

- **ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА**



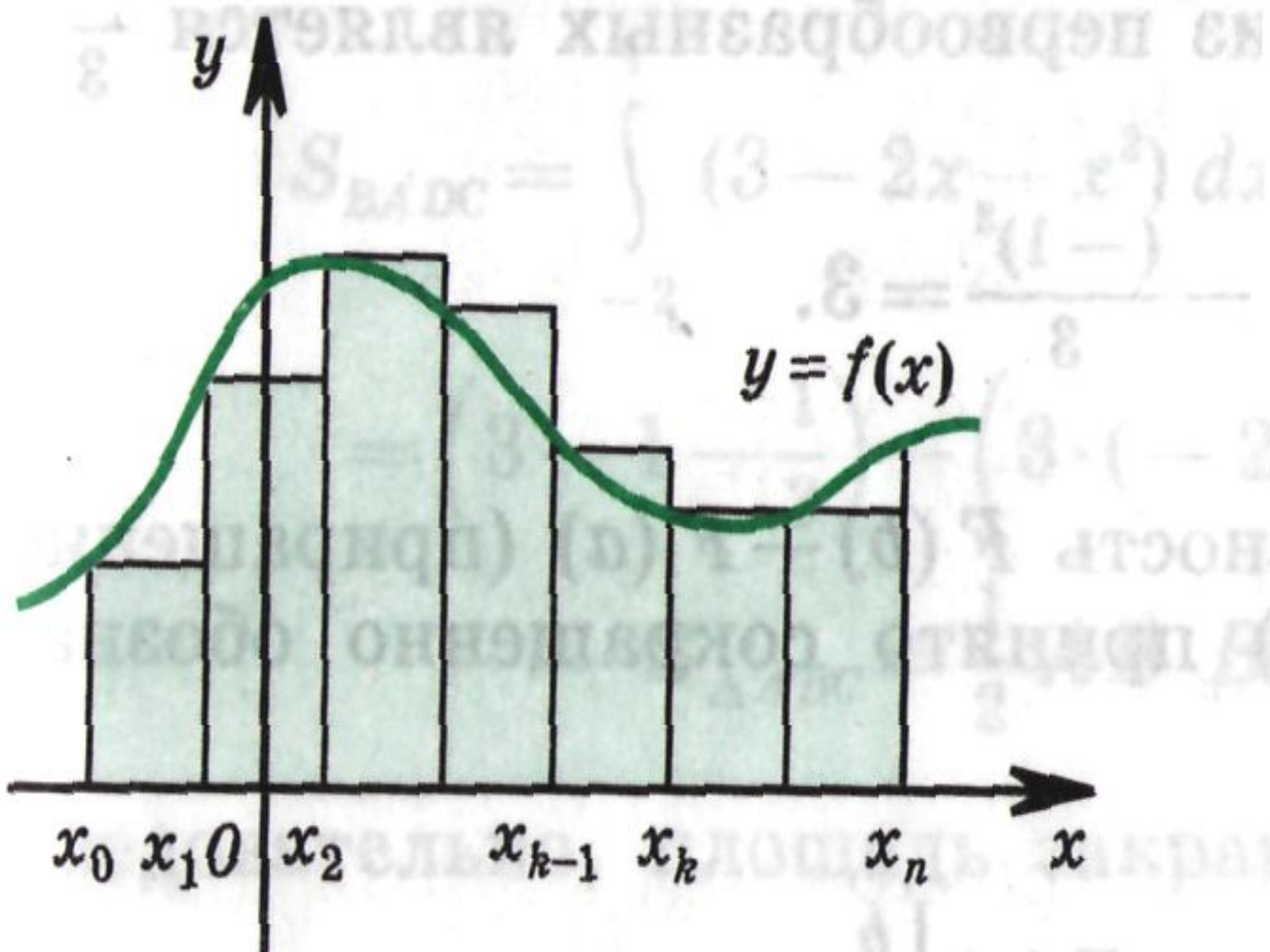


# Вопросы для повторения

- **1. Что называют криволинейной трапецией?**
- **2. Являются ли фигуры, изображённые на графиках криволинейными трапециями?**
- **3. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции**

