Семинар 13

доцент Волков Н.П.

Занятие 13

Матрицы и действия над ними.

1. Произвести указанные действия:

$$3\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 4\\ -2 & 5 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4 & -6\\ 2 & -8 & 10\\ -4 & 16 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ -1 & -5 & 7\\ -4 & 7 & -1\end{pmatrix}}$$

789) $$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta\\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta\end{pmatrix}}$$

791) $$\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15+32-36 & 10-8-24 & 25+24-20\\ 18+36-45 & 12-9-30 & 30+27-25\\ 12+28-27 & 8-7-18 & 20+21-15\end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}}$$

796) $$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}}$$

799 $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\-9&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}=$

$=\boxed{\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}}$

802 $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n=$

Рекурентная формула:

$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha&-\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\\\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha&-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos2\alpha&-\sin2\alpha\\\sin2\alpha&\cos2\alpha\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\cos2\alpha&-\sin2\alpha\\\sin2\alpha&\cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha&-\cos2\alpha\sin\alpha-\sin2\alpha\cos\alpha\\\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha&-\sin2\alpha\sin\alpha+\cos2\alpha\cos\alpha\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos3\alpha&-\sin3\alpha\\\sin3\alpha&\cos3\alpha\end{pmatrix}$

И т.д. $\boxed{\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\sin n\alpha\\\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}}$

817) Определение 1. Квадратная матрица A называется:

1. симметрической, если $A^T = A$
2. кососимметрической, если $A^T = -A$

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – произвольная матрица

Запишем $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

Обозначим $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ и вычислим

$$B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left(A^T + (A^T)^T\right) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B,$$

т.е. B – симметрическая матрица.

Обозначим $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ и вычислим

$$C^T = \left[\frac{1}{2}(A - A^T)\right]^T = \frac{1}{2}\left(A^T - (A^T)^T\right) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -C,$$

т.е. C – кососимметрическая матрица.

Итак, $A = B + C$

827) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5E$$

Найдем $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}}$$

837

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=?$$

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix}=21-20=1\neq 0$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}7=7, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}5=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}4=-4, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}3=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}}$$

841

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$$

Метод элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 11 & 3 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}}$$

843

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=?$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-3&-6\\0&-6&-3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&6\\6&3\end{vmatrix}=9-36=-27\neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-6&-3&-2&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&9&2&-2&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}}$$

845

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=?$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\0&-1&-2&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-5&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-1&-6&-1&0&2&0\\0&1&2&5&1&0&-1&0\\0&0&-3&-1&-1&1&-1&0\\0&0&-1&0&1&0&-2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-6&-2&0&4&-1\\0&1&0&5&3&0&-5&2\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&-1&-4&1&5&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{pmatrix}}$$

861

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Найдем $A^{-1}B$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -2 & -4 & -6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}}$$

866

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$$

$$AXB = C \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$$

Найдем $A^{-1}C$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2\\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9\\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -8 & -6 & -6\\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l}-\vec{a}_2 + \to \vec{a}_3\\ -2\vec{a}_1 + \to \vec{a}_1\\ -4\vec{a}_1 + \to \vec{a}_2\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -11 & -9 & -10\\ 0 & 1 & -1 & -8 & -6 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19\end{array}\right) \begin{array}{l}2\vec{a}_2 + \to \vec{a}_1\\ \\ -3\vec{a}_2 + \to \vec{a}_3\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix}11 & 9 & 9\\ 14 & 12 & 13\\ 22 & 18 & 19\end{matrix}}_{A^{-1}C}\\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Найдем B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \begin{array}{l}-9\vec{a}_1 + \to \vec{a}_1\\ -\vec{a}_1 + \to \vec{a}_2\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix}1/2 & 1/2 & -4\\ -1/2 & -3/2 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{matrix}}_{B^{-1}}\\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -4 \\ -1/2 & -3/2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Определение 2</u> <u>Рангом</u> ненулевой матрицы A называется натуральное число $r \in \mathbb{N}$, равное максимальному порядку отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначение $r = Rg\,A$.

<u>Теорема (о ранге матрицы)</u>

Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы A и равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A.

608

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&1&-5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Rg\,A=2}$$

619

$$A=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&1&3&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\boxed{Rg\,A=3}$$

Дома: Пр. 788, 790, 792, 797, 800, 804, 808, 828, 836, 838, 840, 844, 862, 863, 621