РТУ МИРЭА

Практическое занятие №7

Минимизация логического автомата

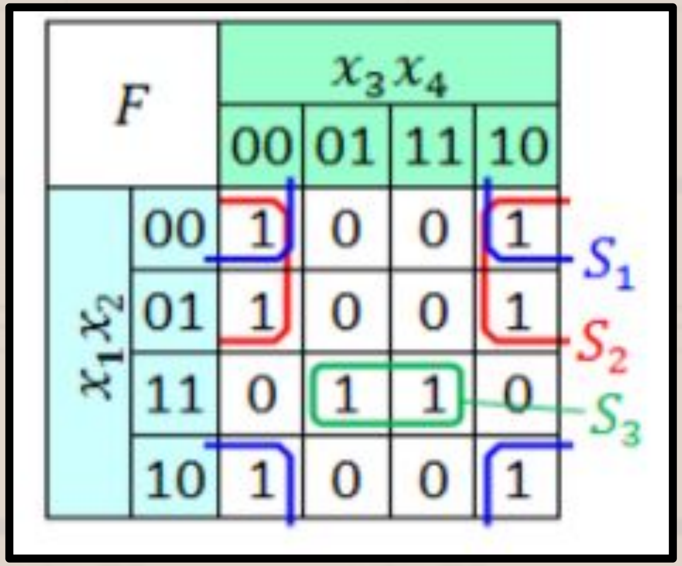
Лыткарино. 2020

Краткие теоретические сведения

Реализация МКНФ функции

Минимизация логических функций основана на законах алгебры логики и направлена на получение минимальной дизъюнктивной нормальной формы (МДНФ) или минимальной конъюнктивной нормальной формы (МКНФ), реализация которых приведёт к построению логической схемы с наименьшим числом логических элементов.

Наиболее используемые методы получения МДНФ или МКНФ: метод карт Карно, метод Квайна.



Пример карты Карно

Карты Карно

Карта Карно́ — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции. Карты Карно можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.

Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно, физиком из «Bell Labs», и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы.

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Принципы минимизации

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами (членами), содержащими одинаковые переменные, вхождения которых (прямые и инверсные) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке.

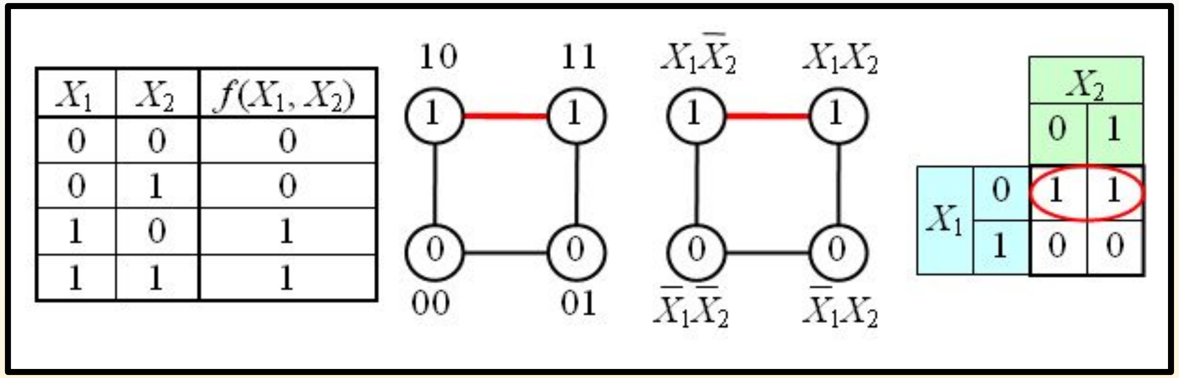
Например для ДНФ: $\overline{X}_1 X_2 X_3 X_4 \vee \overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3 X_4 = \overline{X}_1 X_2 X_4 (X_3 \vee \overline{X}_3) = \overline{X}_1 X_2 X_4.$

Аналогично для КНФ: $(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4)(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee \overline{X}_3 \vee X_4) = \overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_4 \vee X_3 \overline{X}_3 = \overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_4.$

Возможность поглощения следует из очевидных равенств: $A \vee \overline{A} = 1; A\overline{A} = 0.$

Таким образом, главной задачей при минимизации СДНФ и СКНФ является поиск термов, пригодных к склейке с последующим поглощением, что для больших форм может оказаться достаточно сложной задачей. Карты Карно предоставляют наглядный способ отыскания таких термов.