## Рассмотрим другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции

- Будем считать функцию  $f$  неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , тогда площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции можно приближённо подсчитать следующим образом



# Разобьём отрезок $[a; b]$ на $n$ отрезков одинаковой длины точками

$$x_0 = a \boxtimes x_1 \boxtimes x_2 \boxtimes \dots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes x^n = b$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

*Рассмотрим*

*сумму*

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \\ &= (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}))\Delta x \end{aligned}$$

При  $n \rightarrow \infty$

$S_n \rightarrow$  к некоторому числу

- Это число называют интегралом функции  $f$  от  $a$  до  $b$  и обозначают:

**b**

$$\int f(x) dx$$

**a**

□ Числа  $a$  и  $b$  - называются **пределами интегрирования**,  $a$  – нижним пределом,  $b$  – верхним.

□ Знак  $\int$  - называют **знаком интеграла**

□ Функцию  $f$  называют **подынтегральной функцией**, а переменная  $x$  – **переменной интегрирования**

□  $df$ - знак дифференциала





**Итак, если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то**

- Площадь соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой:**

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



- **Сравнивая формулы криволинейных трапеций :**

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ и } S = F(b) - F(a)$$

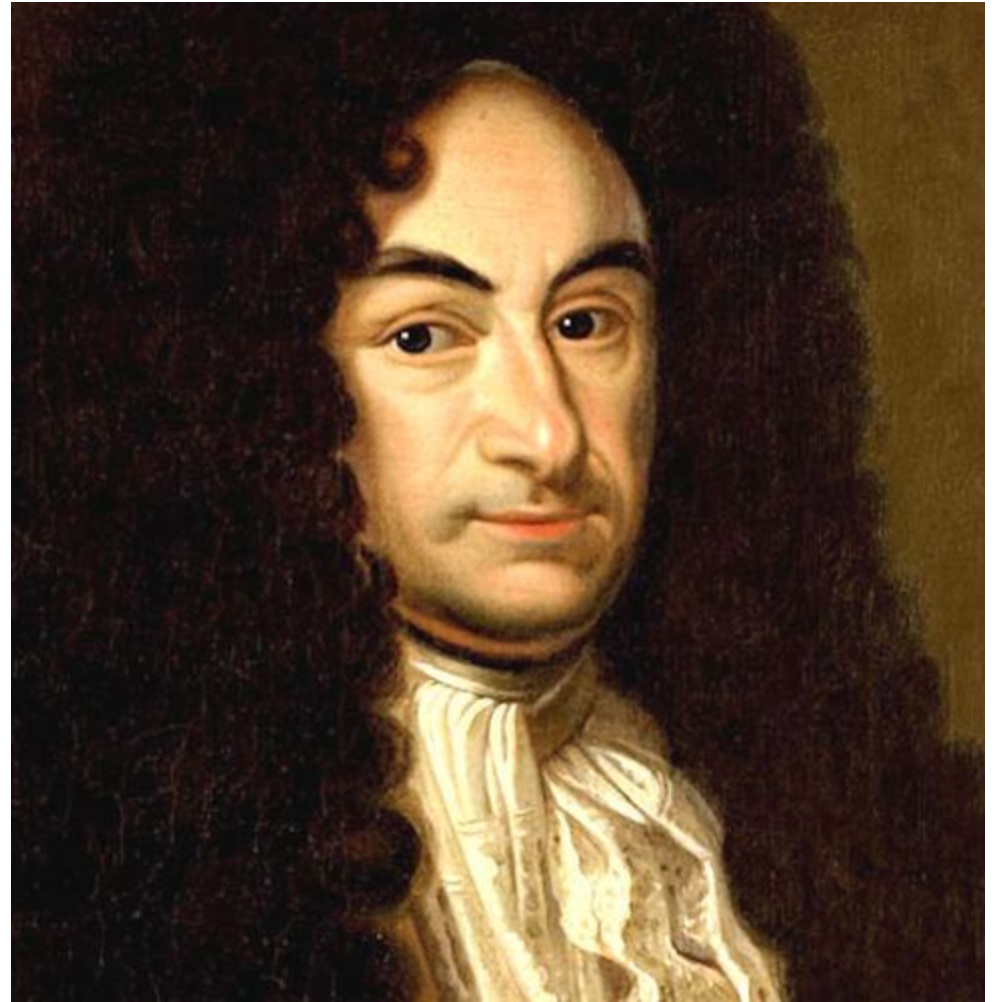
**Делаем вывод:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Формула Ньютона-Лейбница



