Теория автоматического управления

Лекция 3. Связь ФПС, ПФ, ДУ.

Описание модели СУ.

- Модель СУ представляется в форме обыкновенного дифференциального уравнения (ДУ) с постоянными коэффициентами:

$$d_n \frac{d^n y}{dt^n} + d_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ \dots d_1 \frac{dy}{dt} + d_0 y = g_m \frac{g^m f}{dt^m} + g_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}} + \ \dots g_1 \frac{df}{dt} + g_0 f.$$

- Вводим следующий оператор:

$p = d/dt \rightarrow p^k = d^k/dt,$

- Тогда ДУ можно переписать в следующем виде: *D(p)y(t)=G(p)f(t)*

D(p) – собственный полиномиальный оператор СУ.

G(p) – входной полиномиальный оператор СУ.

- *Применим преобразование Лапласа.*

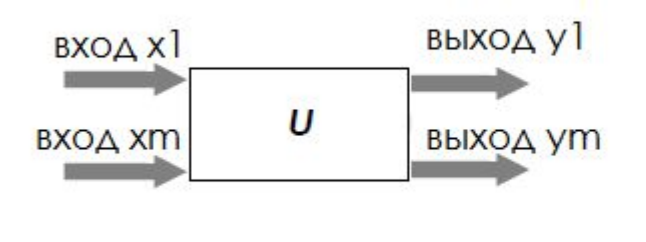
D(s)Y(s)=G(s)F(s)→ $\frac{Y(s)}{F(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{D(s)}$

- Факторизованная запись ПФ через корни числителя и знаменателя.

$W(s) = \frac{g_m \prod_{j=1}^{m}(s-s_j)}{d_n \prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}$, где s_j и s_i - корни полиномов соответственно.

Модели вход-состояние-выход

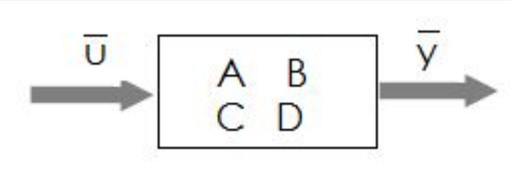
- Для описания системы вводятся внутренние переменные $\{V_i\}$.
- $V_i(t)$ - переменная состояния (координата состояния), которая характеризует динамику системы во времени.
- Состояние – необходимая и достаточная информация системы для заданных входных воздействий.
- Набор $\{V_i\}$ – набор вектора внутренних состояний, по значению которых в некоторый момент времени $V_i(t_0), i = \overline{1,n}$ и заданию внешних воздействий $f_j, j = \overline{1,m}, t \geq t_0$ можно полностью спрогнозировать поведение системы в будущем, т.е. определить $V_i(t)$, в любой момент времени t.
- $\frac{dV_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} V_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j \, , i = \overline{1,n}$



Форма пространств состояний (ФПС)

- Одной из стандартных форм представления в теории управления считается система дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется *нормальной формой Коши*.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$



- Где, y, u – скаляры, A, B, C, D – матрицы.
- A – матрица коэффициентов (состояний), $\dim = nxn$.
- B – матрица входа (управления), $\dim = nxm$.
- C – матрица выхода (наблюдения) , $\dim = rxn$.
- D – матрица обхода (сквозной передачи управления), $\dim = rxm$.

Получение ПФ по модели в форме пространства состояний (ФПС)

ФПС → ПФ

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

преобразование Лапласа

$$s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$
$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$$

единичная матрица

подставляем

$$(s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s), \quad \times (s \cdot I - A)^{-1} \quad X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

тогда получим

$$Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) = \left[C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s).$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D.$$

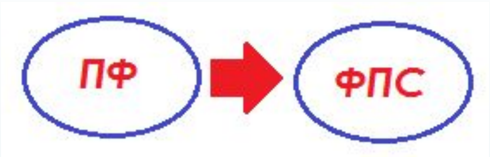
РЕЗУЛЬТАТ!!!

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^{*}}{\det(sI - A)}$$

$$\det(sI - A) = D(s)$$

$$(sI - A) \to \widetilde{sI - A} \to$$
$$\to (\widetilde{sI - A})^{T} = (sI - A)^{*}$$

Получение ФПС по ПФ модели.



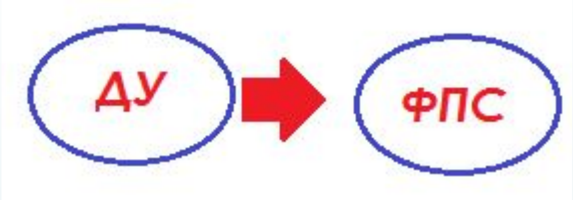
- Если ПФ отвечает условиям физической реализуемости, то всегда можно получить ФПС.
- В случае, если при определении ПФ $V_i(0)$ или $X(0) \neq 0$. То необходимо пересчитать первоначальные условия.
- $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + d = \frac{G(s)}{D(s)}$.
- $D(s) = det(sI - A)$
- $G(s) = \begin{vmatrix} sI - A & B \\ -C & d \end{vmatrix} = det(sI - A) * det(C(sI - A)^{-1}B + d) = D(s)W(s)$.

$$W(s) = d + \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

где d, a_i $(i = 0,1,2)$ и b_i $(i = 0,1,2)$ – постоянные коэффициенты, модель в пространстве состояний задается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = d.$$

Переход от ДУ к ФПС



- Данный переход не однозначный, т. к. существует произвольной выбор системы координат и состояний.
- Т-числовая матрица преобразования координат, так что выберем новый базис $\vec{V} = T\vec{\omega}, \vec{\omega} = T^{-1}\vec{V}$, тогда уравнения состояния в новом базисе:

$$\begin{cases} T\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = AT\vec{\omega} + B\vec{f} \quad \Big| * T^{-1} \\ \vec{y} = CT\vec{\omega} + d\vec{f} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = T^{-1}AT\vec{\omega} + T^{-1}B\vec{f} \\ \vec{y} = CT\vec{\omega} + d\vec{f} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \tilde{A}\vec{\omega} + \tilde{B}\vec{f} \\ \vec{y} = \tilde{C}\vec{\omega} + \tilde{d}\vec{f} \end{cases}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT\,, \tilde{B} = T^{-1}B\,, \tilde{C} = CT, \tilde{d} = d.$$

$$\widetilde{W}(s) = \tilde{C}\left(sI - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{d} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + d =$$

$$= CT[T^{-1}(sI - A)T\,]^{-1}T^{-1}\,B + d = CT[TT^{-1}(sI - A)T\,]^{-1}\,B + d =$$

$$= CT[\,(sI - A)T\,]^{-1}\,B + d = CTT^{-1}(sI - A)^{-1}B + d = C(sI - A)^{-1}B + d = W(s)$$

ПФ инвариантна к преобразованию базиса