На рисунке 1 изображена простая таблица истинности для функции из двух переменных, соответствующий этой таблице 2-мерный куб (квадрат), а также 2-мерный куб с обозначением членов СДНФ и эквивалентная таблица для группировки термов.



X_1	X_2	$f(X_1, X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Рисунок 1

В случае функции трёх переменных приходится иметь дело с трёхмерным кубом. Это сложнее и менее наглядно, но технически возможно. На рисунке 2 в качестве примера показана таблица истинности для булевой функции трёх переменных и соответствующий ей куб.

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

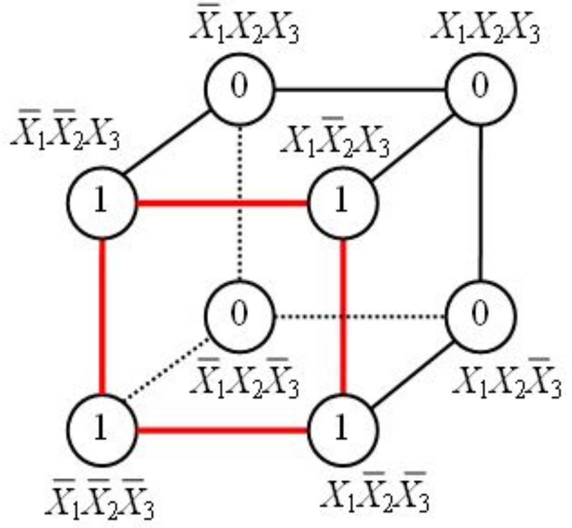


Рисунок 2

Как видно из рисунка 2, для трёхмерного случая возможны более сложные конфигурации термов. Например, четыре терма, принадлежащие одной грани куба, объединяются в один терм с поглощением двух переменных:

$$\overline{X}_2(\overline{X}_1\overline{X}_3 \vee \overline{X}_1X_3 \vee X_1\overline{X}_3 \vee X_1X_3) = \overline{X}_2(\overline{X}_1 \vee X_1)(\overline{X}_3 \vee X_3) = \overline{X}_2$$

В общем случае можно сказать, что 2K термов, принадлежащие одной K–мерной грани гиперкуба, склеиваются в один терм, при этом поглощаются K переменных.

Для упрощения работы с булевыми функциями большого числа переменных был предложен следующий удобный приём. Куб, представляющий собой структуру термов, разворачивается на плоскость как показано на рисунке 3. Таким образом появляется возможность представлять булевы функции с числом переменных больше двух в виде плоской таблицы. При этом следует помнить, что порядок кодов термов в таблице (00 01 11 10) не соответствует порядку следования двоичных чисел, а клетки, находящиеся в крайних столбцах таблицы, соседствуют между собой

