

ОСНОВЫ
тригонометрии.
Упражнение по
теме



Теоретический материал



Действия над комплексными числами

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Показательные уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$

$$f(x) = g(x)$$

$$7^x = 49$$

$$7^x = 7^2$$

$$x = 2$$

$$2^{5+x} = 2^{4x-1}$$

$$5 + x = 4x - 1$$

$$x = 2$$

$$a^{f(x)} = b, a > 0$$

Если $b > 0, a \neq 1$, то $f(x) = \log_a b$

Если $b \leq 0$, то решений нет

$$4^x = 5$$

$$x = \log_4 5$$

$$49^x = -8$$

$$-8 < 0$$

решений нет

Логарифмические уравнения

$$\log_a f(x) = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\log_7 x = 2$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 7^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 49$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x-2) = -3$$

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 29$$

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$$

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕРАВЕНСТВ

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Показательные неравенства — неравенства, в которых переменная входит только в показатели степени при постоянных основаниях.

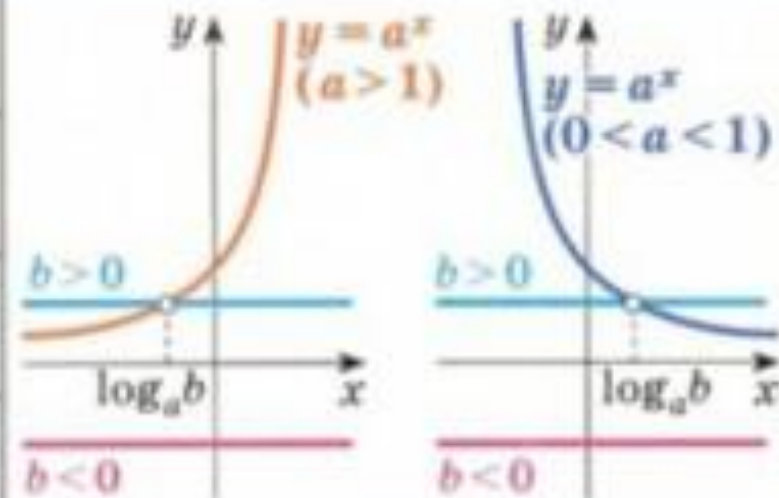
$$a^x > b, a^x < b, a > 0, a \neq 1$$

| | |
|---------------------|--|
| $a > 1,$ $b > 0$ | $a^x > b \Leftrightarrow x \in (\log_a b; +\infty)$ $a^x < b \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_a b)$ |
|---------------------|--|

| | |
|---------------------|---|
| $a > 1,$ $b < 0$ | $a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ $a^x < b$ — решений нет |
|---------------------|---|

| | |
|-------------------------|--|
| $0 < a < 1,$ $b > 0$ | $a^x > b \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_a b)$ $a^x < b \Leftrightarrow x \in (\log_a b; +\infty)$ |
|-------------------------|--|

| | |
|-------------------------|---|
| $0 < a < 1,$ $b < 0$ | $a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ $a^x < b$ — решений нет |
|-------------------------|---|



$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a^{f(x)} < a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$$

| | |
|---------|---|
| $a > 0$ | $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ |
|---------|---|

| | |
|---------|---|
| $a > 0$ | $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ |
|---------|---|

| | |
|-------------|---|
| $0 < a < 1$ | $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ |
|-------------|---|

| | |
|-------------|---|
| $0 < a < 1$ | $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ |
|-------------|---|

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Логарифмические неравенства — неравенства, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

$$\log_a x > b, \log_a x < b, a > 0, a \neq 1$$

| | | |
|-------------|--|--|
| $a > 1$ | $\log_a x > b \Leftrightarrow x \in (a^b; +\infty)$ $\log_a x < b \Leftrightarrow x \in (0; a^b)$ | |
| $0 < a < 1$ | $\log_a x > b \Leftrightarrow x \in (0; a^b)$ $\log_a x < b \Leftrightarrow x \in (a^b; +\infty)$ | |

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \log_a f(x) < \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$$

| | | |
|-------------|--|--|
| $a > 1$ | $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ | $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ |
| $0 < a < 1$ | $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ | $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ |

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

| Уравнение | Решения |
|----------------------------|---|
| $\sin x = a, a \leq 1$ | $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x = a, a \leq 1$ | $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{tg} x = a$ | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |

Значения $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ острых углов от 0° до 90° ,
которые необходимо помнить:

| Аргумент | Функция | | | |
|---|----------------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
| 0° (0) | 0 | 1 | 0 | не определен |
| 30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | 1 | 0 | не определен | 0 |

1 вариант
Диф. зачет



1. Выполните действия а) $(2 - 3i)(5+i)$; б) $\frac{4-3i}{3+4i}$

2. Найдите значение $\cos \alpha$, если известно, что

$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in I$ четверти

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

4. Решите уравнения а) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$;

б) $\log^2_2 x - 10 \log_2 x + 16 = 0$

5. Решите уравнения $2 \cos x - 1 = 0$

6. Постройте график функции $y = 3 \cos x - 4$

2 вариант
Диф. зачет



1. Выполните действия а) $(3 - 2i)(1 + 5i)$; б) $\frac{3 - 4i}{4 + 3i}$

2. Найдите значение $\cos \alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in I$ четверти

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

4. Решите уравнения а) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

б) $\log^2_2 x - 6 \log_2 x + 8 = 0$

5. Решите уравнения $2 \sin x + 1 = 0$

6. Постройте график функции $y = 4 \sin x - 3$