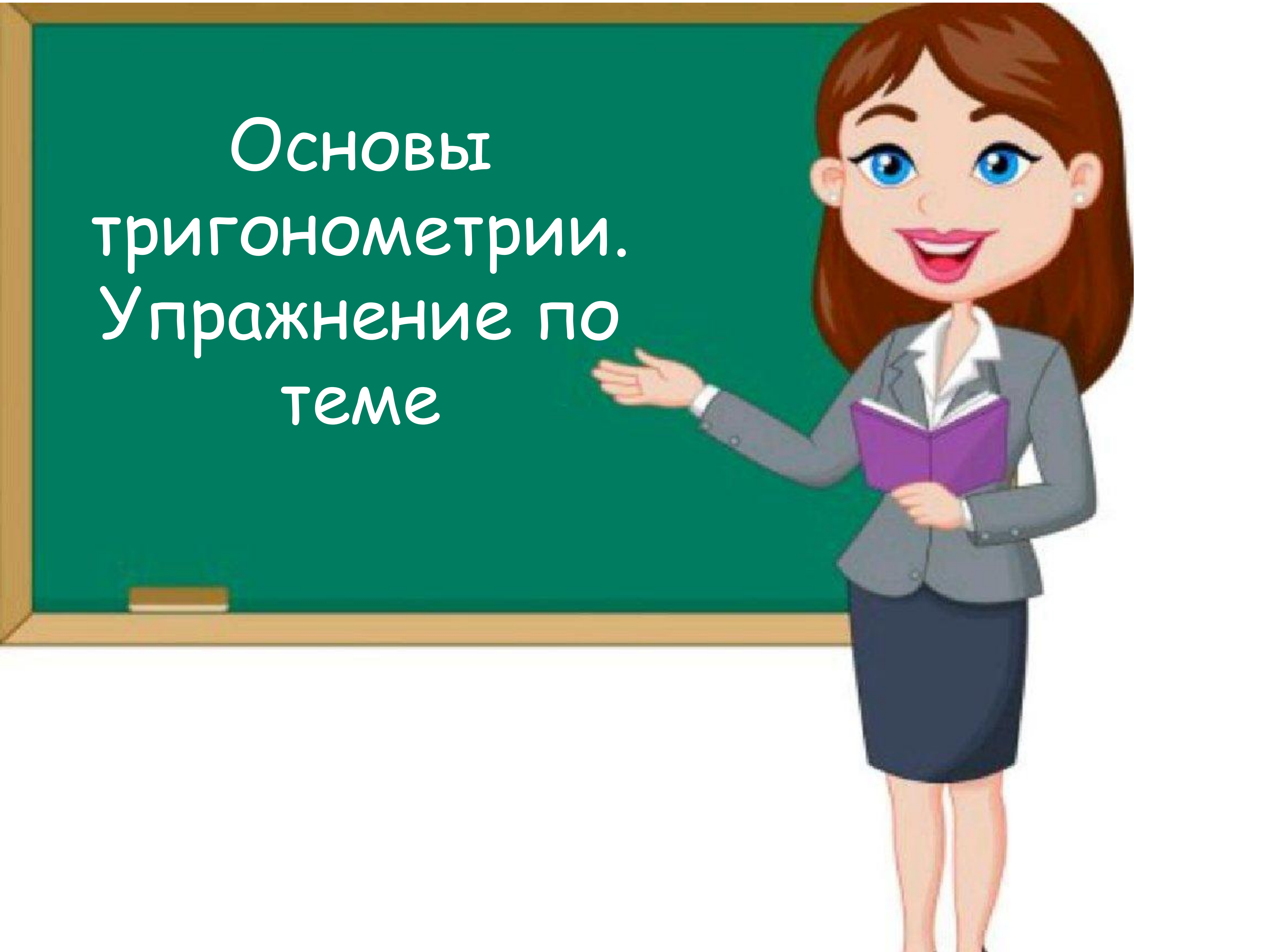
