

Логарифмические уравнения.

Основные методы их решения.

его основании, называется логарифмическим уравнением.

1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма: $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c,$$

$$f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1:

$$\log_4 x = 2,$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0,$$

$$x = 4^2,$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2:

$$\log_3(2x + 1) = 2,$$

$$2x + 1 = 3^2,$$

$$2x + 1 = 9,$$

$$x = 4.$$

Проверка:

$$\log_3(2 \cdot 4 + 1) = 2,$$

$$\log_3 9 = 2,$$

$$2 = 2$$

Ответ: 4.

Пример 3:

$$4^{x-3} = 5,$$

$$x - 3 = \log_4 5,$$

$$x = 3 + \log_4 5.$$

Ответ: $3 + \log_4 5$.

$$\log_{g(x)} f(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x)^c,$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1.$$

Пример 4: $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2,$

ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x^2 + 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2,$$

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^2,$$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

Пример 5:

$$\bullet (x^2 + 7x - 5) = \bullet (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Проверка:

$$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_2(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3 \text{ - верно}$$

$$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_2(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17) \\ \text{- не верно}$$

Ответ: 1.

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример 6:

$$\text{😊} (x^2 + 7x - 5) = \text{😊} (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 = 1 \text{ верно.}$$

$$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17) \text{ не верно}$$

Ответ: 1.

Пример 7:

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1.$$

$$1 = \log_4 4^1$$

← получим

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + \log_4 4,$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab$$

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4((1 + 5x) \cdot 4),$$

$$4 + 7x = 4(1 + 5x),$$

$$x = 0.$$

Проверка:

$$\log_4(4 + 7 \cdot 0) = \log_4(1 + 5 \cdot 0) + 1,$$

$$\log_4 4 = \log_4 1 + 1,$$

$$1 = 1 \quad \text{верно}$$

Ответ: 0.

3. Метод подстановки.

Пример 8: $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$

ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда $t^2 - t = 2$, $t^2 - t - 2 = 0$.

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Значит, $\log_3 x = -1$

или

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^{-1}$$

$$x = 3^2$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

$$x = 9.$$

Ответ: $\frac{1}{3}, 9$.

$$a \log_{g(x)}^2 f(x) + b \log_{g(x)} f(x) + c = 0$$

$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1, a, b, c$ – числа, $a \neq 0$.

Пример 9: $\log_7 x - \log_x 7 = 2,5$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7: $\log_7 x - \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2}$.

Подстановка: $t = \log_7 x$. Уравнение примет вид: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$,
 $2t^2 - 5t + 2 = 0$,
 $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, $\log_7 x = 2$ или $\log_7 x = \frac{1}{2}$
 $x = 7^2$,
 $x = 49$.
 $x = 7^{\frac{1}{2}}$,
 $x = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}, 49$.

4. Метод логарифмирования.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример 10:

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27},$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_3 (x^{\log_3 x - 4}) = \log_3 \frac{1}{27},$$
$$(\log_3 x - 4) \log_3 x = -3.$$

$$\log_c a^p = p \log_c a$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$(t - 4)t = -3,$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Значит,

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3^1,$$

$$x = 3.$$

или

$$\log_3 x = 3,$$

$$x = 3^3,$$

$$x = 27.$$

Ответ: 3; 27.