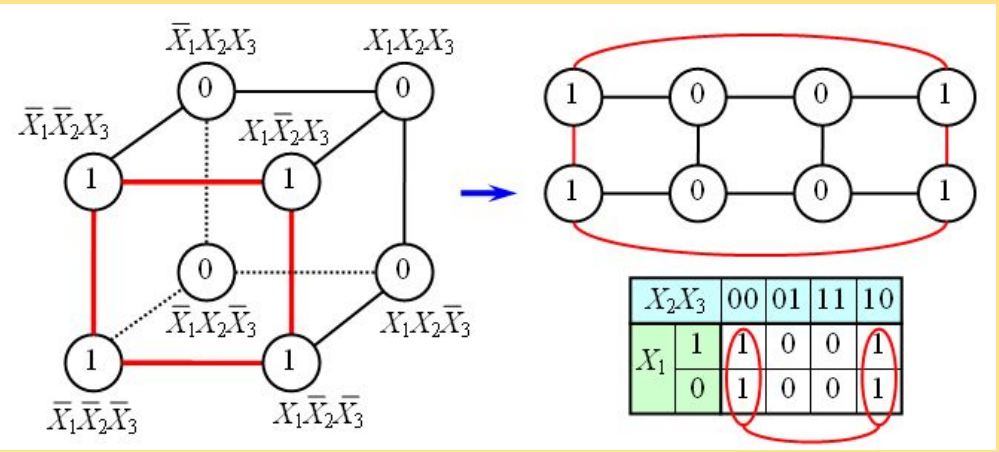


Рисунок 3

Аналогичным образом можно работать с функциями четырёх, пяти и более переменных. Примеры таблиц для N=4 и N=5 приведены на рисунке 4. Для этих таблиц следует помнить, что соседними являются клетки, находящиеся в соответственных клетках крайних столбцов и соответственных клетках верхней и нижней строки. Для таблиц 5 и более переменных нужно учитывать также, что квадраты 4x4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4x4 являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать.

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00				1
01		1	1	
10				
11				1

X_5	0				1			
X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10	00	01	11	10
00								
01								
10			1				1	
11								

Рисунок 4

Описание

Карта Карно может быть составлена для любого количества переменных, однако удобно работать при количестве переменных не более пяти. По сути Карта Карно — это таблица истинности, составленная в 2-х мерном виде. Благодаря использованию кода Грея в ней верхняя строка является соседней с нижней, а правый столбец соседний с левым, т.о. вся Карта Карно сворачивается в фигуру тор (бублик). На пересечении строки и столбца проставляется соответствующее значение из таблицы истинности. После того как Карта заполнена, можно приступать к минимизации.

Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки, которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки, которые содержат нули. Сама минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ):

1. Объединяем смежные клетки содержащие единицы в область, так чтобы одна область содержала 2n (n целое число = 0…) клеток (помним про то что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток содержащих нули;
2. Область должна располагаться симметрично оси(ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);
3. Не смежные области расположенные симметрично оси(ей) могут объединяться в одну;
4. Область должна быть как можно больше, а кол-во областей как можно меньше;
5. Области могут пересекаться;
6. Возможно несколько вариантов накрытия.

Далее берём первую область и смотрим какие переменные не меняются в пределах этой области, выписываем конъюнкцию этих переменных, если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней инверсию. Берём следующую область, выполняем то же самое что и для первой, и т. д. для всех областей. Конъюнкции областей объединяем дизъюнкцией. Например, для Карт на две переменные (рисунок 5 и 6):

