Задача линейного программирования. Канонический вид ЗЛП

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача вида

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \geq (\leq) b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{array} \qquad (1.1)$$

$$x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, k_1}),$$

$$x_i \geq 0, \ (i = \overline{1, k_2}), \qquad (1.2)$$

$$1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n.$$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to \max_{(\min)} \qquad (1.3)$$

Система неравенств (1.1) называется системой ограничений задачи.

(1.2) – условие, накладываемое на переменные. Функция (1.3) – функция цели (целевая функция).

Вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, удовлетворяющий неравенствам (1.1) и (1.2), называется *планом* задачи линейного программирования, или допустимым вектором, или допустимым решением.

Множество всех допустимых векторов x будем обозначать буквой G и называть допустимым множеством или множеством планов.

Вектор $x^* \in G$ называется оптимальным решением или оптимальным планом, если для всех $x \in G$: $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$.

Если оптимальное решение может быть найдено, то задача называется разрешимой, если же оптимального решения не существует, то задача называется неразрешимой.

Причины, по которым не может быть найдено оптимальное решение, следующие.

1. Функция $f(x)$ на допустимом множестве G неограничена. Эта задача называется неразрешимой из-за неограниченности целевой функции.

2. Допустимое множество G пусто $(G = \varnothing)$, т. е. не существует допустимых решений.

Такая задача называется несовместной.

Приведение ЗЛП к канонической форме.

ЗЛП называется задачей в канонической форме, если она имеет вид

$$a_i^T x = b_i;\ b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$x \ge 0,$$

$$f(x) = c^T x \to \max.$$

Чтобы привести данную задачу к канонической форме, необходимо следующее.

1. Если

$$\tilde{f}(x) = c^T x \to \min,$$

то функция заменяется на следующую:

$$f(x) = -\tilde{f}(x) = -c^T x \to \max.$$

2. Для $i = \overline{1,m}$ неравенство

$$a_i^T x \le b_i,$$

заменяется уравнением

$$a_i^T x + x_{доп} = b_i,\ x_{доп} \ge 0 \text{ и } c_{доп} = 0.$$

3. Для $i = \overline{1,m}$ неравенства

$$a_i^T x \ge b_i,$$

заменяется уравнением

$$a_i^T x - x_{доп} = b_i \text{ при } x_{доп} \ge 0 \text{ и } c_{доп} = 0.$$

Переменная $x_{доп}$ называется *дополнительной переменной* и показывает, насколько левая часть неравенства отличается от правой.

4. Если $b_i \le 0$, то обе части соответствующего уравнения умножаются на (–1).

5. Для $j = \overline{k_1 + 1, k_2}$ вводится новая переменная $x_j^{'} = -x_j$, $x_j^{'} \ge 0$.

6. Для $j = \overline{k_2 + 1, n}$ переменная x_j заменяется разностью двух неотрицательных переменных $x_j = x_j^{1'} - x_j^{2'}$, $x_j^{1'} \ge 0, x_j^{2'} \ge 0$.

Пример 1.3. Привести ЗЛП к каноническому виду.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\le 5,\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1,\\
2x_1 \qquad + x_3 + x_4 &\ge 2,\\
x_{1,2} \ge 0,\ x_3 &\le 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = 5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 \to \min.$$

1. Изменение целевой функции.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\le 5,\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1,\\
2x_1 \qquad + x_3 + x_4 &\ge 2,\\
x_{1,2} \ge 0,\ x_3 &\le 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = -5x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \to \max.$$

2, 3. Замена неравенств в ограничениях уравнениями.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_{1\text{д}} &= 5,\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= -1,\\
2x_1 \qquad + x_3 + x_4 + x_{3\text{д}} &= 2,\\
x_{1,2} \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_{1\text{д}} \ge 0,\ x_{2\text{д}} &\ge 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = -5x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \to \max.$$

4. Устранение неотрицательных чисел в правой части.

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_{1\partial} &= 5, \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \quad &= 1, \\
2x_1 \quad + x_3 + x_4 + x_{3\partial} &= 2,
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_{1\partial} \ge 0,\ x_{2\partial} \ge 0.$$

$$\widetilde{f}(x) = -5x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 \to \max.$$

5. Приведение всех переменных к неотрицательным.

$$x_3 = -x_j^{'},\ x_4 = x_4^{1'} - x_4^{2'}.$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3^{'} + x_4^1 - x_4^2 + x_{1\partial} &= 5, \\
-x_1 + 2x_2 + x_3^{'} + x_4^1 - x_4^2 \quad &= 1, \\
2x_1 \quad - x_3^{'} + x_4^1 - x_4^2 + x_{3\partial} &= 2,
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} \ge 0,\ x_3^{'} \ge 0,\ x_4^1 \ge 0,\ x_4^2 \ge 0,\ x_{1\partial} \ge 0,\ x_{2\partial} \ge 0.$$

$$f(x) = -5x_1 - x_2 - x_3^{'} - 7x_4^1 + 7x_4^2 \to \max.$$

Это окончательный вид ЗЛП.