**Исак Ньютон  
(1643-1716)**

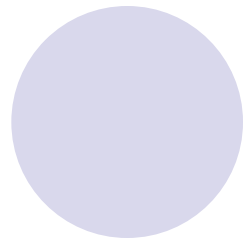
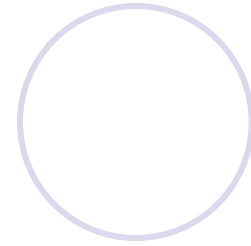
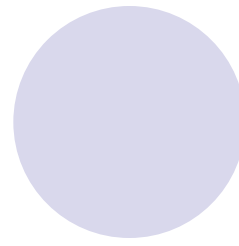
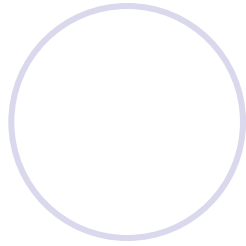


**Готфрид  
Лейбниц(1646-1716).**

<b>Функ ция f</b>	<b>К – ПОС ТОЯН ная</b>	<b><math>x^n</math></b> (n-целое n≠1)	<b>sin x</b>	<b>cos x</b>	<b><math>\frac{1}{\cos^2 x}</math></b>	<b><math>\frac{1}{\sin^2 x}</math></b>	<b><math>\frac{1}{\sqrt{x}}</math></b>
<b>Общи й вид пер- вообр аз ных F</b>	<b>кx + C</b>	<b><math>\frac{x^{n+1}}{n+1}</math> + C</b>	<b>-cosx +C</b>	<b>sin x +C</b>	<b>tgx +C</b>	<b>-ctgx +C</b>	<b><math>2\sqrt{x}</math></b>

угол	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\infty$

Пример:



$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 9 - \frac{8}{3} = 6\frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 (2x + 4) dx = \left( 2\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_1^2 = (2^2 + 8) - (1^2 + 4) = 12 - 5 = 7$$

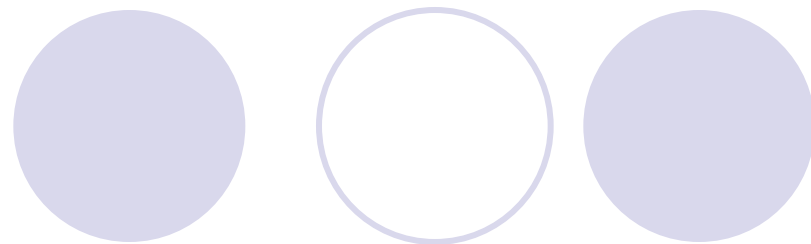
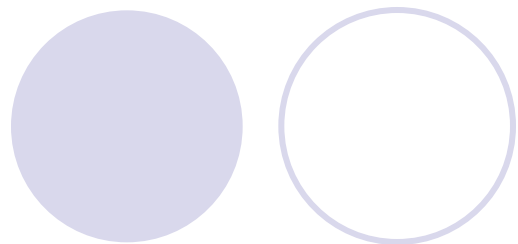
$$\int_0^2 x^2 dx \quad \int_1^2 x^3 dx$$


$$\int_1^4 (5x + 3) dx$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{\pi}^0 \sin 5x dx$$





a)  $\int_0^1 x dx$ ; б)  $\int_0^2 \frac{x}{2} dx$ ; в)  $\int_0^2 x^2 dx$ ; г)  $\int_1^3 dx$ .

$$\int_0^{\pi} \sin x dx =$$