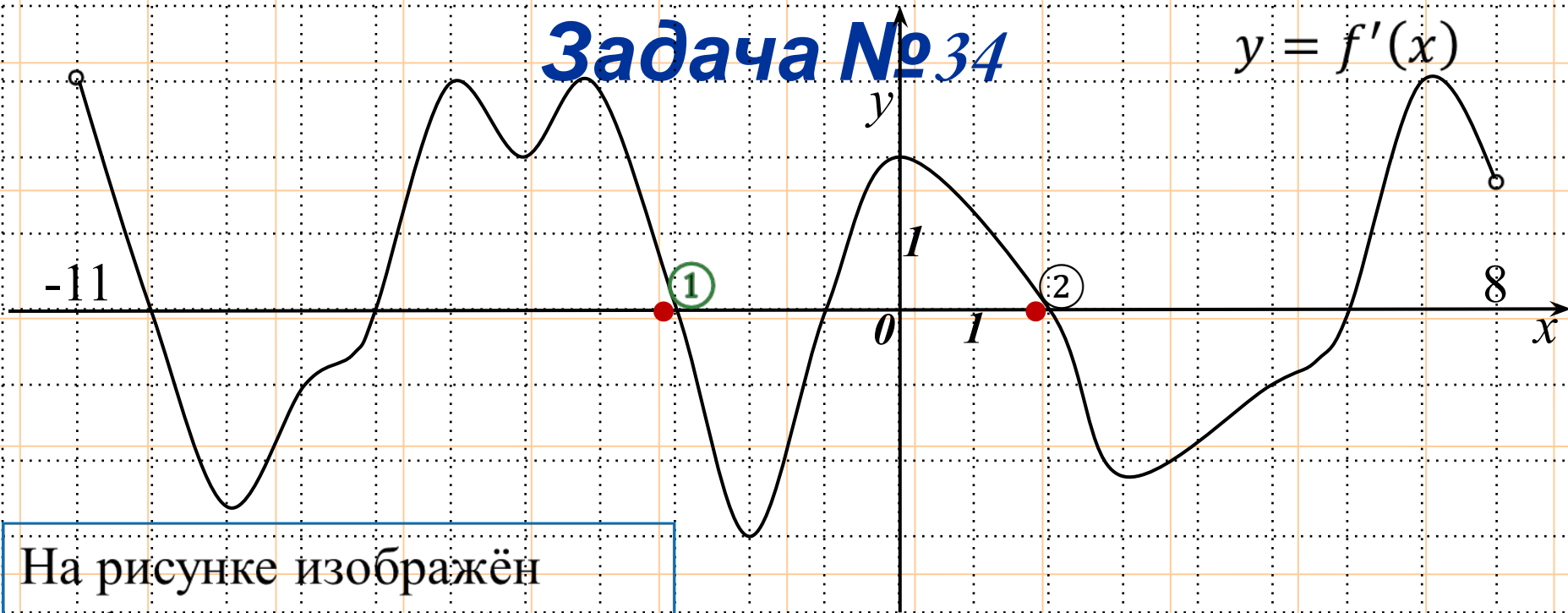
На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 15)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[3; 13]$.