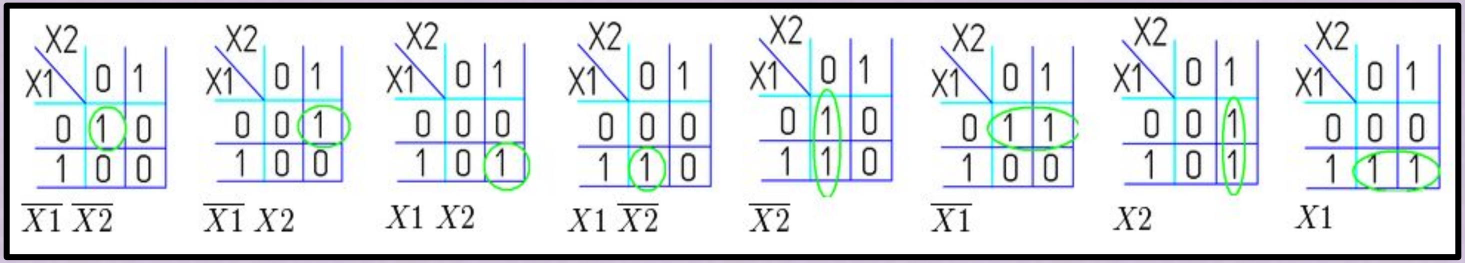


Рисунок 5

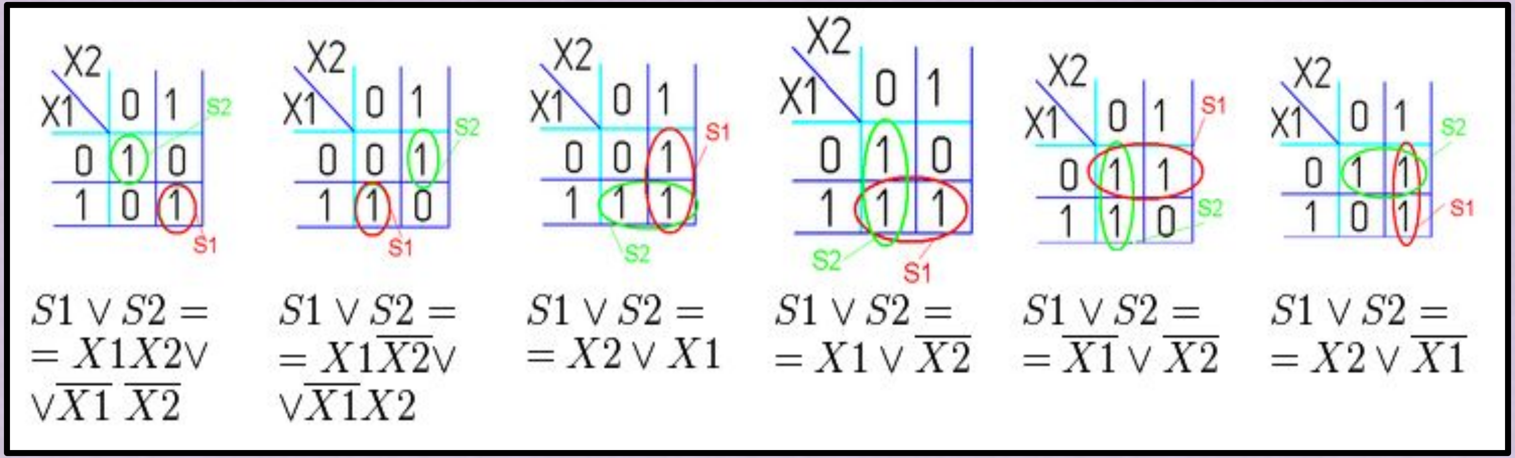


Рисунок 6

Примеры решения типовых задач

Пример 1

У мальчика **Коли** есть мама, папа, дедушка и бабушка. Коля пойдёт гулять на улицу, если ему разрешат хотя бы двое родственников.

Решение:

1) Для краткости обозначим родственников Коли через буквы (рисунок 7):

мама — x1
папа — x2
дедушка — x3
бабушка — x4

Рисунок 7

Условимся обозначать согласие родственников единицей, не согласие нулём. Возможность пойти погулять обозначим буквой f, Коля идёт гулять — f = 1, Коля гулять не идёт — f = 0.

2) Составим таблицу истинности (Рисунок 8):

X1	X2	X3	X4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Рисунок 8

3) Перерисуем таблицу истинности в 2-х мерный вид (рисунок 9):

X1 X2 \ X3 X4	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

Рисунок 9

4) Переставим в ней строки и столбцы в соответствии с кодом Грея. Получили Карту Карно (рисунок 10):

X1 X2 \ X3 X4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Рисунок 10

5) Заполним её значениями из таблицы истинности (рисунок 11):

X1 X2 \ X3 X4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Рисунок 11

6) Минимизируем в соответствии с правилами (рисунок 12):

1. Все области содержат 2^n клеток;
2. Так как Карта Карно на четыре переменные оси располагаются на границах Карты и их не видно;
3. Так как Карта Карно на четыре переменные все области симметрично осей — смежные между собой;
4. Области S3, S4, S5, S6 максимально большие;
5. Все области пересекаются (не обязательное условие);
6. В данном случае рациональный вариант только один