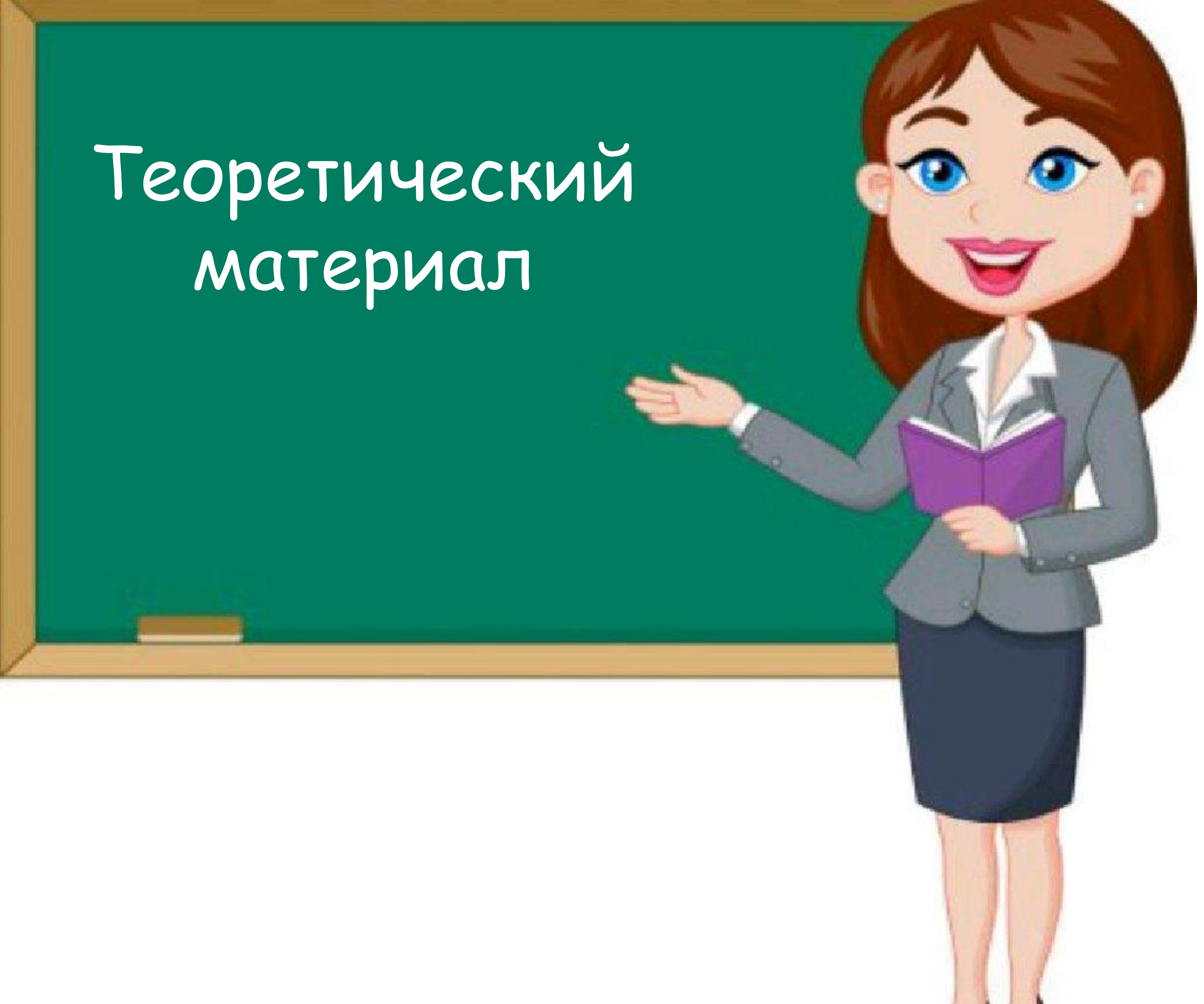