Ответ

• 2

Задача №34

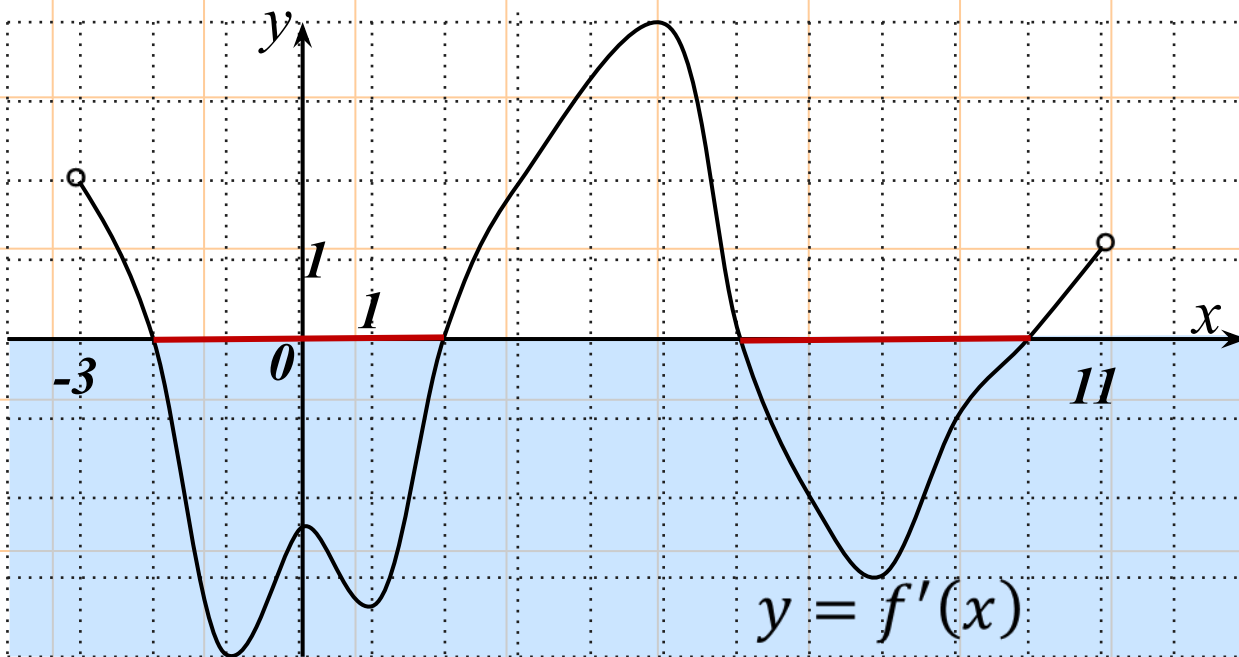
$$y = f'(x)$$



На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 7]$.