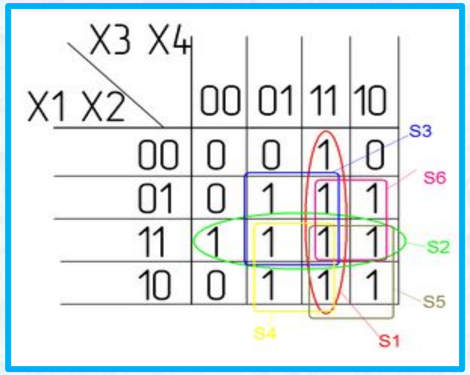


Рисунок 12

$$f(X1, X2, X3, X4) = S1 \vee S2 \vee S3 \vee S4 \vee S5 \vee S6 = X3X4 \vee X1X2 \vee X2X4 \vee X1X4 \vee X1X3 \vee X2X3$$

7) Теперь по полученной минимальной ДНФ можно построить логическую схему (рисунок 13). Из за отсутствия в наличии шести-входового элемента ИЛИ, реализующего функцию дизъюнкции, пришлось каскадировать пяти- и двух-входовые элементы (D7, D8).

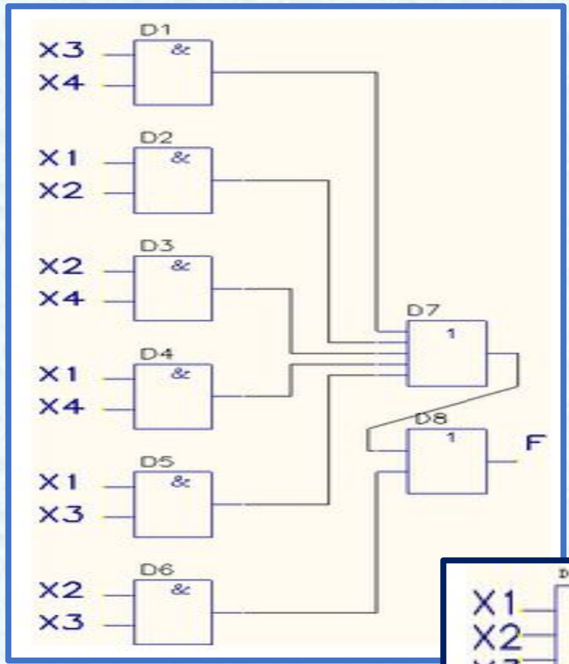


Рисунок 13

8) Составим мин. КНФ (рисунок 14):

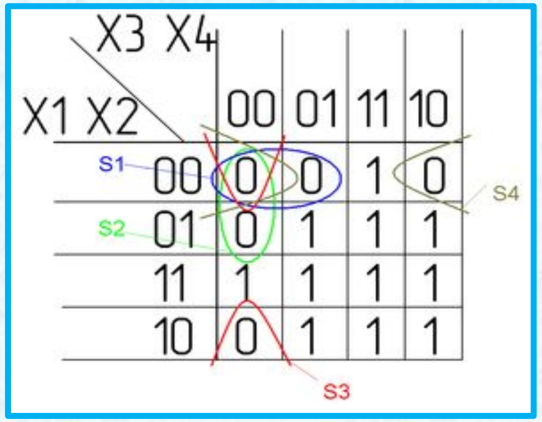


Рисунок 14

9) Строим логическую схему по полученной минимальной КНФ (рисунок 15):

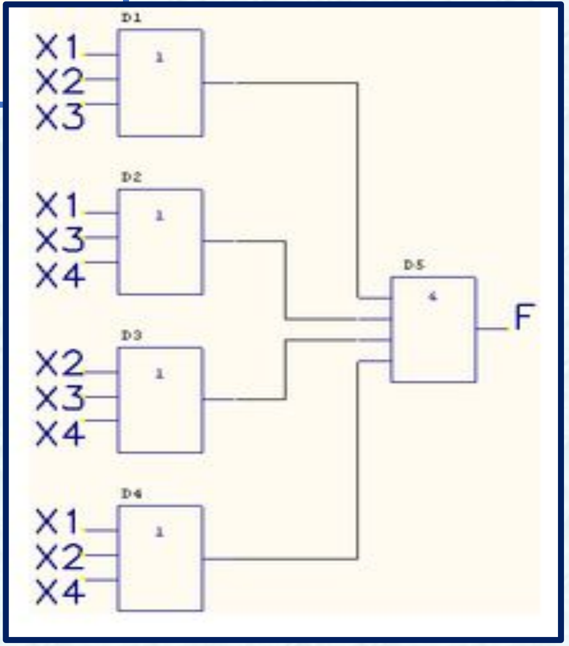


Рисунок 15

$$f(X1,X2,X3,X4)=(S1)\,(S2)\,(S3)\,(S4)=(X1\vee X2\vee X3)(X1\vee X3\vee X4)(X2\vee X3\vee X4)(X1\vee X2\vee X4)$$

