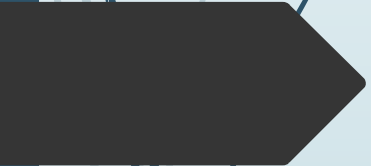


# Теория автоматического управления



Лекция 3. Связь ФПС, ПФ, ДУ.

# Описание модели СУ.

- Модель СУ представляется в форме обыкновенного дифференциального уравнения (ДУ) с постоянными коэффициентами:

$$d_n \frac{d^n y}{dt^n} + d_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + d_1 \frac{dy}{dt} + d_0 y = g_m \frac{g^m f}{dt^m} + g_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + g_1 \frac{df}{dt} + g_0 f.$$

- Вводим следующий оператор:

$$p = d/dt \rightarrow p^k = d^k/dt^k,$$

- Тогда ДУ можно переписать в следующем виде:  $D(p)y(t) = G(p)f(t)$

$D(p)$  – собственный полиномиальный оператор СУ.

$G(p)$  – входной полиномиальный оператор СУ.

- Применим преобразование Лапласа.

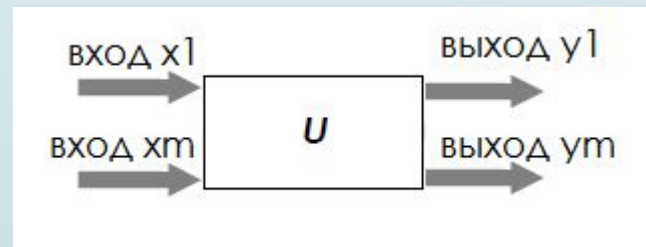
$$D(s)Y(s) = G(s)F(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)} = W(s) = \frac{G(s)}{D(s)}$$

- Факторизованная запись ПФ через корни числителя и знаменателя.

$$W(s) = \frac{g_m \prod_{j=1}^m (s - s_j)}{d_n \prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \text{ где } s_j \text{ и } s_i - \text{ корни полиномов соответственно.}$$

# МОДЕЛИ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

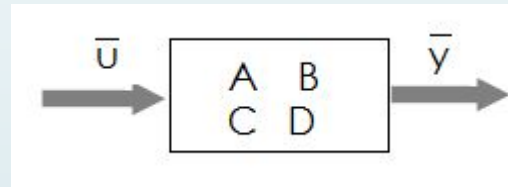
- ▶ Для описания системы вводятся внутренние переменные  $\{V_i\}$ .
- ▶  $V_i(t)$  - переменная состояния (координата состояния), которая характеризует динамику системы во времени.
- ▶ Состояние – необходимая и достаточная информация системы для заданных входных воздействий.
- ▶ Набор  $\{V_i\}$  – набор вектора внутренних состояний, по значению которых в некоторый момент времени  $V_i(t_0), i = \overline{1, n}$  и заданию внешних воздействий  $f_j, j = \overline{1, m}, t \geq t_0$  можно полностью спрогнозировать поведение системы в будущем, т.е. определить  $V_i(t)$ , в любой момент времени  $t$ .
- ▶ 
$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} V_k + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j, i = \overline{1, n}$$



# Форма пространств состояний (ФПС)

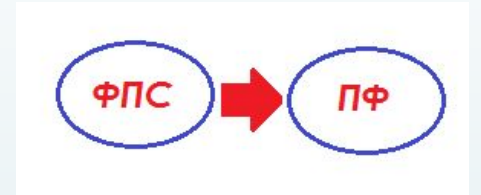
- Одной из стандартных форм представления в теории управления считается система дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется *нормальной формой Коши*.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}$$



- Где,  $y$ ,  $u$  – скаляры,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – матрицы.
- $A$  – матрица коэффициентов (состояний),  $\dim = nxn$ .
- $B$  – матрица входа (управления),  $\dim = nxm$ .
- $C$  – матрица выхода (наблюдения),  $\dim = rxn$ .
- $D$  – матрица обхода (сквозной передачи управления),  $\dim = rxm$ .

# Получение ПФ по модели в форме пространства состояний (ФПС)



$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$   
 $y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$

преобразование Лапласа  $\rightarrow$   $s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$

$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$

единичная матрица  $\downarrow$   $(s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s)$

$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$

тогда получим  $Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s)$

$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D$

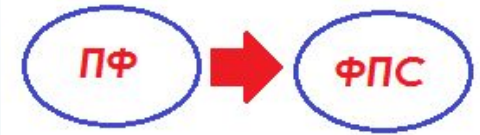
**РЕЗУЛЬТАТ!!!**

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^*}{\det(sI - A)}$$

$$\det(sI - A) = D(s)$$

$$(sI - A) \rightarrow s\widetilde{I} - A \rightarrow (s\widetilde{I} - A)^T = (sI - A)^*$$

# Получение ФПС по ПФ модели.



- ▶ Если ПФ отвечает условиям физической реализуемости, то всегда можно получить ФПС.
- ▶ В случае, если при определении ПФ  $V_i(0)$  или  $X(0) \neq 0$ . То необходимо пересчитать первоначальные условия.
- ▶  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + d = \frac{G(s)}{D(s)}$ .
- ▶  $D(s) = \det(sI - A)$
- ▶  $G(s) = \begin{vmatrix} sI - A & B \\ -C & d \end{vmatrix} = \det(sI - A) * \det(C(sI - A)^{-1}B + d) = D(s)W(s)$ .

$$W(s) = d + \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0},$$

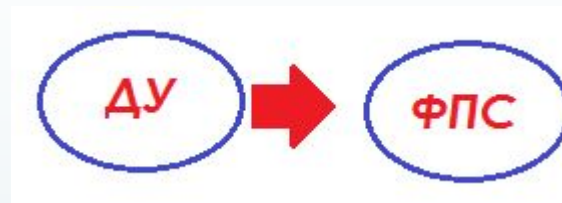
где  $d$ ,  $a_i$  ( $i = 0,1,2$ ) и  $b_i$  ( $i = 0,1,2$ ) – постоянные коэффициенты.

модель в пространстве состояний задается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [a_0 \quad a_1 \quad a_2], \quad D = d.$$



# Переход от ДУ к ФПС



- ▣ Данный переход не однозначный, т. к. существует произвольной выбор системы координат и состояний.
- ▣ Т-числовая матрица преобразования координат, так что выберем новый базис  $\vec{V} = T\vec{\omega}, \vec{\omega} = T^{-1}\vec{V}$ , тогда уравнения состояния в новом базисе:

$$\begin{cases} T \frac{d\vec{\omega}}{dt} = AT\vec{\omega} + B\vec{f} \\ \vec{y} = CT\vec{\omega} + d\vec{f} \end{cases} \quad | * T^{-1} \rightarrow \begin{cases} T \frac{d\vec{\omega}}{dt} = T^{-1}AT\vec{\omega} + T^{-1}B\vec{f} \\ \vec{y} = CT\vec{\omega} + d\vec{f} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \tilde{A}\vec{\omega} + \tilde{B}\vec{f} \\ \vec{y} = \tilde{C}\vec{\omega} + \tilde{d}\vec{f} \end{cases}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT, \tilde{d} = d.$$

$$\tilde{W}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{d} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + d =$$

$$= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B + d = CT[TT^{-1}(sI - A)T]^{-1}B + d =$$

$$= CT[(sI - A)T]^{-1}B + d = CTT^{-1}(sI - A)^{-1}B + d = C(sI - A)^{-1}B + d = W(s)$$

ПФ инвариантна к преобразованию базиса