Ответ

Задача №35

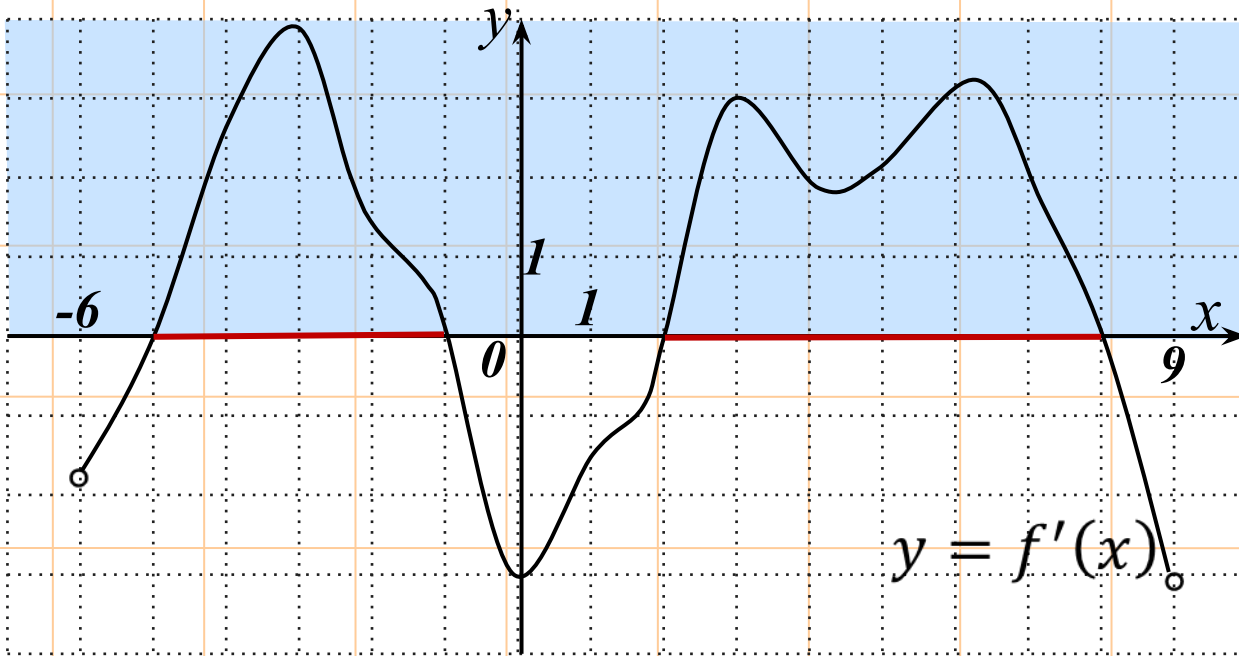


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ

: 4.