Пример 2

По таблице истинности (рисунок 16) составить булево выражение в СДНФ, минимизировать это выражение с помощью карты Карно, нарисовать логическую схему, реализующую минимизированное булево выражение.

где A, B, C, D — переменные; Q — логическая функция.

Дано: Таблица истинности:

A	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
D	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1

Рисунок 16

Решение:

1) Составим логическое выражение в СДНФ:

$$Q = \bar{D} \cdot \bar{C} \cdot B \cdot \bar{A} + \bar{D} \cdot \bar{C} \cdot B \cdot A + \bar{D} \cdot C \cdot \bar{B} \cdot A + \bar{D} \cdot C \cdot B \cdot A + D \cdot C \cdot \bar{B} \cdot \bar{A} + D \cdot C \cdot \bar{B} \cdot A + D \cdot C \cdot B \cdot A.$$

2) Составим карту Карно для четырех переменных (рисунок 17):

Ячейки, в которых функция равна единице, объединены в три группы. В группе 1 результат не зависит от значения переменной А, во второй — тоже от переменной А, в третьей, объединяющей четыре ячейки, результат не зависит от переменных В и D.

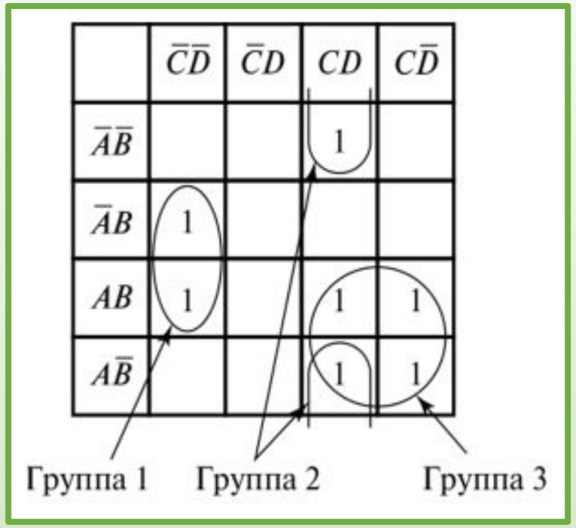


Рисунок 17

3) Результат минимизации будет выглядеть следующим образом:

$$Q = \bar{D} \cdot \bar{C} \cdot B + D \cdot C \cdot \bar{B} + C \cdot A.$$

Данное логическое выражение является тупиковым.

4) Строим логическую схему (Рисунок 18):

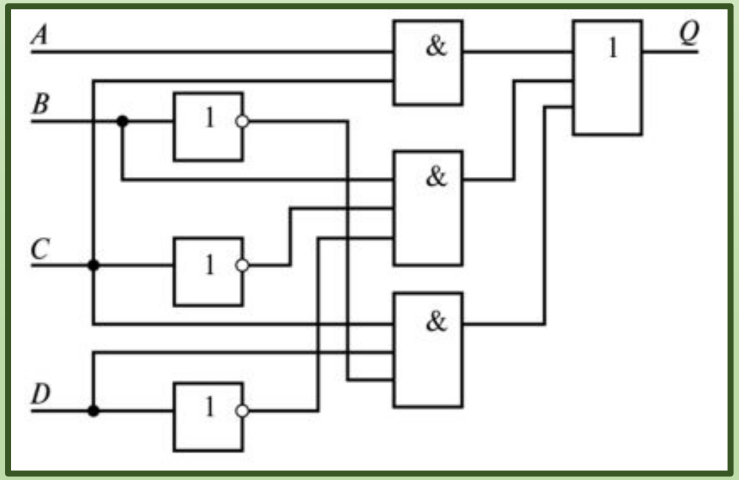


Рисунок 18

Пример 3

Требуется минимизировать функцию четырех переменных, карта Карно которой представлена на рисунке 19.