Основы тригонометрии. Упражнение по теме


Теоретический
материал

Действия над комплексными числами

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Показательные уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$f(x) = g(x)$$

$7^x = 49$

$7^x = 7^2$

$x = 2$

$2^{5+x} = 2^{4x-1}$

$5 + x = 4x - 1$

$x = 2$

$$a^{f(x)} = b,\ a > 0$$

Если $b > 0,\ a \neq 1$, то $f(x) = \log_a b$

$4^x = 5$

$x = \log_4 5$

Если $b \leq 0$, то решений нет

$49^x = -8$

$-8 < 0$

решений нет

Логарифмические уравнения

$$\log_a f(x) = b \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

$\log_7 x = 2$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 7^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 49$$

$\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) = -3$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 29$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

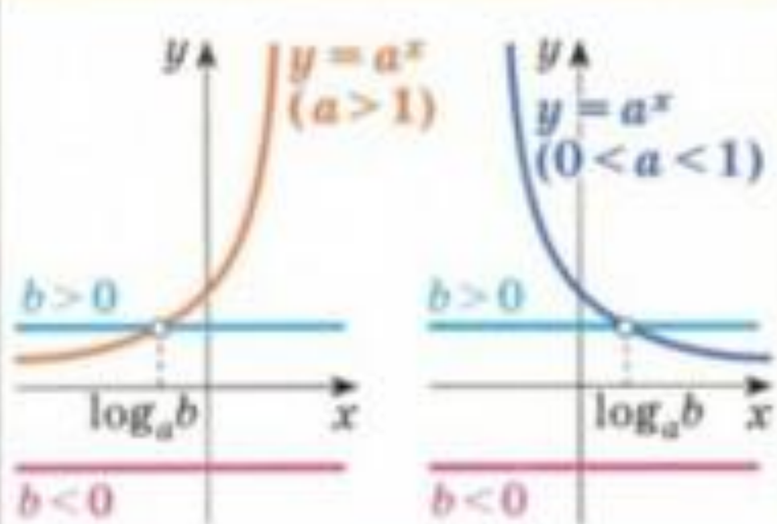
РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕРАВЕНСТВ

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Показательные неравенства — неравенства, в которых переменная входит только в показатели степени при постоянных основаниях.

$$a^x > b,\ a^x < b,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$a > 1$, $b > 0$	$a^x > b \Leftrightarrow x \in (\log_a b; +\infty)$ $a^x < b \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_a b)$
$a > 1$, $b \leq 0$	$a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ $a^x < b$ — решений нет
$0 < a < 1$, $b > 0$	$a^x > b \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_a b)$ $a^x < b \Leftrightarrow x \in (\log_a b; +\infty)$
$0 < a < 1$, $b \leq 0$	$a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ $a^x < b$ — решений нет

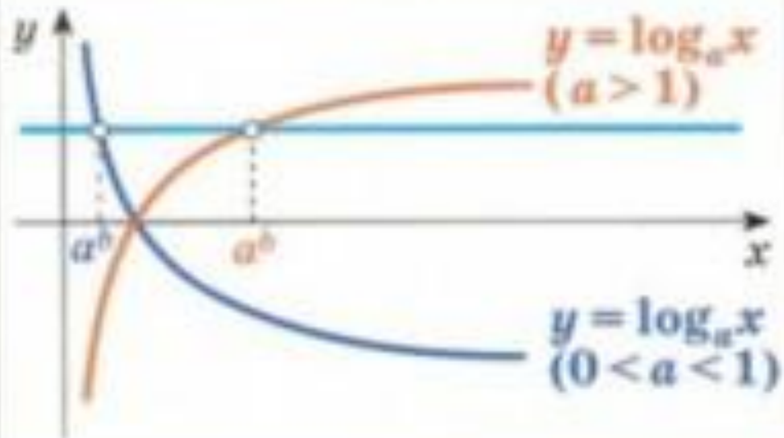


$$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$$

$a > 0$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$
$0 < a < 1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Логарифмические неравенства — неравенства, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

$\log_a x > b$, $\log_a x > b$, $a > 0$, $a \neq 1$		
$a > 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x \in (a^b; +\infty)$ $\log_a x < b \Leftrightarrow x \in (0; a^b)$	
$0 < a < 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x \in (0; a^b)$ $\log_a x < b \Leftrightarrow x \in (a^b; +\infty)$	

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$		
$a > 1$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$
$0 < a < 1$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$	$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

