

# Логарифмические уравнения.

*Основные методы их решения.*

его основании, называется логарифмическим уравнением.

## 1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма:  $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c,$$

$$f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1:

$$\begin{aligned} \log_4 x &= 2, \\ \text{ОДЗ: } x &> 0, \\ x &= 4^2, \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Ответ: 16.

Пример 2:

$$\log_3(2x + 1) = 2,$$

$$2x + 1 = 3^2,$$

$$2x + 1 = 9,$$

$$x = 4.$$

Проверка:

$$\log_3(2 \cdot 4 + 1) = 2,$$

$$\log_3 9 = 2,$$

$$2 = 2$$

Ответ: 4.

Пример 3:

$$4^{x-3} = 5,$$

$$x - 3 = \log_4 5,$$

$$x = 3 + \log_4 5.$$

Ответ:  $3 + \log_4 5$ .

$$\log_{g(x)} f(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x)^c,$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1.$$

**Пример 4:**  $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2,$

ОДЗ: 
$$\begin{cases} 2x^2 + 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2,$$

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^2,$$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: 2.

## 2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

**Пример 5:**

$$\text{●} (x^2 + 7x - 5) = \text{●} (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

**Проверка:**

$$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_2(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3 \text{ - верно}$$

$$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_2(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17) \\ \text{- не верно}$$

Ответ: 1.

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

**Пример 6:**

$$\text{😊} (x^2 + 7x - 5) = \text{😊} (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

**Проверка:**

$$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 = 1 \text{ верно.}$$

$$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17) \text{ не верно}$$

Ответ: 1.

**Пример 7:**

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1.$$

$$1 = \log_4 4^1$$

← получим

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + \log_4 4,$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab$$

$$\log_4(4 + 7x) = \log_4((1 + 5x) \cdot 4),$$

$$4 + 7x = 4(1 + 5x),$$

$$x = 0.$$

**Проверка:**

$$\log_4(4 + 7 \cdot 0) = \log_4(1 + 5 \cdot 0) + 1,$$

$$\log_4 4 = \log_4 1 + 1,$$

$$1 = 1 \quad \text{верно}$$

Ответ: 0.

### 3. Метод подстановки.

**Пример 8:**  $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$

ОДЗ:  $x > 0$ .

Пусть  $\log_3 x = t$ , тогда  $t^2 - t = 2$ ,  $t^2 - t - 2 = 0$ .

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Значит,  $\log_3 x = -1$

или

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^{-1}$$

$$x = 3^2$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

$$x = 9.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}, 9$ .





#### 4. Метод логарифмирования.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

**Пример 10:**

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27},$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_3 (x^{\log_3 x - 4}) = \log_3 \frac{1}{27},$$
$$(\log_3 x - 4) \log_3 x = -3.$$

$$\log_c a^p = p \log_c a$$

Пусть  $\log_3 x = t$ , тогда

$$(t - 4)t = -3,$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Значит,

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3^1,$$

$$x = 3.$$

или

$$\log_3 x = 3,$$

$$x = 3^3,$$

$$x = 27.$$

Ответ: 3; 27.