Заметим, что в соответствующем примере есть первая и третья дополнительные переменные. Для удобства номер дополнительной переменной соответствует номеру строки, в которой она присутствует.

Заметим также, что замена переменной произвольного знака двумя неотрицательными переменными может привести к неединственному решению, т. к. любое число может быть заменено разностью двух неотрицательных чисел бесчисленным множеством способов. Например, $2 = 0 + 2$, $2 = 5 - 3$, $2 = 156 - 154$ и т. д. Однако при обратной замене этот недостаток устраняется.

Задания для самостоятельной работы

Привести ЗЛП к каноническому виду.

1.

$$\begin{aligned}
&-3x_1 - x_2 \quad + x_4 \le 6, \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \le -3, \\
&-2x_1 \qquad + 5x_3 \quad \ge -2, \\
&x_{1,2} \ge 0, \; x_3 \le 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 \to \max.$$

2.

$$\begin{aligned}
&5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \ge -7, \\
&2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \quad \le -2, \\
&-3x_1 + x_2 \; - 5x_3 \quad = -5, \\
&x_{1,2} \ge 0, \; x_3 \le 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = -3x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min.$$

3.

$$\begin{aligned}
&-3x_2 - x_3 + 5x_4 \le -2, \\
&2x_1 \qquad + 3x_3 \qquad \ge 7, \\
&7x_1 + x_2 \; + 2x_3 - x_4 \ge 5, \\
&x_1 \ge 0, \; x_{2,3} \le 0.
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 \to \min.$$

Симплекс метод

Базис – переменные, коэффициенты в матрице ограничений при которых образуют базисные вектора.

Определение: Явно выделенным базисом будем называть вектора вида: $(..0100..)^T, (..010..)^T, (..0010..)^T ...$, т.е. только одна координата вектора ненулевая и равна 1.

Замечание: Базисный вектор имеет размерность (m*1), где m – количество уравнений в системе ограничений.

Если ограничения в исходной задаче представлены неравенствами вида ≤, то при приведении задачи к канонической форме, введенные дополнительные переменные образуют начальное базисное решение.

Коэффициенты в строке функционала берутся со знаком “-”.

Алгоритм симплекс-метода

Пусть имеется базисное решение $x_{баз} = \begin{pmatrix} x_B = b \\ 0 \end{pmatrix}$ со значением целевой функции $f(x) = c_B^T x_B$.

Шаг 1: Вычислить оценки по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i \in I_B} c_i a_{ij} - c_j \text{ при всех } j.$$

Шаг 2: Если для $\forall\, j\ \Delta_j \geq 0$, то выписывается оптимальное решение задачи.

Конец.

Иначе шаг 3.

Шаг 3: Выбирается $\Delta_k < 0$.

Шаг 4: Просматривается столбец A_k, если $A_k \leq 0$, то выписывается ответ: «Задача не разрешима из-за неограниченности целевой функции».

Конец.

Иначе шаг 5.

Шаг 5: Алгоритм перестроения базисных решений ЗЛП.

Шаг 6: Переход к шагу 1.

Таблица 2.1

Пример

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 1,\\
x_1 - x_2 + \quad x_4 \quad &= 1,\\
x_1 + x_2 + \qquad x_5 &= 2,
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,5},$$

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max.$$

$$\Delta_j = \sum_{i \in I_B} c_i a_{ij} - c_j \text{ при всех } j.$$

B	c_B	x_B	2	−1	3	−2	1	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
x_3	3	1	−1	1	1	0	0	–
x_4	−2	1	1	−1	0	1	0	$\boxed{1}$
x_5	1	2	1	1	0	0	1	2
Δ_j		3	$\boxed{-6}$	7	0	0	0	
x_3	3	2	0	0	1	1	0	
x_1	2	1	1	−1	0	1	0	
x_5	1	1	0	2	0	−1	1	
Δ_j		9	0	1	0	6	0	

Поскольку на первой итерации $\Delta_1 < 0$, в базис вводится вектор A_1. $\Theta = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 1$, т. е. в качестве направляющего элемента выбирается a_{21}. Так как на второй итерации все $\Delta_j \geq 0$, то конец, получена оптимальная точка $x^* = (1, 0, 2, 0, 1)$. Поскольку на небазисных векторах $\Delta_j > 0$, то решение в задаче единственно.