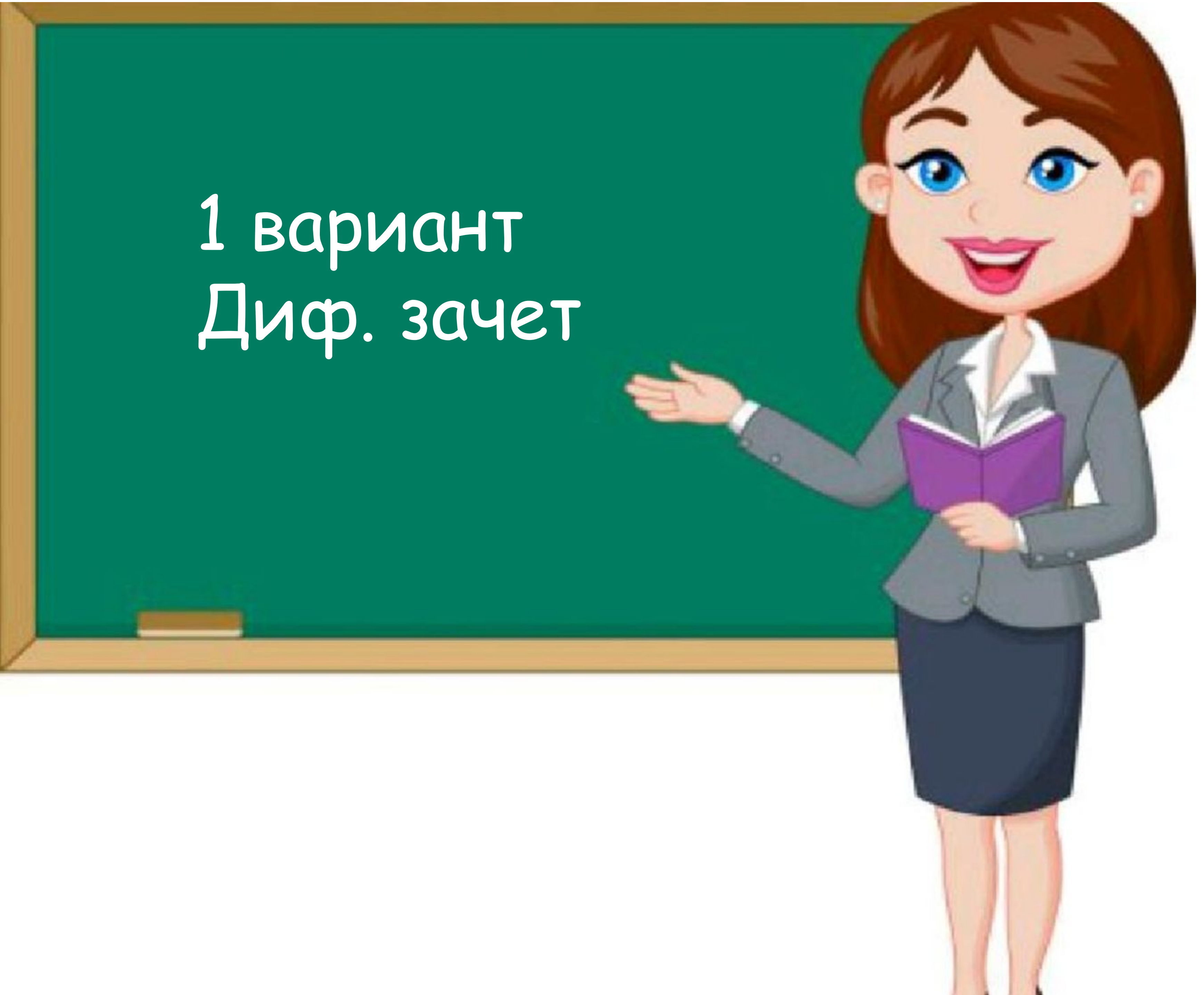
Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Значения sin, cos, tg, ctg острых углов от 0° до 90°,

которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0° (0)	0	1	0	не определен
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0


