

Семинар 13

доцент Волков Н.П.

Занятие 13

Матрицы и действия над ними.

1. Произвести указанные действия:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & -8 & 10 \\ -4 & 16 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -5 & 7 \\ -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{789)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & ay+b\delta \\ cx+dz & cy+d\delta \end{pmatrix}$$

$$\underline{791)} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+32-36 & 10-8-24 & 25+24-20 \\ 18+36-45 & 12-9-30 & 30+27-25 \\ 12+28-27 & 8-7-18 & 20+21-15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\underline{796)} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{799} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{802} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n =$$

Рекуррентная формула:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha & -\cos 2\alpha \sin \alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha \\ \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha & -\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 2\alpha \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}$$

И т.д.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}}$$

817] Определение 1. Квадратная матрица A называется:

1. симметрической, если $A^T = A$
2. кососимметрической, если $A^T = -A$

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - произвольная матрица
Запишем $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

Обозначим $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ и вычислим
 $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T) \right]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$,
т.е. B - симметрическая матрица.

Обозначим $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ и вычислим
 $C^T = \left[\frac{1}{2}(A - A^T) \right]^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -C$,
т.е. C - кососимметрическая матрица.

Итак, $A = B + C$

827] $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5E$$

Найдем $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$f(A) = 3 \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$$

837

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 4 = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} 3 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}$$

841

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Метод элементарных преобразований

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{843} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 36 = -27 \neq 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\underline{845} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = ?$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\underline{861} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B \Rightarrow X = A^{-1} B$$

Найдем $A^{-1} B$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{866} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A X B = C \Rightarrow A^{-1} A X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1}$$

Найдем $A^{-1} C$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 \\ -2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \\ -4\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -11 & -9 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_1 \\ -3\vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}C}$$

Найдем B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -9\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \\ -\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{B^{-1}}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 2 Рангом ненулевой матрицы A называется натуральное число $r \in \mathbb{N}$, равное максимальному порядку отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначение $r = \text{Rg} A$.

Теорема (о ранге матрицы)

Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы A и равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A .

$$\underline{608} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Rg } A = 2}$$

$$\underline{619} \quad A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Rg } A = 3}$$

Дома: № 788, 790, 792, 797, 800, 804, 808,
828, 836, 838, 840, 844, 862, 863,
621