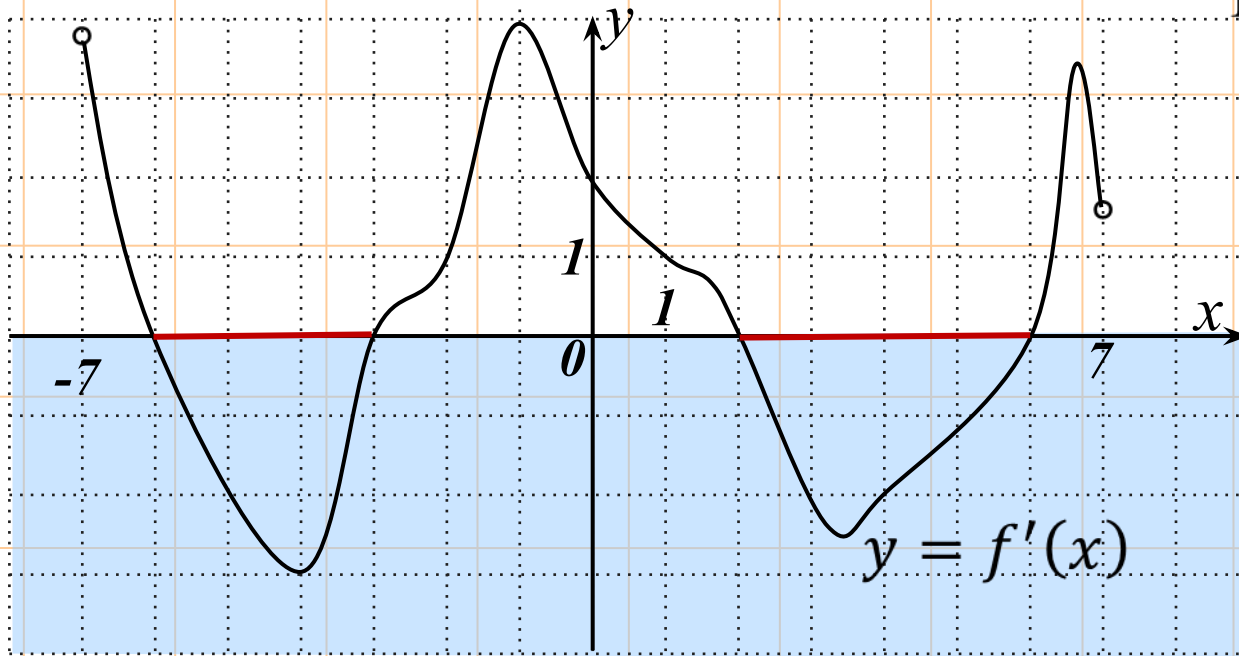
Задача №36



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ

Задача №37

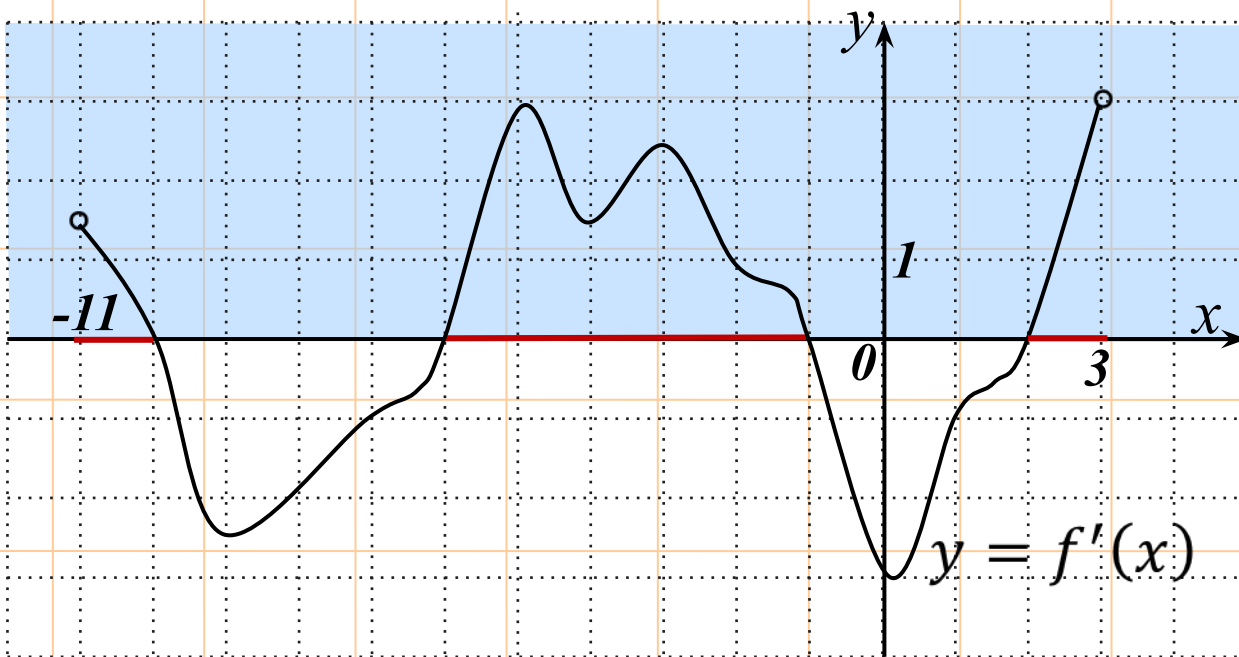


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ

: 4.

Задача №38

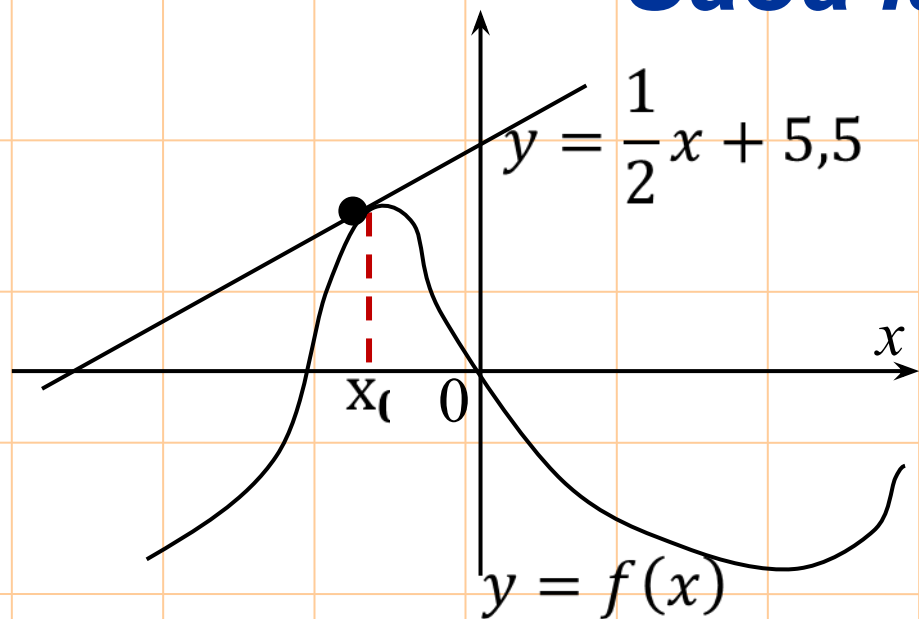


На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 3)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ

: 5.