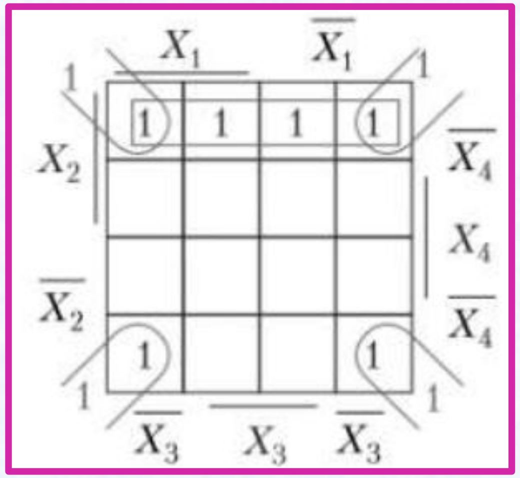


Рисунок 19

Решение:

1) Проводим два контура второго ранга и получаем: $f_{\min} = \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_2 \cdot \overline{X_4}.$

2) Находим цену схемы: $Ц = 4 + 2 = 6.$

3) Можно в карте Карно объединить нули, но при этом получаем инверсную функцию: $\overline{f_{\min}} = X_4 + \overline{X_2} \cdot X_3.$

4) Здесь проведены два куба — третьего и второго ранга. Цена схемы получается меньше: $\boxed{Ц = 2 + 2 = 4.}$

5) Ее реализация на произвольных элементах имеет вид, показанный на рисунке 20:

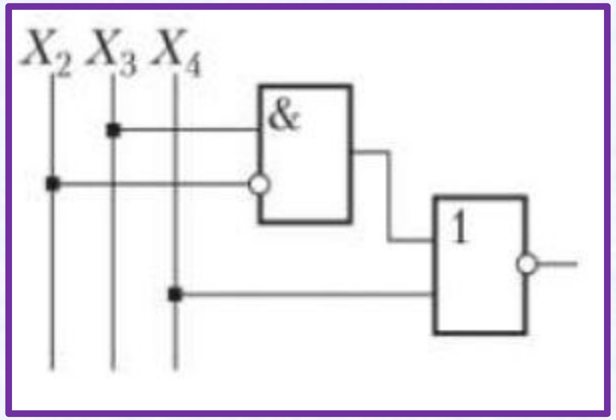


Рисунок 20

6) Отрицание можно перенести в правую часть, что не отражается на цене: $f_{min} = \overline{X_4 + \overline{X_2} \cdot X_3}.$

Вывод: чем меньше цена, тем лучше. Поэтому минимизировать по карте Карно следует и по единицам, и по пулям. К реализации принимают формулу с наименьшей ценой.

Задачи для самостоятельной работы

1-4. Записать минимальную форму в КНФ и в ДНФ:

1. $f(x,y)=xy+\bar{x}y+\bar{x}\bar{y}$
2. $f = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc.$
3. $f(x,y,z,t)=\bar{x}yz\bar{t}+\bar{x}\bar{y}z\bar{t}+x\bar{z}t+\bar{x}\bar{z}t$
4. $F = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}D$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рисунок 21

X3X4 / X1X2	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Рисунок 22

5. По таблице истинности восстановите логическое выражение (рисунок 21).

6. Упростите следующее логическое выражение. $\bar{x} \wedge z \vee \overline{x \wedge y} \vee x \wedge z \wedge \bar{y}$.

7. Составьте ДНФ по данной карте Карно (рисунок 22).

Задачи для самостоятельной работы

8. Составьте КНФ по данной карте Карно (рисунок 23).

X3X4 / X1X2	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1

Рисунок 23

9. Упростите следующее логическое выражение: $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

10. Изобразите карту Карно и упростите функцию (рисунок 24).

x	y	z	F(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Рисунок 24