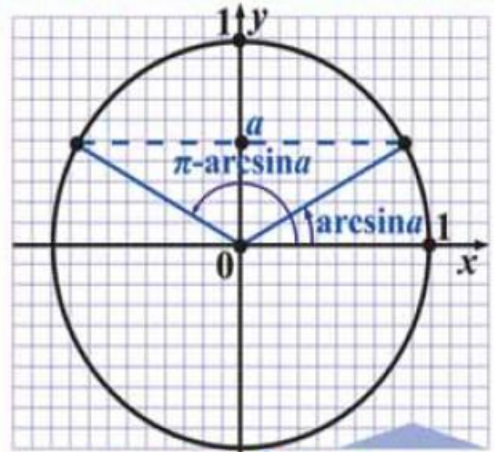
ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$\sin x = 0$
$x = \pi n$

$\sin x = -1$
$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\sin x = 1$
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$



$\sin x = a, \ |a| \le 1$

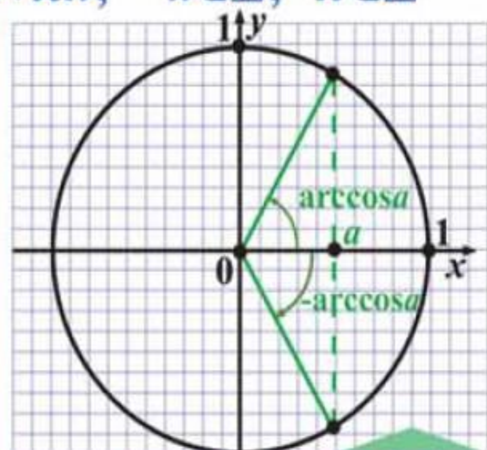
$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$

$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0$
$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

$\cos x = -1$
$x = \pi + 2\pi n$

$\cos x = 1$
$x = 2\pi n$



$\cos x = a, \ |a| \le 1$

$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k \\ x = -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right.$

$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z}$

Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

Введем новую переменную $t = 2x$.

$$\sin t = \frac{1}{2} \qquad t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$$

Решение простейших уравнений

1) $tg2x = -1$

$2x = arctg(-1) + \pi k, k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$.

2) $\cos(x+\pi/3) = ½$

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k, k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

3) $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k, k \in Z$

$x = 3\pi k, k \in Z$.

Ответ: $3\pi k, k \in Z$.

Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8+6n;\\ x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Значениям $n\geq0$ соответствуют положительные корни.

Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.

Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.

Значениям $n\leq-3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: -4.

Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi x}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\\ \dfrac{\pi x}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}+6k;\\ x=\dfrac{5}{2}+6k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Значениям $k\le -1$ соответствуют отрицательные корни.
Если $k=0$, то $x=0,5$ и $x=2,5$.
Если $k=1$, то $x=6,5$ и $x=8,5$.
Значениям $k\ge 2$ соответствуют большие положительные корни.

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

Решен
Решим
Значен
Если k
Если k
Значен
Наиме
Ответ: 0,5.

Решение примеров

1. Решите уравнение:

а) $\cos 2x = 1;$ б) $\cos 3x = -1;$

в) $\sin \dfrac{x}{2} = -1;$ г) $\sin \dfrac{2x}{3} = 1;$

д) $\cos \dfrac{x}{4} = 0;$ е) $\sin 5x = 0.$

а) πn; б) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $-\pi + 4\pi n$; г) $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$; д) $2\pi + 4\pi n$; е) $\frac{\pi n}{5}$

2. Решите уравнение:

а) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1;$ б) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1;$

в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1;$ г) $\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) = -1;$

д) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right) = 0;$ е) $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = 0.$

а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; д) $-\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}$; е) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$