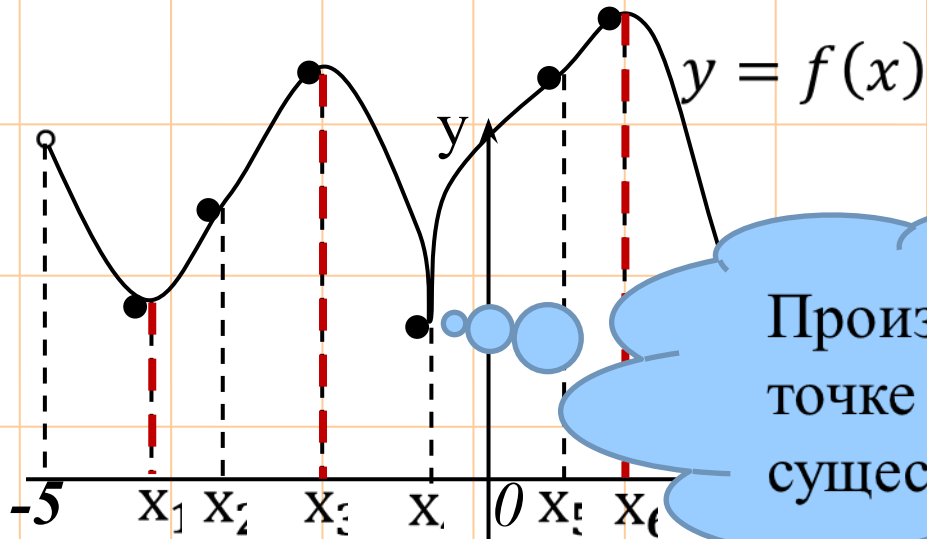
Задача №39



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 4f(x) + 7$ в точке x_0 .

Ответ
: 2.

Задача №40



Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5; 6)$. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Производная в точке x_4 не существует

Среди точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ те, в которых

производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

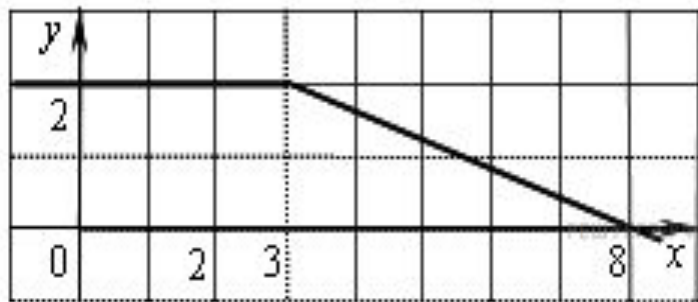
Ответ

: 4.

Первообразная Интеграл

Задача

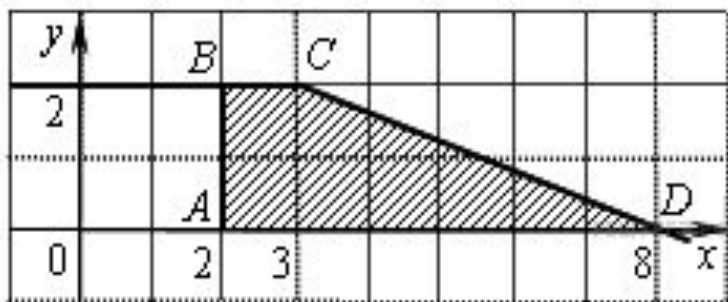
№ 42



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$.

Решение.

Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому



$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$

Ответ:

7.