Пример

Решить задачу

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + \quad + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + \quad + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,6},$$

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \to \max.$$

Таблица 2.2

B	c_B	x_B	2	–1	1	3	–2	1	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
x_4	3	1	–1	1	–1	1	0	0	–
x_5	–2	1	1	–1	0	0	1	0	1
x_6	1	2	1	–3	1	0	0	1	2
Δ_j		3	–6	3	–3	0	0	0	
x_4	3	2	0	0	–1	1	1	0	
x_1	2	1	1	–1	0	0	1	0	
x_6	1	1	0	–2	1	0	–1	1	
Δ_j		9	0	–3	–3	0	6	0	

На второй итерации получаем, что оценка $\Delta_2 < 0$, но в столбце A_2 нет положительных элементов.

Ответ: целевая функция неограниченна.

Задачи для самостоятельного решения

Дана ЗЛП:

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 2,$$
$$bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \le 12,$$
$$2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 6,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4},$$
$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_3 + ax_4 \to \max.$$

В табл. 1.5 приведены варианты значений параметров *a, b, c*.

Таблица 1.5

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	2	3	-1	6	5	2	3	11	2	1	2	16	3	3	1
2	3	1	1	7	4	3	6	12	3	3	4	17	4	1	2
3	4	2	-1	8	6	1	5	13	5	2	-1	18	3	1	0
4	7	2	3	9	2	2	2	14	7	1	5	19	4	1	3
5	8	3	4	10	5	3	7	15	6	3	8	20	5	2	6

Необходимо выполнить следующие задания.

1. Привести ЗЛП к канонической форме.
2. Решить симплекс-методом ЗЛП

	5 группа	№ задания
1	Андриянова Наталья Сергеевна	1
2	Бакланов Роман Сергеевич	2
3	Башлыков Данила Максимович	3
4	Голов Павел Олегович	4
5	Грамадчукова Анастасия Руслановна	5
6	Евсюков Михаил Ильич	6
7	Есмантович Иван Андреевич	7
8	Забарющая Александра Артуровна	8
9	Заиди Артём Али	9
10	Золотов Никита Алексеевич	10
11	Ивахненко Иван Романович	11
12	Карпузов Максим Константинович	12
13	Кончакова Александра Владимировна	1
14	Кулинченко Максим Игоревич	2
15	Мазуров Валентин Константинович	3
16	Пархоменко Павел Владимирович	4
17	Рябовский Дмитрий Игоревич	5
18	Сайкова Анастасия Анатольевна	6
19	Сушков Андрей Викторович	7
20	Цискарашвили Лина Нодариевна	8
21	Черныховский Павел Владимирович	9
22	Щеглова София Евгеньевна	10
23	Юрьева Надежда Андреевна	11

	6 группа	№ варианта
1	Головизин Никита Павлович	1
2	Гридяева Юлия Евгеньевна	2
3	Золотухин Александр Андреевич	3
4	Истомин Владимир Андреевич	4
5	Махоркин Александр Николаевич	5
6	Митин Алексей Александрович	6
7	Перфильев Илья Владимирович	7
8	Суркова Полина Игоревна	8
9	Сушко Андрей Вячеславович	9
10	Требунский Александр Юрьевич	10
11	Черненко Дмитрий Геннадьевич	11
12	Шаповалова Ирина Юрьевна	12

	3 группа	№ задания
1	Алакад Екатерина Мохаммедовна	1
2	Асташов Александр Сергеевич	2
3	Бурляева Светлана Игоревна	3
4	Гайдин Дмитрий Алексеевич	4
5	Зайцев Егор Андреевич	5
6	Карташов Вячеслав Иванович	6
7	Котенко Владислав Сергеевич	7
8	Кочанов Александр Сергеевич	8
9	Крекшин Максим Александрович	9
10	Крыжко Дмитрий Алексеевич	10
11	Куланин Евгений Игоревич	11
12	Макаров Владислав Витальевич	12
13	Макарова Екатерина Михайловна	1
14	Минакова Александра Юрьевна	2
15	Проскурин Александр Сергеевич	3
16	Протасова Ксения Вячеславовна	4
17	Рахимов Ихтиёржон Бахтиёржонович	5
18	Савельев Илья Михайлович	6
19	Самсонова Екатерина Ивановна	7
20	Сухоручкина Алена Игоревна	8
21	Усачев Алексей Максимович	9
22	Фалалеев Максим Игоревич	10
23	Хадосевич Светлана Игоревна	11
24	Шевченко Кристина Юрьевна	12
25	Яньшина Ева Владимировна	1