1 вариант
Диф. зачет

1. Выполните действия а) $(2 - 3i)(5+i)$; б) $\frac{4-3i}{3+4i}$

2. Найдите значение $cos\alpha$, если известно, что

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in I$ четверти

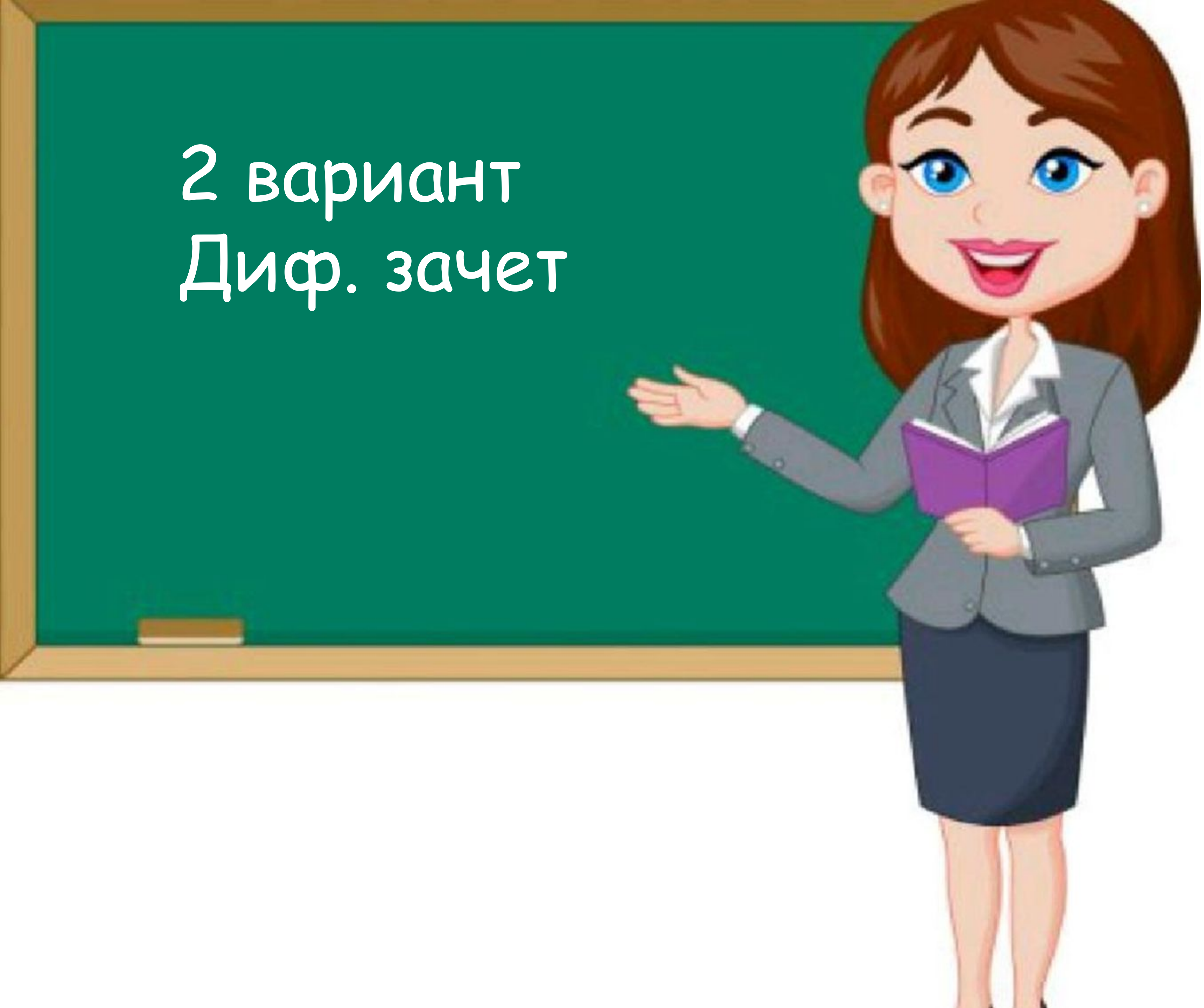
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

4. Решите уравнения а) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$;

б) $\log^2{}_2 x - 10\log_2 x + 16 = 0$

5. Решите уравнения $2\cos x - 1 = 0$

6. Постройте график функции $y = 3 \cos x - 4$


2 вариант
Диф. зачет

1. Выполните действия а) $(3-2i)(1+5i)$; б) $\frac{3-4i}{4+3i}$

2. Найдите значение $cos\alpha$, если известно , что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha \in I$ четверти

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

4. Решите уравнения а) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

б) $\log^2{}_2 x - 6\log_2 x + 8 = 0$

5. Решите уравнения $2\sin x + 1 = 0$

6. Постройте график функции $y = 4\sin x - 3$